数理解析研究所講究録
第680巻 1989年 29-38

錐鞍点の特徴づけとその応用

弘前大学理学部　田中　環　(Tamaki Tanaka)

最近の多目的最適化問題の中で、スカラー化(scalarization)による(Pareto)最適解の特徴づけの研究([1],[8],[9],[10],[12],[20],[21]等)が多くなされている。しかしながら、前回の講演等で発表したベクトル値関数のミニマックス定理や錐鞍点に関したスカラー化の文献が少ないように思われる。また、錐鞍点全体に関する研究も必要であると思われる。というのは、ある条件のもとでスカラー化関数が(通常の)鞍点を持てば、それは錐鞍点でもあることは知られているが、全ての錐鞍点がスカラー化によって求められるかどうかは分からない。そこで本講演ではスカラー化による錐鞍点の特徴づけを与える。さらには、不等式制約($g(x)\in D_-$)を持つ多目的最適化問題にその結果を応用する。なお、[19]において、本来3種類の錐鞍点を本講演では錐鞍点、弱錐鞍点と2種類のものについて述べることにする。

1. スカラー化による錐鞍点の特徴づけ

まず、錐鞍点の定義をしておく。本報告を通じて、X, Y, Z はそれぞれ 実 Hausdorff 局所凸線形位相空間(l.c.s.)とし、空間 Z は pointed な凸錐Z_+(i.e. $tZ_+\subset Z_+$ for $\forall t \geqq 0$, $Z_+\cap(-Z_+)=\{0\}$, Z_+はZの(空でない)凸集合)によって半順序が定義されているものとする($a-b\in Z_+ \Leftrightarrow a\geqq_{Z_+} b$)。この時、Zを$(Z,Z_+)$と表したりする。さらに議論を簡単にするために、$\mathrm{int}Z_+\neq\phi$ と仮定する。また、$Z_-=-Z_+$、空間Zの部分集合AのZ_+-端点全体を $\mathrm{Ext}[A|\,Z_+]$によって表す。

($z_0 \in A$ is said to be a Z_+-extreme point of A if there is no points $z \in A$ such that $z \neq z_0$ and $z_0 - z \in Z_+$)

つまり、$\mathrm{Ext}[A|\ Z_+]$は minimal points全体、$\mathrm{Ext}[A|\ Z_-]$は maximal points全体と考えて良い。さらに、この Z_+に対して、Zの双対空間 Z^*における双対錐(dual cone) Z_+^*と正双対錐(positive dual cone) Z_+^{*i} を次のように定めておく。

$$Z_+^* := \{z^* \in Z^* \mid \langle z^*, z\rangle \geqq 0,\ \ \forall z \in Z_+\}$$

$$Z_+^{*i} := \{z^* \in Z^* \mid \langle z^*, z\rangle > 0,\ \ \forall z \in Z_+ \setminus \{0\}\}$$

これから以後、XとYの空でない部分集合 A, B 上で定義されたベクトル値関数 $f: A \times B \rightarrow Z$ について話を進める。また、

$$f(A,y) := \bigcup_{x \in A} \{f(x,y)\}$$

$$f(x,B) := \bigcup_{y \in B} \{f(x,y)\}$$

$$M := f(A,B)$$

とする。

定義１　(錐鞍点、弱錐鞍点)((weak) cone-saddle points)

(１) 点(x_0, y_0)がfの$A \times B$に関するZ_+-鞍点であるとは、次の関係を満たす時をいう。

$$f(x_0, y_0) \in \mathrm{Ext}[f(x_0,B) \mid Z_-] \cap \mathrm{Ext}[f(A,y_0) \mid Z_+]$$

(２) 点(x_0, y_0)がfの$A \times B$に関する弱Z_+-鞍点であるとは、次の関係を満たす時をいう。

$$f(x_0, y_0) \in \mathrm{Ext}[f(x_0,B) \mid \mathrm{int}Z_-^0] \cap \mathrm{Ext}[f(A,y_0) \mid \mathrm{int}Z_+^0]$$

(ただし$\mathrm{int}Z_+^0 := \mathrm{int}Z_+ \cup \{0\}$)

また、Z_+-鞍点全体の集合をS、弱Z_+-鞍点全体の集合をS^wと表すことにすれば、明かに $S \subset S^w$である。また、$\mathrm{int}Z_+^0 = Z_+$ の時は、$S = S^w$ である。

次に、スカラー化において、空間Zの順序構造をそのまま保存する性質を[8]にならい、局所的な形で一般の写像に対して定義しておく。

定義２　Z, Yを２つの実Hausdorff l.c.s. とし、それぞれ凸錐 D_+, C_+ が与えられているものとする。この時も $(Z, D_+), (Y, C_+)$ と書く。A を Z の空でない部分集合、$z_0 \in A$ とする。

（１）Z から Y への写像ψが monotonically increasing w.r.t.the lower (resp. upper) section on A at z_0 であるとは、次の関係を満たす時をいう。

$$\psi(z)-\psi(z_0) \in C_- \quad \text{for } \forall z \in (\{z_0\}+D_-) \cap A$$

$$(\text{resp. } \psi(z)-\psi(z_0) \in C_+ \quad \text{for } \forall z \in (\{z_0\}+D_+) \cap A \ )$$

（２）Z から Y への写像ψが strictly monotonically increasing w.r.t. the lower (resp. upper) section on A at z_0 であるとは、次の関係を満たす時をいう（ただし $\mathrm{int}C_+$, $\mathrm{int}D_+ \neq \phi$ ）。

$$\psi(z)-\psi(z_0) \in \mathrm{int}C_- \quad \text{for } \forall z \in (\{z_0\}+\mathrm{int}D_-) \cap A$$

$$(\text{resp. } \psi(z)-\psi(z_0) \in \mathrm{int}C_+ \quad \text{for } \forall z \in (\{z_0\}+\mathrm{int}D_+) \cap A \ )$$

（３）Z から Y への写像ψが strongly monotonically increasing w.r.t. the lower (resp. upper) section on A at z_0 であるとは、次の関係を満たす時をいう（ただし $\mathrm{int}C_+ \neq \phi$ ）。

$$\psi(z)-\psi(z_0) \in \mathrm{int}C_- \quad \text{for } \forall z \in (\{z_0\}+D_-) \cap A,\ z \neq z_0$$

$$(\text{resp. } \psi(z)-\psi(z_0) \in \mathrm{int}C_+ \quad \text{for } \forall z \in (\{z_0\}+D_+) \cap A,\ z \neq z_0 \ )$$

簡単な例をいくつか挙げる。

例１　Z_+^* の元は (Z, Z_+)から$(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$への monotonically increasing w.r.t. the lower (and upper) section on Z at any point $z \in Z$ である。特に、$\mathrm{int}Z_+ \neq \phi$ の時は、$Z_+^* \setminus \{0\}$ の元は (Z, Z_+)から$(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$への strictly mono.. ...である。また、Z_+^{*i} の元は (Z, Z_+)から$(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$への strongly monotonically ... である。

例２　$S_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c, d \geqq 0 \right\}$

$S_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c, d \geqq 0,\ a+b \neq 0,\ c+d \neq 0 \right\}$

$$S_3 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ a,\ b,\ c,\ d > 0 \right\}$$

のそれぞれの元は、 $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2_+)$ からそれ自身への monotonically, strictly monotonically, strongly monotonically increasing w.r.t. the lower (and upper) section on $\mathbb{R}^2$ at any point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ である。

例３（例１の具体例）$\psi(x) = \int_0^1 x(t)dt$ は $(C[0,1], D_+)$ から $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ への strongly monotonically increasing w.r.t. the lower (and upper) section on C[0,1] at any point $x \in C[0,1]$ である。但し、

$$D_+ := \{ x \in C[0,1] \mid x(t) \geqq 0 \text{ for } t \in [0,1] \}$$

とする。また、

$$S := \{ v \in BV[0,1] \mid v \text{ is nondecreasing on } [0,1] \} \quad (= D_+^*)$$

の元は、 $(C[0,1], D_+)$ から $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ への monotonically increasing ... である。特に、$S \setminus \{0\}$ の元は strictly monotonically increasing ... である。

準備の最後として、２つの汎関数に対する semi-saddle points の定義を与えておく。本来の鞍点とは本質的には縁もゆかりもないが、錐鞍点とは密接な関わりを持つことになる。

定義３　g_1, g_2 を $A \times B$ 上の実数値関数とする。

（１）点 (x_0, y_0) が (g_1, g_2) の $A \times B$ に関する semi-saddle point であるとは、次の関係を満たす時をいう。

$$g_1(x_0, y_0) \leqq g_1(x, y_0), \quad \forall x \in A$$

$$g_2(x_0, y_0) \geqq g_2(x_0, y), \quad \forall y \in B$$

（２）点 (x_0, y_0) が (g_1, g_2) の $A \times B$ に関する strictly semi-saddle point であるとは、次の関係を満たす時をいう。

$$g_1(x_0,y_0) < g_1(x,y_0), \quad \forall x\in A,\ x\neq x_0$$

$$g_2(x_0,y_0) > g_2(x_0,y), \quad \forall y\in B,\ y\neq y_0$$

一応、$g_1 = g_2$の時は通常の鞍点の定義と一致する。

さて、ベクトル値関数 f のスカラー化により、 f の錐鞍点の特徴づけを次のように与える。

定理１（錐鞍点であるための十分条件） Let functionals $\psi_1, \psi_2 : M \to \mathbb{R}$ and a point $(x_0,y_0)\in A\times B$ be given.

(1) Suppose that ψ_1 and ψ_2 are monotonically increasing w.r.t. the lower and upper sections on M at $f(x_0,y_0)$, respectively. If (x_0,y_0) is a strictly semi-saddle point of $(\psi_1\circ f, \psi_2\circ f)$, then (x_0,y_0) is a Z_+-saddle point of f.

(2) Suppose that ψ_1 and ψ_2 are strictly monotonically increasing w.r.t. the lower and upper sections on M at $f(x_0,y_0)$, respectively. If (x_0,y_0) is a semi-saddle point of $(\psi_1\circ f, \psi_2\circ f)$, then (x_0,y_0) is a weak Z_+-saddle point of f.

例１で考察したことから、次の系が得られる。但し、各 $z^*\in Z^*$ に対して

$$\bar{f}_{z^*}(x,y) := \langle z^*, f(x,y)\rangle$$

と書くことにする。

系１ (1) If there exist $z_1^*, z_2^*\in Z_+^*$ such that a point $(x_0,y_0)\in A\times B$ is a strictly semi-saddle point of $(\bar{f}_{z_1^*}, \bar{f}_{z_2^*})$ (thus $z_1^*, z_2^* \in Z_+^*\setminus\{0\}$ necessarily), then (x_0,y_0) is a Z_+-saddle point of f.

(2) If there exist $z_1^*, z_2^*\in Z_+^*\setminus\{0\}$ such that a point $(x_0,y_0)\in A\times B$

is a semi-saddle point of $(\bar{f}_{z_1^*}, \bar{f}_{z_2^*})$, then (x_0, y_0) is a weak Z_+-saddle point of f.

次に、これらの逆が成り立つかどうか考えることにする。 Z の部分集合 A と錐 D に対して、A が D-convex であるとは、A+D が凸集合となる時をいう。また、いくつかの記号も導入する。

$$K_1 := \mathrm{cone}[f(A, y_0) + Z_+ - f(x_0, y_0)]$$

$$K_2 := \mathrm{cone}[f(x_0, B) + Z_- - f(x_0, y_0)]$$

$$\mathrm{cone}[S] := \{\lambda a \mid \lambda \geqq 0 \text{ and } a \in S\}$$

定理２（錐鞍点であるための必要条件）Let a point $(x_0, y_0) \in A \times B$ be given.

(1) Suppose that two cones $K_1 \setminus \{0\}$, $K_2 \setminus \{0\}$ are open. If (x_0, y_0) is a Z_+-saddle point of f such that $f(A, y_0)$ and $f(x_0, B)$ are Z_+-convex, Z_--convex, respectively, then there exist z_1^*, $z_2^* \in Z_+^* \setminus \{0\}$ such that (x_0, y_0) is a strictly semi-saddle point of $(\bar{f}_{z_1^*}, \bar{f}_{z_2^*})$.

(2) If (x_0, y_0) is a weak Z_+-saddle point of f such that $f(A, y_0)$ and $f(x_0, B)$ are Z_+-convex, Z_--convex, respectively, then there exist z_1^*, $z_2^* \in Z_+^* \setminus \{0\}$ such that (x_0, y_0) is a semi-saddle point of $(\bar{f}_{z_1^*}, \bar{f}_{z_2^*})$.

系１と定理２から、実はある条件のもとで次のような系が成り立つことが判明した。

系２　Suppose that f satisfies that two sets $f(A, y)$ and $f(x, B)$ are Z_+-convex and Z_--convex, for any $y \in B$ and $x \in A$, respectively. Then

$$S^w = \bigcup_{z_1^*, z_2^* \in Z_+^* \setminus \{0\}} \{\text{ semi-saddle points of } (\bar{f}_{z_1^*}, \bar{f}_{z_2^*})\}.$$

これらの結果は、部分集合 A,B が凸集合で、ベクトル値関数 f が Z_+-convex -concave (i.e. $\lambda f(x_1,y)+(1-\lambda)f(x_2,y)\in f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,y)+Z_+$ for every x_1, $x_2\in A$, $\lambda\in[0,1]$, and each $y\in B$; $\mu f(x,y_1)+(1-\mu)f(x,y_2)\in f(x,\mu y_1+(1-\mu)y_2)+Z_-$ for every y_1, $y_2\in B$, $\mu\in[0,1]$, and each $x\in A$) の拡張にもなっている。

この節の最後に付け加えておくが、[19] においては存在定理による特徴づけも行っているが、ここでは割愛する。

2. 錐鞍点の多目的最適化問題への応用

この節で扱う多目的最適化問題とは次のように定式化されたものとする。

$$(P)\quad \underset{x\in A}{\text{minimize}}\ \ f(x)\quad \text{subject to}\quad g(x)\in D_-,$$

ここで、空間 X, Y, Z は第1節と同じ l.c.s. とし、特に空間 Y は凸錐 C_+ によって順序構造が入っているものとする。D_+ は Z の凸錐で、$D_-=-D_+$ とする。A を X の部分集合とし、ベクトル値関数 $f:X\to Y$, $g:X\to Z$ に対して、$f(x_0)$ が $f[A\cap g^{-1}(D_-)]$ の minimal element となる(すべての) $x_0\in A\cap g^{-1}(D_-)$ を求めたい。第1節の表記では、(P) は次の (P_1') と表すことができる。

$$(P_1')\qquad \begin{array}{l}(\text{ to find all } x_0 \text{ such that })\\ \quad f(x_0)\ \in\ \mathrm{Ext}[f[A\cap g^{-1}(D_-)]\mid C_+]\end{array}$$

また、 $\mathrm{int}C_+\neq\phi$ の時は弱最適解として、次の (P_2') も考えられる。

$$(P_2')\qquad \begin{array}{l}(\text{ to find all } x_0 \text{ such that })\\ \quad f(x_0)\ \in\ \mathrm{Ext}[f[A\cap g^{-1}(D_-)]\mid \mathrm{int}C_+^0]\end{array}$$

これらの (P_1')、(P_2') に錐鞍点の結果を適用するために、次の形の Lagrangian を考えることにする。

$$L(x,s):=f(x)+sg(x)\qquad(\text{但し、}s:Z\to Y\ )$$

そこで、主要な定理を2つ述べる。

定理３　Let S be a subset of mappings of Z into Y, $0 \in S$,

C_+ a pointed convex cone in Y,

D_+ a convex cone in Z.

If there exists $(x_0, s_0) \in A \times S$ such that

(1) (x_0, s_0) is a C_+-saddle point of L w.r.t. $A \cap g^{-1}(D_-) \times S$

(resp. weak C_+-saddle point ...)

(2) s_0 is monotonically increasing w.r.t. the lower section on $g(A)$ at 0 (resp. strongly monotonically increasing ...)

then x_0 is a solution for (P_1') (resp. (P_2')).

この定理の逆を考えるには、ある凸性の仮定と内点条件（ Slater ）が必要となる。

定理４　Let C_+ be a pointed convex cone in Y with $\mathrm{int}C_+ \neq \phi$, D_+ a convex cone in Z. Suppose that $A \cap g^{-1}(\mathrm{int}D_-) \neq \phi$ and

$$\bigcup_{x \in A \cap g^{-1}(D_-)} \{(f(x), g(x))\} \text{ is a } C_+ \times D_+\text{-convex set.}$$

If x_0 solves (P_1') (resp. (P_2')), then there exists a mapping s_0 of Z into Y such that

(1) the point (x_0, s_0) is a C_+-saddle point of L w.r.t. $A \cap g^{-1}(D_-) \times S$ (resp. weak C_+-saddle point ...), where S is a (suitable) subset of mappings that satisfy the following property (2),

(2) s_0 is monotonically increasing w.r.t. the lower section on $g(A)$ at 0.

しかしながら、弱最適解の場合については定理３の全く逆は望めない。つまり、s_0 の条件 (2) において、 strongly monotonically ... まではいえない。

REFERENCES

[1] J.BORWEIN, Proper efficient points for maximizations with respect to cones, SIAM J. Control Optim., 15(1977), pp.57-63.

[2] F.E.BROWDER, Coincidence theorems, minimax theorems, and variational inequalities, Contemp. Math., 26(1984), pp.67-80.

[3] F.H.CLARKE, Optimization and nonsmooth analysis, John Wiley, New York, 1983.

[4] F.FERRO, Minimax type theorems for n-valued functions, Ann. Mat. Pura Appl.(4), 32(1982), pp.113-130.

[5] J.R.GILES, Convex analysis with application in differentiation of convex functions, Research Notes in Mathematics, No.58, Pitman, London, 1982.

[6] I.V.GIRSANOV, Lectures on mathematical theory of extreme problems, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No.67, Springer-Verlag, New York, 1972.

[7] R.B.HOLMES, Geometric functional analysis and its applications, Springer-Verlag, New York, 1975.

[8] J.JAHN, Scalarization in vector optimization, Math. Programming, 29 (1984), pp.203-218.

[9] ——, A characterization of properly minimal elements of a set, SIAM J. Control Optim., 23(1985), pp.649-656.

[10] ——, Existence theorems in vector optimization, J. Optim. Theory Appl., 50(1986), pp.397-406.

[11] D.G.LUENBERGER, Optimization by vector space methods, John Wiley, New York, 1969.

[12] H.NAKAYAMA, Geometric consideration of duality in vector optimization, J. Optim. Theory Appl., 44(1984), pp.625-655.

[13] J.W.NIEUWENHUIS, Some minimax theorems in vector-valued functions, J. Optim. Theory Appl., 40(1983), pp.463-475.

[14] J.PONSTEIN, Approaches to the theory of optimization, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[15] S.SIMONS, Cyclical coincidences of multivalued maps, J. Math. Soc. Japan, 38(1986), pp.515-525.

[16] T.TANAKA, On cone-extreme points in $\mathbb{R}^n$, Science Reports of Niigata University, 23(1987), pp.13-24.

[17] ——, Some minimax problems of vector-valued functions, J. Optim. Theory Appl., 59(1988), pp.505-524.

[18] ——, Some existence theorems for cone saddle points of vector-valued functions in infinite-dimensional spaces, J. Optim. Theory Appl., 62(1989).

[19] ——, A characterization of cone saddle points of vector-valued functions via scalarization, submitted for publication.

[20] T.TANINO AND Y.SAWARAGI, Duality theory in multiobjective programming, J. Optim. Theory Appl., 27(1979), pp.509-529.

[21] P.L.YU, Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives, J. Optim. Theory Appl., 14(1974), pp.319-377.

[22] H.W.CORLEY, Duality theory for maximizations with respect to cones, J. Math. Anal. Appl. 84(1981), pp.560-568.