数理解析研究所講究録
第 680 巻 1989 年 97-106

On sequences of random indices satisfying random limit theorem

福岡大・理　杉万郁夫（Ikuo Sugiman）

§1　導入

同じ確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に定義された実数値確率変数の列 $\{Y_n\}$ と正整数値確率変数の列 $\{\tau_n\}$ が与えられているとき、$(Y_{\tau_n})(\omega) = Y_{\tau_n(\omega)}(\omega)$ で定義される $\{Y_{\tau_n}\}$ を、確率添字（random index）を伴った確率変数列と呼ぶ。また、通常の極限定理、即ち、$\{Y_n\}$ とその極限分布の分布関数 $F(x)$ が与えられ（$Y_n \xrightarrow{d} F(x)$）、$\{\tau_n\}$ が ∞ に確率収束する（$\tau_n \xrightarrow{P} \infty$）とき、$\{Y_{\tau_n}\}$ の分布も $F(x)$ に収束することを、確率添字を伴った極限定理（random limit theorem, RLT）と呼び、この為に求められる $\{Y_n\}$ と $\{\tau_n\}$ に関する条件が研究されてきた。

従来の RLT に対する条件は二つに大別することができる。一方は、二つの確率変数の列 $\{Y_n\}$ と $\{\tau_n\}$ の間の独立性が RLT が成立する為の十分条件であることに着目し、この独

立性を弱めることで、その適用範囲を拡大しようとするものである。しかし、この議論は、RLTの最も重要な応用分野である逐次推定法における停止規則について考えるとき、$\{Y_n\}$の観測が殆んど活かされていない停止規則を考えることを意味し、結果にどれほどの意義があるのか疑問がある。この為、この独立性に関する研究は、RLTの研究の初期に行われただけであった。他方、$\{Y_n\}$と$\{\tau_n\}$の間の独立性に関する仮定を全く設けず、$\{Y_n\}$と$\{Y_{\tau_n}\}$の差を直接評価する為の条件は、有名なAnscombe条件以来、現在まで、数多くの設定の下に議論されてきた。これらのRLTの十分条件は、確率論的には強い条件に見えるが、$\{\tau_n/n\}$が定数に確率収束する場合には弱められないことが知られている。又、応用では、設定や条件を一般化することにより、数多くのrandom CLT(中心極限定理)を導くことができる。

ここでは、前者の$\{Y_n\}$と$\{\tau_n\}$の間の独立性の条件について、RLTの特殊性を用いた拡張を与えることを目的とする。この独立性の条件は、RLTのある必要十分条件に基くものであるが、一般の確率変数の独立性と比較すると、独立性と呼べない程弱い条件である。また、この独立性の条件はAnscombe条件との関連も強いものである。

この報告を通じて、次のことを仮定する。

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ；確率空間

$\{Y_n\}$ ；$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された実数値確率変数の列

$\{\tau_n\}$ ；$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された正整数値確率変数の列

（仮定）　$\tau_n \xrightarrow{P} \infty$

〈注〉 $\{Y_n\}$ の分布の収束性は必ずしも仮定しない。このことは、逐次推定法の停止規則の妥当性を示す場合、漸近的に $\{Y_n\}$ と $\{Y_{\tau_n}\}$ の分布が近づくことがRLTと同様な意味を持つと考えられるからである。

§2　$\{Y_n\}$ と $\{\tau_n\}$ の間の独立性について

まず、RLTの十分条件として求められる $\{Y_n\}$ と $\{\tau_n\}$ の間の独立性を明確にする為に、次のRLTの必要十分条件を与える。

<u>定理 2-1</u>

$Y_n \xrightarrow{d} F(x)$, $\tau_n \xrightarrow{P} \infty$ のとき、次の (i)～(iii) は同値である。

(i) $Y_{\tau_n} \xrightarrow{d} F(x)$ (random limit theorem)

(ii) 任意の $x \in C(F)$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \phi(\{Y_k \le x\}, \{\tau_n = k\}) = 0$$

(iii) 任意の $x \in C(F)$ に対して、正整数列 $\{l = l(n,k)\}$ で

・ $\lim_{n,k\to\infty} l(n,k)=\infty$ （即ち、任意の正整数Lに対して、

$n\geq N$, $k\geq K$ ならば $l\geq L$ となる N,Kが存在する。）

かつ

・ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\{P(Y_k\leq x,\tau_n=k)-P(Y_l\leq x)P(\tau_n=k)\}=0$

を満たすものが存在する。

但し、C(F) は分布関数 F(x)の連続点全体の集合を表し、

$\phi(A,B)=P(A\cap B)-P(A)P(B)$ とする。

ここで、(ii)の条件が、集合列 $\{Y_k\leq x\}$ と Ω の可算分割の列 $\{\tau_n=k\}$ の漸近的独立性であるが、従来の

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|\phi(\{Y_k\leq x\},\{\tau_n=k\})|=0$$

と異なり、確率変数列の漸近的独立性や事象列の独立性などより本質的に弱い条件である。又、この条件は、$\tau_n \xrightarrow{P} \infty$ より、kについても漸近的なものに弱めることができる。条件(iii)は、(ii)の“$\sum_{k=1}^{\infty}P(Y_k\leq x)P(\tau_n=k)$”の部分の評価では、$\{Y_k\leq x\}$ のkと $\{\tau_n=k\}$ のkが一致している必要がないことを意味している。

以上のことから、次のような独立性を定義する。ここでは従来の種々の独立性と区別する為に、“分割独立（$\mathcal{D}$-独立）”と呼ぶ。また、定義は、導入で述べたAnscombe条件の発展である確率添字の ε-近似と組みあわせて用いることができるよう

に、$\varepsilon > 0$ を固定して、"ε-独立"という形で述べる。

定義 2-2

λ；$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された実数値確率変数

$\mathcal{P}(\lambda)$；$\sigma(\lambda)$-可測な Ω の可算分割全体のなす族

とする。このとき、λ が $x(\in \mathbb{R})$ で $\{Y_n\}$ と ε-分割独立であるとは、正整数 M が存在して、任意の $\{A_k\} \in \mathcal{P}(\lambda)$ と任意の $\inf_k m_k \geq M$ を満たす正整数の列 $\{m_k\}$ に対して、次の条件を満たす数列 $\{l = l(k)\}$ が存在することである。

(イ) $\lim_{k \to \infty} l(k) = \infty$ かつ

(ロ) $\left| \sum_{k=1}^{\infty} \{ P(Y_{m_k} \leq x, A_k) - P(Y_l \leq x) P(A_k) \} \right| < \varepsilon$

定義 2-3

$\{\tau_n\}$ が $x(\in \mathbb{R})$ で $\{Y_n\}$ と一様に ε-分割独立であるとは、正整数 M が存在して、任意の $\inf_k m_k \geq M$ を満たす正整数の列 $\{m_k\}$ に対して、次の条件を満たす正整数列 $\{l = l(n,k)\}$ が存在することである。

(イ) $\lim_{n,k \to \infty} l(n,k) = \infty$ かつ

(ロ) $\overline{\lim_{n \to \infty}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \{ P(Y_{m_k} \leq x, \tau_n = k) - P(Y_l \leq x) P(\tau_n = k) \} \right| < \varepsilon$

定義 2-3 の条件(ロ)が成り立つとき、十分大きな n に対し、

τ_n は定義 2-2 の条件(ロ)を満たすが、逆は成り立たない。定義 2-3 では、正整数 M が n に関して一様にとれることが重要である。又、定義 2-3 の条件(イ)を仮定しても、例えば、$l(n,k) \equiv a_n$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ のような場合に定義 2-2 の条件(イ)は成り立たない。しかし、この例は、Anscombe 条件との関連から興味深いものである。

定義 2-2 と 2-3 では、“$Y_n \xrightarrow{d} F(x)$” が仮定されている場合には、任意の $x \in C(F)$ について条件が成り立つとき、“x で” を省略する。又、“ε-独立” の定義と同様に、任意の $\varepsilon > 0$ について条件が成り立つとき、単に、“(一様に)分割独立である” と定義する。

次に、この独立性の下で導かれるRLTを述べる。勿論、この定理は、従来の様々な独立性の下で導かれたRLTを含む結果である。

<u>定理 2-4</u>

$Y_n \xrightarrow{d} F(x)$, $\tau_n \xrightarrow{P} \infty$ のとき、$\{\tau_n\}$ が $\{Y_n\}$ と一様に分割独立ならば、$Y_{\tau_n} \xrightarrow{d} F(x)$ が成り立つ。

(証明)

任意に $x \in C(F)$ と $\varepsilon > 0$ をとり、固定する。$Y_n \xrightarrow{d} F(x)$ より、

$$k, l \geq L \longrightarrow | P(Y_k \leq x) - P(Y_l \leq x) | < \varepsilon$$

となる正整数 L が存在する。また、一様な分割独立性より正整数 M_1, N_1, K が存在して、$\{m_k = \max\{k, M_1\}\}$ とおくと、$n \geq N_1$ のとき、

$$k \geq K,\ m \geq L \rightarrow |P(Y_k \leq x) - P(Y_\ell \leq x)| < \varepsilon$$

$$\text{かつ}\quad \left|\sum_{k=1}^{\infty}\{P(Y_{m_k} \leq x, \tau_n = k) - P(Y_\ell \leq x)P(\tau_n = k)\}\right| < \varepsilon$$

を満たす正整数列 $\{\ell = \ell(n,k)\}$ が存在する。

ここで、$\tau_n \xrightarrow{P} \infty$ より、$M = \max\{M_1, L, K\}$ とおくと、

$$n \geq N \rightarrow P(\tau_n < M) < \varepsilon$$

となる $N(\geq N_1)$ がとれる。よって、$n \geq N$ のとき

$$\left|\sum_{k=M}^{\infty}\{P(Y_k \leq x, \tau_n = k) - P(Y_\ell \leq x)P(\tau_n = k)\}\right| < 3\varepsilon$$

$$\therefore \left|\sum_{k=M}^{\infty}\phi(\{Y_k \leq x\}, \{\tau_n = k\})\right| < 4\varepsilon$$

$$\therefore \left|\sum_{k=1}^{\infty}\phi(\{Y_k \leq x\}, \{\tau_n = k\})\right| < 6\varepsilon$$

故に、定理 2-1 から、$Y_{\tau_n} \xrightarrow{d} F(x)$ が示せた。

§3　$\{Y_n\}$ と一様に分割独立な $\{\tau_n\}$ について

まず、RLT から見ると自明な仮定である $Y_n \equiv Y_F$ の場合について考える。ここに、Y_F は $F(x)$ を分布関数として持つある $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数とする。このときは、任意の確率添字 τ についても、$Y_\tau = Y_F$ より、任意の確率添字の列 $\{\tau_n\}$ に対して RLT が成り立つので、$\{\tau_n\}$ と Y_F の確率変数としての独立性は成り立たない。従来は、この例について

Anscombe 条件の設定を一般化して説明してきた。しかし、この例は、定理2-4の例で、$\{l = l(n,k)\}$ は $\lim_{n,k\to\infty} l(n,k) = \infty$ を満たす任意の正整数列でよい。

次に、定義2-2と2-3の関連を示す定理を述べる。

定理3-1

λ が $x(\in \mathbb{R})$ で $\{Y_n\}$ と ε-分割独立であるとき、$\{\tau_n\}$ が $\sigma(\lambda)$-可測な正整数値確率変数の列ならば、$\{\tau_n\}$ は x で $\{Y_n\}$ と一様に ε-分割独立である。

この定理では、$\{l = l(n,k)\}$ は、同じ $\{m_k\}$ に対して定義2-2できまる正整数列 $l(k)$ を用いて、$l(n,k) \equiv l(k)$ ととればよい。

定理3-2

任意の $A \in \sigma(\lambda)$（但し、$0 < P(A) < 1$）に対して、条件付確率 $P_A(Y_n \leq x)$ が収束すれば、λ は x で $\{Y_n\}$ と分割独立である。

この定理の条件は、一般の確率変数 λ に対しては強いものであるが、λ が離散形のときは、(Y_n, λ) の同時分布の収束より弱い条件となる。また、一般の確率変数 λ についても、$Y_n \xrightarrow{d} F(x)$ が mixing 又は stable なとき、離散形の確率変

数の列 $\{\lambda_n\}$ を用いて、λ を近似することが有効な場合が多い。

この定義 2-3 は、従来の独立性の条件の拡張になっていることは明らかであるが、最後に、導入で述べた Anscombe 条件の様々な一般化との関連を述べる。Anscombe 条件は、設定や一般化の方法で様々な変形を持つが、基本的な考え方は

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad かつ \quad Y_{\tau_n} - Y_{a_n} \xrightarrow{P} 0$$

を満たす正整数列 $\{a_n\}$ の存在の十分条件を与えることであるが、この条件は、任意の $x \in C(F)$ と $\varepsilon > 0$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad かつ \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| P(Y_{\tau_n} \le x) - P(Y_{a_n} \le x) \right| < \varepsilon$$

という条件で置きかえることができる。ここで、定義 2-3 で $M = 1$, $\{m_k = k\}$, $l(n,k) \equiv a_n$ とおくと、この条件は定義 2-3 の条件 (イ),(ロ) に他ならない。

参考文献

[1] Aldous, D. "Weak convergence of randomly indexed sequences of random variables" Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 83 (1978)

[2] Aldous, D. & Eagleson, G.K. "On mixing and stability of limit theorems" Ann. Probability 6 (1978)

[3] Anscombe, F. J. "Large sample theory of sequential estimation" Proc. Cambridge Philos. Soc. 48 (1952)

[4] Dorea, C.C.Y., David, H.T. & Werner, N.M. "Uniform ε-independence and the convergence in distribution of randomly indexed sequences" Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 96 (1984)

[5] Sugiman, I. "A random CLT for dependent random variables" J. Multivariate Anal. 20 (1986)

[6] Sugiman, I. "On a stochastic version of the Anscombe condition" Bull. Cent. Res. Inst. Fukuoka Univ. 104 (1988)