数理解析研究所講究録
第680巻 1989年 71-80

領域上の max-flow, min-cut problems

大阪市大理　野沢亮平　(Ryôhei Nozawa)

§1. Introduction

Network上でよく知られている max-flow problem (=MFP) と min-cut problem (=MCP) をユークリッド空間の領域で考えようという試みが文献〔1〕,〔2〕でなされている．とくに〔2〕においては MFP と MCP の数学的に厳密な定式化（の一例）と，両者の値が一致することを示すための方法が述べられている．ここでは主に〔1〕で扱われている問題を少々一般化して，〔2〕における方法に基いて max-flow min-cut theorem を与えるとともに，optimal cut の存在と関連して MCP の relaxation について述べる．

以後 Ω を R^n の有界領域とし，その境界 $\partial\Omega$ はLipschitz連続とする．さらに $H(\Omega)$, $BV(\Omega)$ を次のように定義する：

$H(\Omega)=\{\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n);\ \sigma_j\in L^\infty(\Omega)$ for all j and
　　$\mathrm{div}\,\sigma\in L^n(\Omega)\}$,

$BV(\Omega)=\{u\in L^1(\Omega);\ \partial u/\partial x_j$ is a Radon measure of bounded variation for each j}.

このとき $BV(\Omega)\subset L^{n/(n-1)}(\Omega)$ であり，$BV(\Omega)$ から $L^1(\partial\Omega)$ の上への trace operator γ が存在する（〔4〕などを参照）．ただし$L^1(\partial\Omega)$は n-1次元Housdorff測度 H_{n-1} に関する $\partial\Omega$ 上の可積分関数のなす空間である．

さらに 〔3〕によれば $u\in BV(\Omega)$, $\sigma\in H(\Omega)$ のとき

$$(\sigma\nabla u)(a) = \int_\Omega (-a u \operatorname{div}\sigma - u\sigma\cdot\nabla a)dx$$

$(a\in C_0^\infty(\Omega))$ によって定義される distribution $(\sigma\nabla u)$ は有界変動Radon測度であり，その total mass を $(\sigma\nabla u)(\Omega)$ とかくことにすると次のような Greenの公式が成立する：

$$\int_\Omega u \operatorname{div}\sigma\, dx + (\sigma\nabla u)(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \sigma\cdot\nu\gamma u\, dH_{n-1}.$$

ここで ν は $\partial\Omega$ 上の外向き unit normal vector, $\sigma\cdot\nu$ は弱い意味で定義される$\partial\Omega$上の σ の normal component である．

また reduced boundary の概念も有用である： $u\in BV(\Omega)$ にたいして

$$N_r = \{x\in\Omega;\ u(x) > r\}$$

とおくと，その特性関数はほとんどすべての r にたいして $BV(\Omega)$ に属し，

N_r の reduced boundary を $\partial^* N_r$ とかけば

$$\gamma u(x) = \sup\{r \in R;\ x \in \partial^* N_r\}$$

が H_{n-1}-a.e. $x \in \partial\Omega$ にたいしてなりたつ．（文献〔4〕.）

これらの事実を用いて MFP を少し一般の形で定義してみよう．$T = \{0,1,...,t_0\}$ とおき，

$\Omega' \subset \Omega$, $A' \subset \partial\Omega$ をBorel集合，

$K \subset (L^\infty(\Omega;R^n) \times L^\infty(\partial\Omega))^T$ を原点を含む凸集合，

$P \subset (L^n(\Omega) \times L^\infty(\partial\Omega))^T$ を原点を頂点にもつ凸錐とする．

このとき最適問題（MF(0)）およびその双対問題（$MF^*(0)$）を次のように定義する．

$$(MF(0))\quad \text{Maximize}\ \sum_{t\in T}\Big\{\int_{\Omega'} -\mathrm{div}\,\sigma_t\,dx + \int_{A'} (\sigma_t\cdot\nu - q_t)\,dH_{n-1}\Big\}$$

$$\text{subject to}\quad (\sigma_t, q_t)_{t\in T} \in K \quad \text{such that}$$

$$(-\mathrm{div}\,\sigma_t,\ \sigma_t\cdot\nu - q_t)_{t\in T} \in P\ .$$

$$(MF^*(0))\quad \text{Minimize}\quad \Psi_K((u_t)_{t\in T}),$$

$$\text{subject to}\quad (u_t)_{t\in T} \in BV(\Omega)^T \quad \text{such that}$$

$$\sum_{t\in T}\Big\{\int_\Omega p_{1,t}\,u_t\,dx + \int_{\partial\Omega} p_{2,t}\,\gamma u_t\,dH_{n-1}\Big\}$$

$$\geq \sum_{t\in T}\Big\{\int_{\Omega'} p_{1,t}\,dx + \int_{A'} p_{2,t}\,dH_{n-1}\Big\}$$

$$\text{for all}\quad (p_{1,t}, p_{2,t})_{t\in T} \in P\ .$$

但し $\Psi_K((u_t)_{t\in T}) = \sup\{\sum_{t\in T}((\sigma_t \nabla u_t)(\Omega) - \int_{\partial\Omega} q_t\,\gamma u_t\,dH_{n-1});$

$(\sigma_t, q_t)_{t\in T} \in K,\ \sigma_t \in H(\Omega)$ for all $t \in T\}$.

(MF(0)) において我われは $(\sigma_t)_{t\in T}$ が (multi-stage) flow を表していると考え，適当な $(q_t)_{t\in T} \in L^\infty(\partial\Omega)$ が存在して $(\sigma_t, q_t)_{t\in T}$ が feasible element になるとき $(\sigma_t)_{t\in T}$ を (MF(0)) の feasible flow という．

双対定理を述べるために $W^{1,1}(\Omega)^T \times (L^n(\Omega) \times L^\infty(\partial\Omega))^T$ 上の双線形汎関数 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を次のように定義し，$(L^n(\Omega)\times L^\infty(\partial\Omega))^T$ 上ではそれによる弱位相を考えることにする：

$$\langle u, p\rangle = \sum_{t\in T}\left\{\int_\Omega p_{1,t} u_t \, dx + \int_{\partial\Omega} p_{2,t} \gamma u_t \, dH_{n-1}\right\}$$

$(u = (u_t)_{t\in T},\ p = (p_{1,t}, p_{2,t})_{t\in T})$.

また，$(L^\infty(\Omega; R^n) \times L^\infty(\partial\Omega))^T$ 上では通常の weak*-位相を考える． min-max の定理を用いて次の命題が証明される．

命題 1．K を compact，P を closed とする．さらに W を $(MF^*(0))$ の feasible elements 全体とし

(1.1) $\inf\{\langle u, p\rangle;\ u \in W \cap W^{1,1}(\Omega)^T\}$

$$= \sum_{t\in T}\left\{\int_{\Omega'} p_{1,t} \, dx + \int_{A'} p_{2,t} \, dH_{n-1}\right\}$$

for all $(p_{1,t}, p_{2,t})_{t\in T} \in P$

と仮定する．このとき (MF(0)) と $(MF^*(0))$ の値は一致し，その値が有限のとき (MF(0)) は最適解をもつ．

次に $BV(\Omega)^T$ 上の関数 Π と $BV(\Omega)^T$ の部分集合 Z_0 を定義する：

$$\Pi(u) = \inf\{\langle u,p\rangle;\ \sum_{t\in T}\{\int_{\Omega'} p_{1,t}\,dx + \int_{A'} p_{2,t}\,dH_{n-1}\} \geqq 1,$$
$$p = (p_{1,t}, p_{2,t})_{t\in T} \in P\},$$

$Z_0 = \{(u_t)_{t\in T} \in BV(\Omega)^T;\ u_t$ is a characteristic function for each t or $-u_t$ is a characteristic function for each t$\}$.

これらの Π と Z_0 を用いて min-cut problem (MC(0)) は次のようにのべられる．

(MC(0)) Minimize $\Psi_K(u)/\Pi(u)$,

subject to $u \in Z_0$ such that $\Pi(u) > 0$.

命題２．次のふたつの条件を仮定する：

(1.2) $$\sum_{t\in T}\{\int_{\Omega'} p_{1,t}\,dx + \int_{A'} p_{2,t}\,dH_{n-1}\} \geqq 0$$

for all $p = (p_{1,t}, p_{2,t})_{t\in T} \in P$,

(1.3) 任意の $u \in BV(\Omega)^T$ にたいして $\{u^r\}_{r\in R} \subset Z_0$ が存在して，

$$\Psi_K(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_K(u^r)\,dr \quad かつ \quad \Pi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(u^r)\,dr .$$

このとき，$(MF^*(0))$ と (MC(0)) の値は一致する．

Z_0の元を(multi-stage)cutとみなし，(MC(0))の feasible element を (MC(0)) の feasible cut と呼ぶ.

§2. A generalized Iri's problem

この節では，〔1〕において考察された MFP の一般化と，それに対応する MCPの relaxation を試みる. Ω, T を前節のとうりとする.

A, B を互いに交わらない $\partial\Omega$ の Borel 部分集合，

α_t, α'_t を $L^\infty(\partial\Omega)$ に属す非負関数 ($t \in T$) とする.

さらに各 t にたいして次の性質を満足する Ω 上で定義された集合値写像 Γ_t を考える:

$\Gamma_t(x)$ は R^n の原点を含む有界閉凸集合 ($\forall x \in \Omega$).

Γ_t は次のいみで連続;任意の $\varepsilon > 0$ と Ω の任意の compact 部分集合 Ω_0 にたいしてある正数 r が存在して $|x-y| < r$ かつ $x, y \in \Omega_0$ ならば $\Gamma_t(x) \subset \Gamma_t(y) + B(0,\varepsilon)$ が成り立つ.

Γ_t は有界; $\bigcup_{x\in\Omega} \Gamma_t(x)$ が有界集合.

ここで

$$\beta_t(v,x) = \sup_{w\in\Gamma_t(x)} v\cdot w \qquad (x \in \Omega,\ v \in R^n)$$

とおくと，β_t は $R^n \times \Omega$ 上の連続関数であり，$u \in BV(\Omega)$ にたいして，

$$\psi_t(u) = \int_\Omega \beta_t(\nabla u/|\nabla u|,\cdot)\,d|\nabla u|$$

が定義される（$|\nabla u|$ は u の gradient ∇u の全変動測度，$\nabla u/|\nabla u|$ は ∇u の $|\nabla u|$ に関する Radon-Nikodym derivative である）．

また $a \in L^1(\Omega)$ にたいして

$$\zeta_t(a) = \int_{\partial\Omega} (\alpha_t a^+ + \alpha'_t a^-)\, dH_{n-1}$$

$(a^+ = \max(a,0),\ a^- = -\min(a,0))$ とおく．

これらを用いて(MF(I))および(MC(I))を定義しよう．A，B をあらかじめ与えられた disjoint な $\partial\Omega$ の Borel 部分集合とする．

(MF(I)) Maximize $\displaystyle\sum_{t\in T} \int_A \sigma_t \cdot \nu\, dH_{n-1}$,

subject to $(\sigma_t)_{t\in T} \in L^\infty(\Omega; R^n)^T$ such that

$\operatorname{div} \sigma_t = 0$ a.e. on Ω, $\sigma_t(x) \in \Gamma_t(x)$ for a.e. $x \in \Omega$,

$\sigma_t \cdot \nu \geqq 0$ H_{n-1}-a.e. on A,

$-\alpha_t \leqq \sum_{s=0}^{t} \sigma_s \cdot \nu \leqq \alpha'_t$ H_{n-1}-a.e. on $\partial\Omega - (A \cup B)$

for each $t \in T$.

(MC(I)) Minimize $\displaystyle\sum_{t\in T} (\varphi_t(\chi_{S_t}) + \zeta_t(\gamma\chi_{S_t} - \gamma\chi_{S_{t+1}}))$,

subject to $(S_t)_{t\in T}$ such that $\chi_{S_t} \in BV(\Omega)$,

$\gamma\chi_{S_t} = 1$ H_{n-1}-a.e. on A,

$\gamma\chi_{S_t} = 0$ H_{n-1}-a.e. on B

for each $t \in T$.

ただし S_{t_0+1} は $\chi_{S_{t_0+1}} \in BV(\Omega)$ かつ $\partial\Omega$ 上 $\gamma\chi_{S_{t_0+1}} = \chi_A$ であるような Ω の任意の部分集合とする.

(MF(I)) において, A, B, $\partial\Omega-(A\cup B)$ はそれぞれ sink, source, storage をあらわし, Γ_t, α_t, α'_t は Ω, $\partial\Omega-(A\cup B)$ の容量をしめすものである. $t_0=0$ かつ $\partial\Omega-(A\cup B)$ 上 $\alpha_0=\alpha'_0=0$ のとき, (MF(I)) は〔1〕で考察されている問題のより厳密な定式化といえる.

Coarea formula の次のような拡張

$$\psi_t(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_t(\chi_{N_r})dt \qquad (u\in BV(\Omega),\forall t)$$

などを用いると§1の命題1, 2から次の定理をうる.

定理1. (MF(I)),(MC(I)) の値は有限で, それらは一致する. また (MF(I)) は最適解 i.e. an optimal flow をもつ.

この定理において, Γに対する条件(連続性, 有界性)は本質的である. また(MC(I))の最適解 i.e. optimal cut が一般には存在しないことは次の簡単な例によってもわかる.

例1. $t_0=0$, $\Omega=(0,1)\times(0,1)\subset R^2$, $A=\{0\}\times(0,1)$, $B=(0,1)\times\{0\}$, α_0, $\alpha'_0=0$, $\Gamma_0(x)=\{w\in R^2;|w|\leq 1\}$ (for all $x\in\Omega$) とすると (MF(I)), (MC(I)) の値は 1 である. この (MC(I)) は最適解をもたない.

そこでわれわれは(MC(I))の最適解の存在を論ずるかわりに，(MC(I))に十分近い問題 (RMC(I)) を構成し，その最適解の存在を論ずることにする．

以下では Γ_t は Ω の閉包で定義され，かつそこで連続であるとする：任意の $\varepsilon>0$ にたいして $r>0$ が存在して

$|x-y|<r$, $x,y\in\Omega\cup\partial\Omega$ ならば $\Gamma_t(x)\subset\Gamma_t(y)+B(0,\varepsilon)$.

このとき β_t は $R^n\times(\Omega\cup\partial\Omega)$ で定義された連続関数である．

$\mu\in L^1(\partial\Omega)$ にたいして

$$\tilde{\varphi}_t(a)=\int_{\partial\Omega}(\beta_t(-\nu,\cdot)\mu^{+}+\beta_t(\nu,\cdot)\mu^{-})\,dH_{n-1}$$

とおく．

(RMC(I)) Minimize $\sum_{t\in T}\{\varphi_t(\chi_{S_t})+\xi_t(\chi_{S'_t}-\chi_{S'_{t+1}})$

$$+\tilde{\varphi}_t(\gamma\chi_{S_t}-\chi_{S'_t})\},$$

subject to $(S_t,S'_t)_{t\in T}$ such that

$S_t\subset\Omega$, $S'_t\subset\partial\Omega$ are Borel sets,

$\chi_{S_t}\in BV(\Omega)$,

$H_{n-1}(A-S'_t)=H_{n-1}(S'_t\cap B)=0$

for each $t\in T$.

命題３．(MC(I)) の値と (RMC(I)) の値は一致する．

命題４．正数 r が存在して $\bigcap_{x\in\Omega}\Gamma_t(x)\supset B(0,r)$ $(\forall t)$ が成り立つとすると(RMC(I))は最適解をもつ．

文 献

〔1〕 M.Iri: Survey of Math. Prog. edited by A.Prekopa, North-Holland, 1979.

〔2〕 G.Strang: Math.Prog.26 (1983), 123-143.

〔3〕 R.Kohn and R.Temam: Appl.Math.Optim.10 (1983), 1-35.

〔4〕 W.Mazja: Sobolev spaces, Springer-Verlag, 1985.