数理解析研究所講究録
第 680 巻 1989 年 155-163

多目的スケジューリング問題

大阪大学工学部　石井　博昭（ Hiroaki Ishii ）
大阪大学工学部　多田　　実　（ Minoru　Tada ）
追手門学院大学　益田　照雄（ Teruo　Masuda ）
大阪大学工学部　西田　俊夫（ Toshio Nishida ）

1．はじめに

これまで、ほとんどのスケジューリング問題は単一の目的関数を扱ってきた。しかしスケジューリング問題においても複数の目的関数を考え、ある基準に従ってバランスあるスケジュールを求めることがより現実的である場合も多いと考えられる。この様な問題を多目的スケジューリング（multicriteria scheduling）問題と呼ぶ。一般にある目的関数に対して”最適である”ものが、他の基準においては”最悪である”かもしれない。それゆえ、ある目的関数に対して”最適でない”ものが他の基準においては、ある意思決定者（以下ＤＭと書く）にとって満足のいくものであれば、そのＤＭはそれを”よいもの”と考えるかもしれない。ここに多目的問題の難しさがあり、単一の目的関数でも最適解を求めることが困難なスケジューリング問題においては、”多目的”といっても実際はほとんどが”二目的スケジューリング問題”（bicriteria scheduling problem）になる。以下に最近研究された二目的スケジューリング問題の例を挙げる。

Van WassenhoveとGeldens［８］は一機械上でｎ個の仕事を平均滞留時間

と最大納期遅れを同時に最小化するスケジューリング問題を考えた。V. Wassen-hoveとBaker［７］は配分コスト（resource allocation costs）と最大完了時間ペナルティ（maximum completion penalty）を同時に最小化するスケジューリングを考えた。（この他にも［５］、［３］などがある。）

この様に、多目的スケジューリング問題では、これまでほとんど一機械の場合が考えられてきた。今回、我々は”二機械オープンショップ”と”一様機械”上で最大完了時間Ｃmax、最大納期ずれＬmaxを二つの目的関数として考える多目的スケジューリングを取り扱う。そこでは、各スケジューリングに対してそのＣmax、Ｌmaxを成分にもつベクトルを考え、このベクトルを基にして非劣スケジュールを定義し、これらの多目的スケジューリング問題を解く。

２．二機械オープンショップ多目的スケジューリング問題

２．１　二機械オープンショップスケジューリング問題

まず最初に、通常の（すなわち多目的でない）二機械オープンショップスケジューリング問題に関して以下のように仮定し、その後すでに解かれているＣmax最小化問題とＬmax最小化問題を簡単に紹介する。

２台の機械M1、M2 とこれらの機械で処理されるべきｎ個の仕事Ｊ1、･･･、Ｊnがあるとし、各仕事 Ｊj（１≦j≦ｎ）は各々M1、M2 で処理されるべき２つのオペレーションからなり、M1、M2での処理時間をそれぞれ a_j、b_jとする。全ての仕事はオープンショップ型、すなわちどちらの機械での処理から始めてもいいが、同一の仕事の２つのオペレーションは同時には処理できないとす

る。各仕事は分割処理可能であるが、各機械は同時には高々１つの仕事しか処理できない。また各仕事Ｊｊには納期d_jが定められている。さらにa_j、b_j、d_jは非負であるとし、一般性を失うことなく$d_1 \leqq d_2 \leqq \cdots \leqq d_n$とする。仕事Ｊｊの完了時間をＣｊで示すと、納期ずれ（lateness）Ｌｊは

$$Lj = Cj - d_j \tag{1}$$

となり、最大完了時間（maximum completion time）Ｃmaxと最大納期ずれＬmaxはそれぞれ

$$C\max = \max_j \ Cj \tag{2}$$

$$L\max = \max_j \ Lj \tag{3}$$

となる。

＜Ｃmax最小化問題＞

二機械オープンショップ問題において、最大完了時間Ｃmax を最小化するためのアルゴリズムは T. Gonzalez と S. Sahni ［１］によって与えられている。（このアルゴリズムをアルゴリズム－１とする。）ここで得られるＣmax の最小値$C\max^*$は

$$C\max^* = \max\left(T1, T2, \max_j (a_j + b_j)\right) \tag{4}$$

で与えられる。ここでＴ1、Ｔ2はそれぞれ$T1 = \Sigma_{j=1,n}\ a_j$、$T2 = \Sigma_{j=1,n}\ b_j$である。またアルゴリズム－１によるスケジュールでのＬmaxの値を$L\max^2$で示す。

＜Ｌmax最小化問題＞

最大納期遅れL_{max}を最小化するためのアルゴリズムは E. L. Lawler, J. K. Lenstra と H. J. Rinnoy Kan［4］によって与えられている。（このアルゴリズムをアルゴリズム－2とする。）ここで得られるL_{max}の最小値L_{max}^*は $A_j=\Sigma_{k=1,j}\ a_k$、$B_j=\Sigma_{k=1,j}\ b_k$ （j=1, 2, ･･･, n）、$A_0=B_0=0$として、

$$L_{max}^*=\max_j[\max\{(A_j、B_j、a_j+b_j、(A_j+B_j+Z_j')/2\}-d_j] \quad (5)$$

で与えられる。ただし、Z_j'は $Z_1'=-\infty$、$Z_j'=d_j-d_{j-1}+\max(0、Z_{j-1}'-a_{j-1}-b_{j-1})$、$j=2, \cdots, n$で逐次定められる。またこのアルゴリズムによるスケジュールのC_{max}の値をC_{max}^2で示す。実際のスケジュールは納期を各々$d_j+L_{max}^*$としてJ1, J2, ･･･, Jn の順にM1, M2 への割付を考え、納期内に納まるようにすることにより求まる。また次のように、納期が与えられたとき納期内に納まるかどうかを判定する不等式も与えられている。

$$A_j\leqq d_j'、\ B_j\leqq d_j'\ \ A_j+B_j\leqq 2d_j'-Z_j、j=1, \cdots, n$$

$$Z_j:\ Z_1=d_1'、$$

$$Z_j=d_j'-d_{j-1}'+\max(0、Z_{j-1}-a_{j-1}-b_{j-1})、\ j=2, \cdots, n \quad (6)$$

ここでd_j'は以下の多目的スケジューリング問題での納期でもとのd_jを修正したものである。

2．2　二機械オープンショップ多目的問題

多目的スケジューリング問題を考えるために、スケジュールベクトルというものを導入する。　ここでは二目的を考えるので、各スケジュールπにその$C\max^{\pi}$、$L\max^{\pi}$を成分としてもつベクトル$\mathbf{v}^1=(v_1^1, v_2^1)$、$\mathbf{v}^2=(v_1^2, v_2^2)$に対して$\leq$を

$$\mathbf{v}^1 \leq \mathbf{v}^2 \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{v}_1^1 \leqq \mathbf{v}_1^2、\ \mathbf{v}_2^1 \leqq \mathbf{v}_2^2 \text{ かつ } \mathbf{v}^1 \neq \mathbf{v}^2 \qquad (7)$$

と定義する。2つのスケジュール π_1、π_2 に対して $\mathbf{v}_{\pi 1} \leq \mathbf{v}_{\pi 2}$であるとき$\pi_1$は$\pi_2$ に対して”優越する”ということにする。優越するスケジュールが存在しないとき、そのスケジュールを非劣スケジュールという事にする。分割処理を許しているので、非劣スケジュールは無限にある可能性があるので、ここでは少なくとも対応する1つの非劣スケジュールが存在するスケジュールベクトルに対して、その1つのスケジュールをみつけることを考える。

［補題1］

非劣スケジュールベクトルを求めるにはその成分として、

$$C\max^{*} \leqq C\max^{\pi} \leqq C\max^{2}、\ L\max^{*} \leqq L\max^{\pi} \leqq L\max^{2}$$

のみを考えればよい。

［定理1］

この問題の解は

（a）もし$L\max^{*} + C\max^{*} \geqq F$　なら解は（$C\max^{*}$、$L\max^{*}$）で1点に決まる（完全解）。

（b）もし$L\max^{*} + C\max^{*} < F$　なら$L\max = -C\max + F$上の点（ただし

$C_{max} \geqq C_{max}^*$、$L_{max} \geqq L_{max}^*$）が非劣解となる。

ここでFは以下のような定数である。

$$F = \max_k (a_n + b_n + \Sigma_{l=1,k} a_l + \Sigma_{l=1,k} b_l - d_k).$$

（証明）紙面の都合上、省略。

3．一様機械多目的スケジューリング問題

3．1　一様機械スケジューリング問題

一様機械問題で取り扱う機械と仕事とは、m台の機械があり、各機械の処理速度は時間に無関係な一定の値s_i（$1 \leqq i \leqq m$）であるとする。ここで一般性を失うことなく$s_1 \geqq s_2 \geqq \cdots \geqq s_m$と仮定する。またn個の仕事に対して、異なる納期がk個ありこれをd_1、d_2、…、d_kとし、各仕事の処理必要量をt_1、t_2、…、t_mとする。ここですべてのデータは非負の整数とする。

＜Cmax最小化問題＞

一様機械問題において最大完了時間C_{max}を最小化するためのアルゴリズムは T. Gonzalez と S. Sahni［2］によって与えられていて（これをアルゴリズム－3とする）、C_{max}の最小値C_{max}^*は

$$C_{max}^* = \max [\max_j (X_j / E_j),\ X_n / E_m] \qquad (8)$$

で得られ、ここでE_j、X_jはそれぞれ$E_j = \Sigma_{i=1,j} s_i$（$1 \leqq j \leqq m$）、$X_j = \Sigma_{i=1,j} t_i$（$1 \leqq j \leqq n$）である。またここでは処理必要量t_jに対して一般性を失うことなく$t_1 \geqq t_2 \geqq \cdots \geqq t_n$であると仮定している。

＜L_{max}最小化問題＞

一様機械の場合、L_{max}の最小値を直接求める方法は存在しないが、すべての仕事を納期に間に合わせるようなスケジューリングを得るアルゴリズムはS. SahniとY. Cho［６］によって考えられている。そこで元の納期をd_j（$1 \leqq j \leqq n$）としたとき$d_j' = d_j + L$となるような新しい納期d_j'を考える。元の納期でおさまるスケジューリングが存在しなかった場合、新しい納期にすればおさまるような最小のＬを０から少しずつ増加させて探査すれば、Ｌのとりうる値が有限個であるとき、Ｌの最小値は求まることになる。

３．２　一様機械多目的スケジューリング問題

ｎ個の仕事に対して、異なる納期がｋ個あり、これを$d_1, \cdots, d_k$とし、各仕事の処理必要量を$t_1 \geqq \cdots \geqq t_n$とする。まず、アルゴリズム－３によって得られるスケジュールのC_{max}の最小値C_{max}^*を求め、そのスケジュールでのL_{max}の値をL_{max}^{u}とする。次に、一様機械の場合、L_{max}の最小値を直接求める方法は存在しないので、L_{max}の下界値L_{max}^{l}を考える。今、納期d_iをもつ仕事の番号を処理必要量の大きい方から$i(1), \cdots, i(l_i)$とし、$\mathbb{J}^i = \{J_{i(1)}, \cdots, J_{i(l_i)}\}$とする。そして$C_{max}^{i}$を$\mathbb{J}^1 \cup \cdots \cup \mathbb{J}^i$だけを考えたときの$C_{max}$の最小値とする。このとき、$L^i = C_{max}^{i} - d_i$とおくと、$L_{max}$の一つの下界値$L_{max}^{l}$として、

$$L_{max}^{l} = \max_i L^i \qquad (9)$$

を得る。また、$d_0=0$, $Xj^i=\Sigma_{h=1,i} t_{i(h)}$, $j=1, \cdots, l_i$ ($i=1, \cdots, k$)

として、

$$\Delta L_i=\begin{cases} \max_{1\le j\le l_i}\{Xj^i/Ej\}-(d_i-d_{i-1}), & \text{if } l_i<m, \\ \max\{\max_{1\le j\le m}(Xj/Ej),\ Xl_i^i/E_m\}-(d_i-d_{i-1}), & \text{if } l_i\geqq m. \end{cases} \tag{10}$$

を計算し、

$$C\max^u=dk+\Sigma_{i=1,k} L^i \tag{11}$$

とする。

［補題２］

非劣スケジュールベクトルを求めるにはその成分として、

$C\max^* \leqq C\max^\pi \leqq C\max^u$、$L\max^l \leqq L\max^\pi \leqq L\max^u$

かつ有理数で分母がＥｊ（$j=1, \cdots, m$）および整数値のみを考えればよい。

（証明）省略。

以上の議論から、非劣スケジュールを見い出す多項式時間のアルゴリズムが得られる。

References

[1] T. Gonzalez and S. Sahni, Open shop scheduling to minimize finish time, Journal of the Association for Computing Machinery,

Vol. 23(1976)665-679.

[2] T. Gonzalez and S. Sahni, Preemptive scheduling of uniform processor system, Journal of the Association for Computing Machinery, VOl. 25, No. 1(1978) 92-101

[3] K. Heckert, R. Rhode, O. Roglin and R. Weber, On the interactive solution to multi-criteria scheduling problem, Zeitschrift fur Operations Research 24(1980)47-60.

[4] E. L. Lawler, J. K. Lenstra and A. H. G. Rinnooy Kan, Minimizing maximum lateness in a two machine open shop, Math. Opr. Res. Vol. 6, No. 1(1981)153-158.

[5] F. Ruiz-Daiz and S. French, A survey on multi-objective combinatorial scheduling, in Multi-Objective Decision Making (Academic Press, London, 1983).

[6] S. Sahin and Y. Cho, Scheduling independent tasks with due times on a uniform processor system, Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. 27, No.3(1980)550-563.

[7] L. N. Van Wassenhove and K. R. Baker, A bicriterian approach to time/cost trade-offs in sequencing, European J. Opl. Res. 11 (1982)48-54.

[8] L. N. Van Wassenhove and L. F. Gelders, Solving a bi-criteroan scheduling problem, European J. Opl. Res. 4(1980)42-48