数理解析研究所講究録
第 679 巻 1989 年 154-162


# アフィン代数多様体上のリッチ曲率が零の完備ケーラー計量について

東京大学教養学部　小林亮一

ここに報告する結果は、板東重稔氏と筆者の共同研究により得られたものである。Springer Lecture Notes in Math. 1339, Geometry and Analysis on Manifolds に既に発表されているものの改良版を述べる。Ricci-flat Kähler metric の存在については，compact Kähler manifold については Yau による Calabi 予想の解決により，

<u>定理</u> (Yau) $X$ を compact Kähler 多様体、$\omega$ を任意の Kähler form とする。このとき，$\omega$ と cohomologous な Kähler form $\omega'$ で，Ricci-flat であるものが唯1つ存在する。

<u>例</u>. 非自明な例で最も簡単なものは，数学的に大変豊富な対象を提供する K3 曲面である。K3 曲面とは，$\mathbb{P}_3\mathbb{C}$ の非特異 4 次曲面に微分同相な複素曲面を意味する。Ricci-flat Kähler metric をもつ K3 曲面の大体の様子を想像するには，4次元実トーラス上の 16 個の 2-division points に Eguchi-Hanson space を置いたもの（それを involution (−1) で割ったもの）を思い浮かべるとよい。

それはほとんどflatで，16個の2-division pointsにのみ曲率が集中した形である。2次元トーラスを(−1)で割って正4面体が得られるが、その頂点に曲率が集中しているという描像に近い。

このように，Ricci-flat metric（もっと一般に，Einstein metric）では、変形パラメタを極端な場合にとばすことにより曲率の集中という現象が起こる。この曲率の集中を拡大鏡で見ると，物理で言う所のgravitational instantonsが見えてくる。これの解析的取扱については，板東、加須栄、中島の新しい研究がある。この稿では，affine algebraic manifoldの多くが、遠方で曲率が$\frac{1}{r^2}$のorderで減衰するRicci-flat Kähler metricをもつことを示す。減衰のorderは，無限遠の複素解析的様相によっても，計量に対する遠方での境界条件によっても変わりうる。まず、結果を述べてからいろいろなコメントを書くことにする。

定理（板東，小林）　Xを射影代数多様体で第1 Chern類が正であるとする。DをXの非特異超曲面で、[D]をそのPoincaré dualとすると，$c_1(X) = \alpha[D]$，$1 < \alpha \in \mathbb{Q}$ であるとする。もし，DがKähler-Einstein計量を許容すれば，X − DはRicci-flat complete Kähler metricを許容する。

例 Siu, Tian によれば, $F$ を degree $n+1$, $n$ の Fermat hypersurface in $\mathbb{P}_n\mathbb{C}$ とすると, $F$ は Kähler-Einstein metric を許容する。$(\mathbb{P}_n\mathbb{C}, F)$ は定理の条件を満たすから, $\mathbb{P}_n\mathbb{C} - F$ は Ricci-flat complete Kähler metric をもつ。この場合, $\alpha = \frac{n+1}{n-1}$ or $\frac{n+1}{n} > 1$ である。

注意 $\alpha \geqq n+1 \Rightarrow (X, D) = (\mathbb{P}_n\mathbb{C}, \mathbb{P}_{n-1}\mathbb{C})$, $X - D = \mathbb{C}^n$ となり, 標準的な flat metric が入る。以下, $\alpha < n+1$ と仮定する。

定理を証明する前に, 多くの ALE gravitational instanton が以下の証明を modify することにより得られ, 曲率の遠方での評価も自動的に得られることに注意する。たとえば, $S^3$ を $SU(2)$ の有限部分群で割ったものを無限遠とする ALE 4-manifold は, 2次元 Ricci-flat complete Kähler manifold で, curvature $= O(\frac{1}{r^6})$ となる。詳しくは, "Bando-Kobayashi: Ricci-flat Kähler metrics on affine algebraic manifolds, II" を参照してください。([EGH], [K], [BK])

証明には2つのアプローチがあるが, ここでは直観的な(1)にそって説明する:

(1) compact manifold 上の Kähler metric で, Ricci 曲率を遠方に localize させる極限をとる,

(2) 直接 non-compact な $X - D$ 上で存在を示す (Monge-Ampère eq. を

解く)。

仮定:Dは Kähler-Einstein。により、次の様にできる:
$L_D$を、Dの定める正則直線束とする。$L_D$の Hermition metric $\|\cdot\|^2$ をうまくとればその曲率型式 $\theta$ は、

(i) $\theta$ は $X$ の Kähler form, i.e., $\theta \gg 0$,

(ii) $\theta|_D$ は Kähler-Einstein で、$\mathrm{Ric}(\theta|_D) = (\alpha - 1)\,\theta|_D$ である。

を満たすとしてよい。今、$\sigma \in H^0(X, \mathcal{O}(L_D))$ で、$(\sigma = 0) = D$ なるものをとる。$t := \log \|\sigma\|^{-2}$ とおくと、$\theta = \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial} t$ である。$X - D$ の Kähler metric $\omega_0$ を次のように作ると、それは遠方で曲率 $= O(\frac{1}{r^2})$ となる complete な metric である:

$$\omega_0 = \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial} F$$

F は $X-D$ 上の strictly plurisubharmonic function で、

① D の近くでは $F := \dfrac{n}{\alpha - 1} \exp\left(\dfrac{\alpha - 1}{n}\, t\right)$,

② $X - D$ の中の方へ、strictly psh. となる様に拡張する。

ここで次の事実を思い出そう:$X - D$ 上には Ricci-flat volume form $V_{R\text{-}f}$ で、D に沿って $2\alpha$ 位の極を持つものが存在する。

$X - D$ 上の関数 $f$ を、関係式

$$\omega_0^n = e^f V_{R\text{-}f}$$

により定めると，次がわかる。

<u>補題</u>　$f$ は $X$ 上の $C^\infty$ function に拡張し，$f|_D \equiv \text{constant}$ である。

<u>補題</u>　$f \equiv 0$ on $D$ としてよい。更に，$D$ 上 $0$ となる $X$ 上の関数 $a$ をうまくとって $\|\cdot\|^2$ を $e^{-a}\|\cdot\|^2$ にとりかえることにより，同じ構成法により $\tilde{\omega}_0$; $\tilde{f}$ を得た時，$\tilde{f} = O(\|\sigma\|^2)$ near $D$ とできる。

2番目の補題は，$\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \sigma} = 0$ を $D$ に沿って考えると $\dfrac{\partial a}{\partial \sigma}$ についての方程式の可解性に帰着できるが，それは Hermitian line bundle の $\Delta$ の固有値の評価を行なうことにより示せる。

方程式

$$(E''_\epsilon) \quad Ric(\omega_\epsilon) = -\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\log\left(\frac{\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^2+\varepsilon}\right)^\alpha$$

$$[\omega_\epsilon] \propto c_1(X) \quad : \text{附帯条件}$$

は，$\left(\dfrac{\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^2+\epsilon}\right)^\alpha V_{R\text{-}f}$ を volume element とする Kähler metric を $c_1(X)$ のスカラー倍の中に求めることと同値である。Yau の Calabi conj. の解決は，この $(E''_\epsilon)$ が unique に解けることを意味する。

$X - D$ 上の関数 $f_\varepsilon$, $F_\varepsilon$ を，$D$ の近傍では $t = \log\|\sigma\|^{-2}$ のみにより，

$$f_\varepsilon(t) = (e^{-t} + \varepsilon)^{-\frac{\alpha-1}{n}}$$

$$F_\varepsilon'(t) = f_\varepsilon(t)$$

を満たすことにより定義する。$F_\varepsilon$は，Dに近づくと∞に発散する。$F_\varepsilon$が$X-D$全体でstrictly pshになる様に$X-D$の有限部分に拡張することができる。以上により，

$$\begin{aligned}\omega_{0\varepsilon} &:= \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial F_\varepsilon \\ &= f(t)\,\theta + f'(t)\sqrt{-1}\,\partial t\wedge\bar\partial t \quad \text{near } D \\ &= \frac{1}{(e^{-t}+\epsilon)^{\frac{\alpha-1}{n}}}\left(\theta + \frac{\alpha-1}{n}\left(\frac{e^{-t}}{e^{-t}+\epsilon}\right)\sqrt{-1}\,\partial t\wedge\bar\partial t\right)\end{aligned}$$

は$X$上のKähler metricであり，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\omega_{0\epsilon} = \omega_0 \quad \text{on } X-D$$

を満たしている。

$\omega_\epsilon = \omega_{0\epsilon} + \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial u_\varepsilon$ を

$$(E_\epsilon') \quad \omega_\epsilon^n = \left(\frac{\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^2+\epsilon}\right)^\alpha V_{R-f}$$

により定義する（Yauの Calabi予想の解決によりwell-defined）。

$f_\epsilon\in C^\infty(X)$を，

$$\left(\frac{\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^2+\epsilon}\right)^\alpha V_{R-f} = e^{-f_\epsilon}\,\omega_{0\epsilon}^n$$

により定義すると， $f_\epsilon = f + O(\varepsilon)$ as $\varepsilon\longrightarrow 0$ となる。

$$(E_\epsilon') \Longleftrightarrow (E_\varepsilon) \quad \omega_\epsilon^n = e^{-f_\epsilon}\,\omega_{0\epsilon}^n$$

$$\omega_\epsilon := \omega_{0\epsilon} + \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial u_\epsilon$$

$$\text{normalization}: \quad \int u_\epsilon\,\omega_{0\epsilon}^n = 0$$

以下，この方程式に対するa priori estimateを行う。$(E_\varepsilon)$はYauにより解ける。Yauの証明にあるa priori estimatesを少し

modify して，$u_\varepsilon$ の $\varepsilon$ によらない評価を得る。

$$\omega_\varepsilon^n - \omega_{0\varepsilon}^n = (e^{-f_\varepsilon} - 1)\omega_{0\varepsilon}^n$$
$$= \sqrt{-1}\partial\bar\partial u_\varepsilon \wedge (\omega_\varepsilon^{n-1} + \omega_\varepsilon^{n-2}\omega_{0\varepsilon} + \cdots + \omega_{0\varepsilon}^{n-1})$$

両辺に $|u_\varepsilon|^{p-2}u_\varepsilon$ をかけて積分すると

$$\int \sqrt{-1}\,\partial|u_\varepsilon|^{\frac{p}{2}} \wedge \bar\partial|u_\varepsilon|^{\frac{p}{2}} (\omega_\varepsilon^{n-1} + \cdots + \omega_{0\varepsilon}^{n-1})$$
$$\approx \int (1 - e^{-f_\epsilon})|u_\epsilon|^{p-2}\cdot u_\epsilon\, \omega_{0\epsilon}^n$$

ここで，Gallot の等周不等式 [G] によると，Kähler metric $\omega_{0\epsilon}$ に関しては，$\varepsilon$ に無関係な Sobolev constant がとれる。したがって $\epsilon$ に無関係に Sobolev inequality が使えて，

$$\left(\int |u_\epsilon|^{p\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqq Cp \int |u_\epsilon|^{p-1}|f_\epsilon| \qquad (p>1) \qquad (\bigstar)$$

を得る。$f_\epsilon = f + O(\epsilon)$, $f = O(\|\sigma\|^2)$ により，

$\exists q < n$ s.t. $\|f_\epsilon\|_{L^q(X,\omega_{0\epsilon})} \leq$ bdd independent of $\epsilon$

となる。Hölder inequality より

$$\left(\int |u_\epsilon|^{p\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq Cp \left(\int |f_\epsilon|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int |u_\epsilon|^{q'(p-1)}\right)^{\frac{1}{q'}}$$ となる。

$p\frac{n}{n-1} = q'(q-1)$ となる様に $p$ をとると，

$p = p_{-1} := \frac{q'}{q'-\gamma}$, $q' = \frac{q}{q-1} > \frac{n}{n-1} = \gamma$ となって，$p > 1$ である。

$$\left(\int |u_\epsilon|^{p_{-1}\gamma}\right)^{\frac{1}{p_{-1}\gamma}} \leq C\left(\int |f_\epsilon|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \quad \text{independent of } \epsilon \quad (\bigstar\bigstar)$$

$$\|u_\varepsilon\|_{L^{p\gamma}}^p = \left(\int |u_\varepsilon|^{p\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq Cp\left(\int |f_\epsilon|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int |u_\epsilon|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \quad (\bigstar \text{に Hölder})$$
$$\leq Cp\,\|f_\epsilon\|_q^{p/q}\,\|f_\epsilon\|_{L^\infty}^{\frac{p-q}{p}}\,\|u_\epsilon\|_{L^p}^{p-1} \quad (\text{再び Hölder})$$

$p = p_i = p_{-1}\gamma^{i+1}$ とおいて iteration をすると，

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty} \leq C\|f_\epsilon\|_{L^q}^\theta \|f_\epsilon\|_{L^\infty}^{1-\theta} \quad \left(\theta = \frac{q}{n}\right)$$ を得る。

したがって，$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty}$ の $\varepsilon$ によらない評価を得た。

2階微分以降の評価は比較的標準的である。[BK] には，Yau の Schwarz lemma を用いる方法が書いてある。解 $\lim_{\epsilon\to 0} u_\epsilon = u$ の遠方での decay estimate には，てきとうなモデル関数（ユークリッド空間では Green 関数に相当するもの，あるいはその巾乗）を barrier として最大値原理を用いると得られる。以上で略証を終わる。

特別な場合には，exact solution が得られる。

例1. Eguchi-Hanson space

多様体としてはアフィン2次曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ をとり，$t := |x|^2+|y|^2+|z|^2$ とおく。$\sqrt{-1}\partial\bar\partial F(t)$ が Ricci-flat になるように未知関数 $F$ を定める方程式は常微分方程式である。これを解くのは容易である。この場合は，holomorphic isometry として $SU(2)$ が作用しているため常微分方程式に帰着した。

例2. $\mathbb{P}_2\mathbb{C}$ − smooth conic

$t := \dfrac{|x|^2+|y|^2+|z|^2}{|x^2+y^2+z^2|}$ とおいて $\sqrt{-1}\partial\bar\partial F(t)$ が Ricci-flat になるように $F$ を定める。これの double cover が Eguchi-Hanson である。この場合は holomorphic isometry として $SO(3)$ の作用がある。

注意 affine alg. surface のコンパクト化で，無限遠を smooth でなくてもよいとすると，$\alpha > 1$ となる smooth bdry のコンパクト化

もあるし, singular boundary の compact 化で $\alpha = 1$ となるものもあるようなことが起こりうる。$\mathbb{C}^2$ は $\mathbb{P}_2$ にコンパクト化すると $\alpha = 3 > 1$ であるが、bdry を degenerate cubic curve  とすると $\mathbb{P}_2$ の1点 blow up にコンパクト化されて $\alpha = 1$ である。

$\alpha = 1$ の場合は今までの手法は用いられない。それは, $\omega_\epsilon$ を同様につくると Sobolev ineq をそのままでは使えないからである。それは等周不等式が不成立であることによる。これは Sobolev よりつよいから、うまく Sobolev をコンパクトパートで用いると $\alpha = 1$ のときもできるかも知れない。$\alpha = 1$ のときや bdry が irreducible でなく $\alpha = 1$ となる因子があるときは, complement $X - D$ に入る complete Ricci-flat Kähler metric は Taub-NUT 型 instanton と共通の性質をもっていることが期待される。

文献

[BK] 文中に書いた。

[EGH] Eguchi - Gilkey - Hanson Diff. Geom, Gauge Theory & Gravitation. Phys Report.

[G] Gallot, 日仏セミナーの proceedings

[K] Kronheimer, ALE gravitational instantons, to appear in JDG.