数理解析研究所講究録
第 679 巻 1989 年 194-201

Asymptotic behavior of the Bellman equation

徳島大総合　長井　英生

$\mathbb{R}^N$ 上の非線型偏微分方程式 (1) を考える.

$$(1)\quad -\frac{1}{2}\Delta V_\alpha + \frac{1}{2}|\nabla V_\alpha|^2 + \alpha V_\alpha = V(x).$$

ここで $V(x)$ は.

$$(A.1)\quad V(x) \geq 0,\ \text{smooth},\ \lim_{|x|\to\infty} V(x) = \infty$$

なるものとする。この方程式は、次の (2) のように書き換える事により Bellman 方程式と見なせる。

$$(2)\quad -\frac{1}{2}\Delta V_\alpha + \alpha V_\alpha = \inf_{z\in\mathbb{R}^n}\left\{ z\cdot\nabla V_\alpha + \frac{1}{2}|z|^2 + V(x)\right\}.$$

この方程式の正値解 V_α の $\alpha\to 0$ とした時の挙動を調べようというのが我々の問題である。この問題の意味を見るために次の線型の問題に立ち返ってみる。

なめらかな領域 D 上で次の Neuman 問題を考えよう。

$$(3)\quad \begin{cases} -\frac{1}{2}\Delta \xi_\alpha + \alpha\xi_\alpha = f(x), & x\in D \\ \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial n} = 0 & x\in\partial D \end{cases}$$

この解 ξ_α は $\alpha\to 0$ とした時、Poincaréの不等式を使えば

$$\alpha\xi_\alpha(x) \longrightarrow \frac{1}{|D|}\int f(x)dx \equiv \langle f\rangle \qquad \text{in } H^1(D)$$

$$\xi_\alpha(x) - \langle\xi_\alpha(x)\rangle \longrightarrow {}^\exists\xi$$

となることがわかり、ここで ξ は

$$(4)\quad \begin{cases} -\frac{1}{2}\Delta\xi + \langle f\rangle = f \\ \frac{\partial\xi}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

を満たし、$\langle\xi\rangle = 0$ である。この事実は確率論的立場から見れば、対応する拡散過程(反射壁ブラウン運動)のエルゴート性に基づくものである。すなわち、$\overline{D}$ 上の反射壁ブラウン運動を $M = (\Omega, \mathcal{B}, P, X_t)$ とするときその不変測度は $m(dx) = \frac{1}{|D|}dx$ であり、任意の有界連続関数 f に対して

$$T_t f(x) \equiv E_x[f(X_t)] \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \langle f\rangle = \int f(x)m(dx).$$

であり、この収束は指数的に速い。すなわち、

$$(*)\quad |T_t f(x) - \langle f\rangle| \le \gamma e^{-\beta t}\|f\|_\infty, \quad {}^\exists\gamma>0,\ \beta>0.$$

従って

$$\alpha\xi_\alpha(x) - \langle f\rangle = \alpha E_x[\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(X_t)dt] - \langle f\rangle$$
$$= \alpha\int_0^\infty e^{-\alpha t}(T_t f - \langle f\rangle)dt \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0$$

でありかつ、

$$\xi_\alpha(x) - \langle \xi_\alpha(x) \rangle = \int_0^\infty e^{-\alpha t}(T_t f - \langle f \rangle)\,dt \xrightarrow[\alpha \to 0]{} \int_0^\infty (T_t f - \langle f \rangle)\,dt = \xi(x)$$

となる。この現象を D 上の確率制御問題を特徴づける Bellman 方程式に対して考えて見るのは自然である。すなわち、次の Bellman 方程式を考える。

$$(5) \quad \begin{cases} -\frac{1}{2}\Delta \tau_\alpha + \alpha \tau_\alpha = H(x, \nabla \tau_\alpha) & x \in D \\ \frac{\partial \tau_\alpha}{\partial n} = 0 & x \in \partial D \end{cases}$$

ここで $H(x, \nabla \tau_\alpha) = \inf_{z \in \Gamma} \{ b(x,z)\nabla \tau_\alpha + f(x,z) \}$。この右辺の inf がある $z_\alpha(x) \in \Gamma$ で attain されるとすると、すなわち、$H(x, \nabla \tau_\alpha) = b(x, z_\alpha(x))\nabla \tau_\alpha + f(x, z_\alpha(x))$ とすると、対応する確率制御問題で最適な拡散過程の生成作用素は、Neuman 条件を持つ $-\frac{1}{2}\Delta + b(x, z_\alpha(x))\nabla$ であり、これは、やはり、エルゴート的であり 不変測度 $m_\alpha(dx) = m_\alpha(x)dx$ をもつ。またこの拡散過程は α をとめる毎に $(*)$ の条件を満たす。この時、不変測度は α に depend しているため、(5) の解 τ_α の漸近挙動を見る事は上の様にはやさしくないが、$m_\alpha(x)$ の α に関係しない評価式を得る事により、解析的証明で上と同種

の議論ができる（cf.［1］）。すなわち $\alpha\to 0$ とした時

$$\alpha z_\alpha \longrightarrow {}^{\exists}\chi \qquad \text{in } H^1(D)$$
$$z_\alpha - \langle z_\alpha\rangle \longrightarrow {}^{\exists}z$$

で、z, χ は

$$(6)\quad \begin{cases} -\frac{1}{2}\Delta z + \chi = H(x, \nabla z) \\ \frac{\partial z}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

を満たし $\langle z\rangle = 0$ である。ここで χ は定数である。この証明で基本的な事は、Poincaré の不等式を使う事であるが、それは確率論的には、反射壁拡散過程の一様エルゴード性 (*) に対応している。

この種の問題を $\mathbb{R}^N$ 全体で考えようとする時、(*) の条件が保証されないため、有界領域での問題と同じ方法はとれない。方程式 (1) 又は (2) に戻って考えよう。(2) の正値解 V_α が得られたとする。このとき (2) の右辺の inf は $-\nabla V_\alpha$ で attain されるので、Bellman 方程式の立場に立てば、

$$(7)\quad -\frac{1}{2}\Delta + \nabla V_\alpha\cdot\nabla$$

が最適な拡散過程の生成作用素と見なせる。この拡散過程は $u_\alpha \equiv e^{-V_\alpha} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ であるならば エルゴード的であり、

その不変測度は $u_\alpha^2(x)/\|u_\alpha\|_2^2\,dx$ である。従ってそのような解 v_α が見つかる状況があるならば、その時は、上の議論のアナロジーが考えられるとするのは自然であろう。我々は、変換 $u_\alpha = e^{-v_\alpha}$ によって、方程式 (1) を、u_α に関するもの

$$(8)\quad -\frac{1}{2}\Delta u_\alpha + Vu_\alpha = -\alpha u_\alpha \log u_\alpha$$

に変換し、(8) の L^2-solution の存在を議論する事から始めて、所期の問題を解決する。この問題が シュレーディンガー作用素の固有値問題に関連する事は興味深い。以下に得られた結果を掲げる。(cf. [2]).

$L^2(R^N)$ 上のシュレーディンガー作用素 $-\frac{1}{2}\Delta + V$ の第1固有値を λ_1 とし、λ_1 に対応する固有関数を ϕ とする。但し、$\int\phi^2(x)dx = 1$ と正規化されたものとする。仮定 (A.1) の下では λ_1 は単純でかつその固有関数 $\phi(x)$ は至る所正で $|x|\to\infty$ のとき指数的に速く減少する事が知られている。(cf. [3]).

$$L^2_{V,\mu} = \{ z \mid \int z^2\beta_\mu^2 < +\infty,\ \int V z^2\beta_\mu^2\,dx < +\infty \}$$

$$\beta_\mu(x) = \exp\{-\mu(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}\},\quad 0 < \frac{\mu^2}{2} < \alpha$$

$\phi_\alpha(x) = c\,e^{-\frac{\lambda_1}{\alpha}}\phi(x)$, ここで c は $\sup_x c\,\phi(x) = 1$ なる定数

$$H^1_{V,\mu} = \{ z \in L^2_{V,\mu} \mid \int |\nabla(z\beta_\mu)|^2\,dx < +\infty \}$$

χ_α は

$$(9)\qquad -\frac{1}{2}\Delta\chi_\alpha + (V-\lambda_1)\chi_\alpha + \alpha\chi_\alpha = \alpha e^{-\frac{\lambda_1}{\alpha}}$$

の $H^1_{V,\mu}$ での一意解とする。（$0<\frac{\mu^2}{2}<\alpha$ なので存在する）．このとき

$$K_\alpha = \{ z \in L^2_{V,\mu} \mid \phi_\alpha \le z \le \chi_\alpha \wedge 1 \}$$

とおく。

定理1. 仮定(A.1)の下で 方程式(8) は K_α 内に最小解と最大解をもつ。

定理2 仮定(A.1) と次の仮定(A.2) の下で

(A.2) $\quad e^{-\delta\sqrt{V}} \in L^2(\mathbb{R}^N),\ {}^\exists\delta>0$

(8) は $0<\alpha<\frac{1}{\delta}$ のとき、$H^1_{V,\mu}$ に一意解 u_α をもち、かつ $u_\alpha \in H^1_V$ である。

定理3. u_α を (8) の K_α 内の任意の解とする。このとき

$$\lim_{\alpha\to 0}(-\alpha\log u_\alpha(x)) = \lambda_1.$$

$$L^2_\phi = \{ f \mid \int f^2 \phi^2 dx \}$$

$$H^1_\phi = \{ f \in L^2_\phi \mid |\nabla f| \in L^2_\phi \}$$

としよう。次の定理が目指したものである。

<u>定理 4</u> (A.1) (A.2) を仮定する。u_α を (8) の解とし $v_\alpha = -\log u_\alpha$ とおく。この時

$$v_\alpha - \int v_\alpha \phi^2 dx \longrightarrow w = -\log \phi + \int \phi^2 \log \phi \, dx \quad \text{in } H^1_\phi.$$

[1] Bensoussan, A. - Blankenship, G : Singular perturbations in stochastic control, Lect. Notes Cont. Inf. Sci. 90 (1987) 171-260

[2] Bensoussan, A. - Nagai, H. : An ergodic control problem arising from the principal eigen function of an elliptic operator, to appear

[3] Reed, M. - Simon, B. : Methods of Modern Mathematical Physics IV, Academic Press, New York (1979)