数理解析研究所講究録
第680巻 1989年 89-96

ロボット制御の微分方程式の固有値問題

埼玉大学理学部　辻岡邦夫　(Kunio Tsujioka)

ロボットの制御において，材質の軽量化，省エネルギー化のため，アームの弾力性は重要である。アームの運動が粘性項を持つ双曲型微分方程式の初期値境界値問題

(1) $u_{tt}(x,t)+2\delta\alpha u_{txxxx}(x,t)+\alpha u_{xxxx}(x,t)$

$\quad = g(x)f(t) \qquad (0<x<1,\ t>0)$

(2) $u(0,x)=a(x),\quad u_t(0,x)=b(x) \qquad (0<x<1)$

(3) $u(0,t)=u_x(0,t)=u_{xx}(1,t)=u_{xxx}(1,t)+(m/\rho)u_{xxxx}(1,t)=0$

で表される場合を考える。mはアーム先端の集中荷重，ρはアームの線密度，δは粘性定数で，$\alpha=EI/\rho$とし，Eはアームのヤング率，Iは断面の二次モーメントである。$f(t)$はアームの回転角加速度，$g(x)$は固定された関数とする。アームの運動は$f(t)$を通して制御される。境界条件(3)における$(m/\rho)u_{xxxx}(1,t)$なる項が，アーム先端に強い効果を及している(坂和[1])。境界条件

$$u(0)=u'(0)=u''(1)=u'''(1)+k\,u''''(1)=0 \quad (k=m/\rho)$$

を満たす関数 u に対して

$$A(k)u=u''''$$

とおくことにより，(1)－(2)－(3) を $L^2(0,1)$ における 2 階の発展方程式の初期値問題

(4) $\quad d^2u/dt^2+2\delta\alpha A(k)du/dt+\alpha A(k)u=gf(t)$

(5) $\quad u(0)=a,\ u_t(0)=b$

で表す。$g=g(x)$, $a=a(x)$, $b=b(x)$ は $L^2(0,1)$ の関数である。境界条件と作用素 $A(k)$ の階数が等しいので，$A(k)$ の扱いには注意を要する。$A(k)$ の厳密な定義は後で与えるが，その前に，固有値問題

(6) $\quad u''''(x)-\lambda u(x)=0,\quad 0\leqq x\leqq 1$

を次の境界条件のもとで考える。

(7) $0<k<\infty$ のとき $\quad u(0)=u'(0)=u''(1)=u'''(1)+ku''''(1)=0$

$k=\infty$ のとき $\quad u(0)=u'(0)=u''(1)=u(1)=0$

$k=\infty$ の場合の境界条件は，形式的に $k<\infty$ の場合の極限である。すなわち

$$u'''(1)+ku''''(1)=0$$

の両辺を k で割って $k\to\infty$ とすると

$$u''''(1)=\lambda u(1)=0$$

から，$u(1)=0$ を得るからである。$k=\infty$ の場合，$L^2(0,1)$

における作用素 $A(\infty)$ を次のように定義する。

$D(A(\infty))=\{u\in L^2(0,1);\ u(0)=u'(0)=u''(1)=u(1)=0\}$。

$A(\infty)$ は $L^2(0,1)$ における正値自己共役作用素であり，その固有値，固有関数は次のように与えられる。

<u>定理1</u>　作用素 $A(\infty)$ の固有値は (6)−(7) の固有値であり，次の (8)−(9) を満たす $\omega_n(\infty)$ を用いて $\lambda=\omega_n(\infty)^4$ $(n=1,2,\cdots)$ で表される。

(8)　$\omega_n(\infty)\in(n\pi,(n+\frac{1}{2})\pi)$

(9)　$\sinh(\omega_n(\infty))\cos(\omega_n(\infty))-\cosh(\omega_n(\infty))\sinh(\omega_n(\infty))=0$。

対応する固有関数 $\psi_n(\infty)=\psi_n(\infty,x)$ が

$$\psi_n(\infty,x)=\cosh(\omega_n(\infty)x)-\cos(\omega_n(\infty)x)$$
$$-\gamma_n(\infty)(\sinh(\omega_n(\infty)x)-\sin(\omega_n(\infty)x))$$
$$\gamma_n(\infty)=(\cosh(\omega_n(\infty))+\cos(\omega_n(\infty)))/(\sinh(\omega_n(\infty))$$
$$+\sin(\omega_n(\infty)))$$

で与えられる。$\psi_n(\infty)$ を $L^2(0,1)$ で正規化した $\varphi_n(\infty)$ は $L^2(0,1)$ の完全正規直交系である

$0<k<\infty$ のときを調べる。

<u>定理2</u>　(i) $0<k<\infty$ のとき，(6)−(7)の固有値は次の (10)−(11) を満たす $\omega_n(k)$ を用いて $\lambda=\omega_n(k)^4$ $(n=0,1,2,\cdots)$ と表される。

(10)　$\omega_n(k)\in(n\pi,(n+\frac{1}{2})\pi)$

(11) $1+\cosh(\omega_n(k))\cos(\omega_n(k))$

$+k\,\omega_n(k)(\sinh(\omega_n(k))\cos(\omega_n(k))-\cosh(\omega_n(k))\sin(\omega_n(k)))$

$=0$

対応する固有関数 $\psi_n(\infty)=\psi_n(\infty,x)$ が

$$\psi_n(k,x)=\cosh(\omega_n(k)x)-\cos(\omega_n(k)x)$$

$$-\gamma_n(k)(\sinh(\omega_n(k)x)-\sin(\omega_n(k)x))$$

$$\gamma_n(k)=(\cosh(\omega_n(k))+\cos(\omega_n(k)))/(\sinh(\omega_n(k))+\sin(\omega_n(k)))$$

で与えられる。

(ii) $\psi_n(k)$ は $L^2(0,1)$ では直交しないが，次の意味で直交性が成立する。 $H=L^2(0,1)\times\mathbb{R}$ に内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を

(12) $\langle\{u,\alpha\},\{v,\beta\}\rangle=(u,v)+k\alpha\beta$

で，入れると $\{\psi_n(k),\psi_n(k,1)\}$ は H で直交する。

(13) $\langle\{\psi_n(k),\psi_n(k,1)\},\{\psi_m(k),\psi_m(k,1)\}\rangle=0\ (m\neq n)$

$\omega_n(k)$, $\psi_n(k)$ の n, k についての性質を調べる。

<u>定理 3</u>　(i) $0<\omega_n(\infty)-(n+\frac{1}{4})\pi\leqq 2\exp(-2n\pi)$

$(n=1,2,\cdots)$

(ii) $n\pi<\omega_n(\infty)<\omega_n(k)<(n+\frac{1}{2})\pi\quad(n=1,2,\cdots)$

(iii) 任意の $k_0>0$ に対し，C_1, C_2 が存在して

$$0<\omega_n(k)-\omega_n(\infty)\leqq C_1(k(n+1))^{-1}$$

$$|\psi_n(k,x)-\psi_n(\infty,x)|\leqq C_2(k(n+1))^{-1}$$

$(k_0\leqq k<\infty,\ \omega_0(\infty)=0,\ \psi_0(\infty,x)=0,\ n=0,1,2,\cdots)$

これより，とくに　$\omega_n(k) \to \omega_n(\infty)$, $\varphi_n(k,x) \to \varphi_n(\infty,x)$
$(k \to \infty,\ n=1,2,\cdots)$

$\omega_0(k) \longrightarrow 0$,　$\varphi_0(k,x) \longrightarrow 0$　$(k \to \infty)$

$k \to \infty$ のとき $\varphi_0(k)$は「退化」し $\{\varphi_n(k)\}$ $(n=1,2,\cdots)$ が $L^2(0,1)$ で基底をなす。すなわち

<u>定理４</u>　ある $k_1 > 0$ が存在して，$k_1 \leqq k < \infty$ のとき，$\{\varphi_n(k)\}$ $(n=1,2,\cdots)$ は $L^2(0,1)$ でリース基底をなす。

$k_1 \leqq k < \infty$ のとき，任意の $u \in L^2(0,1)$ に対し，u の $x=1$ での trace を

(14)　$$\tau u(1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(k,1)$$

とおく。たゞし $u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(k)$ である。(14)の右辺の収束は $\{\varphi_n(k), \varphi_n(k,1)\} \in H$ にベッセルの不等式を適用すれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(k,1)^2 < \infty$$

を得ることから分かる。作用素 $A(k)$ を次のように定義する。

$$\begin{cases} D(A(k)) = \{u \in H^2(0,1)\,;\ u(0)=u'(0)=u''(1)=u'''(1)+ \\ \qquad\qquad k\tau u''''(1)=0\} \\ A(k)u = u'''' \quad (u \in D(A(k))). \end{cases}$$

$\{\varphi_n(k)\}$ を用いて，$A(k)$ は次のように表される。

<u>定理５</u>　$D(A(k)) = \{u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \varphi_n(k)\,;\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 n^8 < \infty\}$

$$A(k)u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \omega_n(k)^4 \psi_n(k), \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \psi_n(k)$$

この定理を用いれば(4)−(5)が固有関数展開で解ける。

定理6　$a \in D(A(k))$, $b \in L^2(0,1)$ のとき (4)−(5)の解は

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\, \psi_n(k)$$

の形で得られる。たゞし $u_n(t)$ は次の常微分方程式の初期値問題の解である。

$$\begin{cases} u_n''(t) + 2\delta\alpha\,\omega_n(k)^4 u_n'(t) + \alpha\,\omega_n(k)^4 u_n(t) = g_n f(t) \\ u_n(0) = a_n, \quad u_n'(0) = b_n \end{cases}$$

たゞし, $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \psi_n(k)$, $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(k)$, $b = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \psi_n(k)$ とする。

定理7　$f = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| n^4 + |b_n| n^2) < \infty$ のとき, 上の解は, 境界条件

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u_{xx}(1,t) = u_{xxx}(1,t) + k u_{xxxx}(1,t) = 0$$

を満たす。

注1　坂和−松野−福島([1])は(1)−(3)を解くため(12)を内積とするヒルベルト空間を考え, 固有関数展開を用いた. $\{\psi_n(k), \psi_n(k,1)\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ をHで正規化したものを同じ記号でかく. $\{\psi_n(k), \psi_n(k,1)\}$ $(n = 0, 1, \cdots)$ はHにおける正規直交系である。

任意の $u \in L^2(0,1)$ に対し $\{u, \tau u(1)\} \in H$ は，
$\{\varphi_n(k), \varphi_n(k,1)\}$ $(n=1,2,\cdots)$ で展開できる．

注2 任意の $k>0$ に対して，$\varphi_n(k)$ $(n=1,2,\cdots)$ が $L^2(0,1)$ でリース基底をなすかどうかは，目下不明である。

注3 境界条件

$0<k<\infty$ のとき $\quad u(0)=u'(1)+ku''(1)=0$

$k=\infty$ のとき $\quad u(0)=u(1)=0$

を満たす関数 u に対し

$$A(k)u=-u''$$

とおけば，(1)は粘性項付き波動方程式となる．上と同様の考察をすれば

$k=\infty$ のとき

固有値 $\omega_n(\infty)^2=(n\pi)^2$，固有関数 $\varphi_n(\infty,x)=\sin\omega_n(\infty)x$
$(n=1,2,\cdots)$

$0<k<\infty$ のとき

固有値 $\omega_n(k)^2$，固有関数 $\varphi_n(k,x)=\sin\omega_n(k)x$
$(\omega_0(k)<\omega_1(k)<\cdots<\omega_n(k)<\cdots)$

をもち

$k\to\infty$ のとき $\quad \omega_n(k)\longrightarrow\omega_n(\infty)=n\pi$
$(n=0,1,\cdots)$．

Non-harmonic Fourier Series に関する理論を

使うと，任意の $k>0$ に対して，$\psi_n(k)$ $(n=1,2,\cdots)$ が $L^2(0,1)$ でリース基底をなすことが分かり，(1) が固有関数展開により解ける。

文献

[1] 坂和愛幸，分布定数系としてのロボットアームの弾性振動の安定化制御，昭和60年度科学研究費補助金(一般研究(B))研究成果報告書，昭和61年3月