

# Optimal Search Model with a Compulsive Stop for a Randomly Arriving Target

阪大基礎工 中井暉久 (Teruhisa Nakai)

## 1 Model and Formulation

target が 1 個、時刻  $T_1$  に到着し、到着したら  $n$  個の box の 1 つに入り、以後そこに留まる。 $T_1$  は区間  $[0, \infty)$  上の分布関数  $G(t)$  に従う確率変数である。また target が box  $i (= 1, \dots, n)$  に入る確率は  $p_i$  で  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  とする。

searcher は時間区間  $[0, \infty)$  の任意の時刻に任意の box を探索できるが、探索時間の合計は  $T (< \infty, \text{given})$  を越えることができない。target が box  $i (= 1, \dots, n)$  にいる時、box  $i$  を  $t$  時間探索すれば、確率  $1 - e^{-\lambda_i t}$  ( $\lambda_i$  は所与正定数) でその target を発見する。一方、時間区間  $[0, \infty)$  上の分布関数  $F(t)$  に従う時刻  $T_2$  で強制的に stop がかかり、以後探索ができなくなるものとする。従って、探索が早すぎると、まだ target が到着していない可能性が大きいし、遅すぎるとすぐ強制 stop がかかって探索できな

くなる恐れが大きい。では、target を発見する確率を最大にするには、いつどの box をいくら割合で探索すべきか？

search policy は  $\phi = \{\phi_i(t) \mid i=1, \dots, n; 0 \leq t < \infty\}$  で表される。ここに  $\phi_i(t)$  は時刻  $t$  で box  $i$  を search する割合で、つぎの3条件を満たす。

$$(1) \quad (i) \quad \phi_i(t) \geq 0 \quad (i=1, \dots, n; 0 \leq t < \infty)$$

$$(2) \quad (ii) \quad \sum_{i=1}^n \phi_i(t) \leq 1 \quad (0 \leq t < \infty)$$

$1 - \sum_{i=1}^n \phi_i(t)$  は、時刻  $t$  でどの box をも探索しない確率である。

$$(3) \quad (iii) \quad \sum_{i=1}^n \int_0^{\infty} \phi_i(t) dt \leq T$$

$P[\phi]$  を policy  $\phi$  を用いた時の target を発見する確率とする。

$$(4) \quad P[\phi] = \sum_{i=1}^n p_i \int_0^{\infty} \lambda_i \phi_i(t) \bar{F}(t) \int_0^t \exp\left[-\lambda_i \int_s^t \phi_i(u) du\right] dG(s) dt$$

ただし  $\bar{F}(t) \equiv 1 - F(t)$  である。問題は制約 (i) ~ (iii) のもとで目的関数  $P[\phi]$  を最大にする  $\phi = \phi^*$  を求めることである。

つぎの special cases は容易に結果が出る。

(i) target が確率 1 である時刻  $t_0$  で到着するなら、 $t_0$  から  $T$  時間の間、stop のなり通常の探索モデルに対する

最適政策に従うのが optimal である。

- (ii) 強制 stop が無い場合 ( $F(t)=0$  for  $\forall t < \infty$ ) は、 $G(\tilde{\tau}) = 1$  なる時刻  $\tilde{\tau}$  を待ってから、 $T$  時間通常 of 探索モデルに対する最適政策に従うのが optimal である。 $G(\tilde{\tau}) = 1$  であるような  $\tilde{\tau} (< \infty)$  が存在しない時には漸近最適政策は存在するが最適政策は存在しない。

## 2. Necessary and Sufficient Condition for an Optimal Policy

policy  $\phi$  に対し、つぎの関数を定義する。

$$(5) K_i(t; \phi) \equiv p_i \lambda_i \bar{F}(t) \int_0^t \exp\left[-\lambda_i \int_s^t \phi_i(u) du\right] dG(s) \\ - p_i \lambda_i^2 \int_t^\infty \phi_i(w) \bar{F}(w) \int_0^t \exp\left[-\lambda_i \int_s^w \phi_i(u) du\right] dG(s) dw$$

定理 1. policy  $\phi^*$  が optimal である

$\Rightarrow$  ある関数  $\mu(t)$  が存在して

$$(6) K_i(t; \phi^*) \begin{cases} = \\ \leq \end{cases} \mu(t) \quad \text{if } \phi_i^*(t) \begin{cases} > \\ = \end{cases} 0$$

i.e. 探索すべき box では  $K_i(t; \phi^*)$  が最大になっている。

定理 1 は探索理論ではよく現われる型の (最適政策の) 必要条件ではあるが、十分条件にはなり得ない。(例えば "1-box case" では、任意の policy  $\phi$  に対し、 $\mu(t) = K(t; \phi)$  とおくと

(6) 式が成立するから、任意の政策が最適となってしまう。) )

定理2.  $\phi^*$  は policy であるとする.

$\phi^*$  が optimal である.

$\iff$  ある定数  $\mu$  が存在して

$$(7) \quad \phi_i^*(t) = \begin{cases} 1 \\ \text{適当} \\ 0 \end{cases} \quad \text{if } K_i(t; \phi^*) \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \mu$$

ここに“適当”の値と  $\mu$  とは  $\sum_{i=1}^n \int_0^{\infty} \phi_i^*(t) dt = T$  を満たすように任意に決められるものである。

定理2の意味

(8)  $K_i(t; \phi) = p_i \lambda_i \pi_i(t; \phi)$  とおくと

$\pi_i(t; \phi) =$  到着すれば box  $i$  に入るとの条件のもとで、target が  $t$  迄に到着し、 $t$  迄 stop もがからず発見もされないので、 $t$  以後も発見されないので、確率

を表している。そこで

$$(9) \quad p_i(t; \phi) \equiv p_i \pi_i(t; \phi) / \sum_{j=1}^n p_j \pi_j(t; \phi) \quad \text{for } \forall i, \forall t$$

とおくと

$p_i(t; \phi) =$  target が  $t$  迄に到着し、 $t$  迄 stop もがからず発見もされないので、 $t$  以後も発見されないので、という条件のもとで、target が box  $i$  に存在する確率

となる。このとき

$$(10) \quad K_i(t; \phi) \propto p_i(t; \phi) \lambda_i$$

(右辺は、時刻  $t$  における box  $i$  での条件付発見率)

であるから、定理2は「大雑把につき」のことを示している。

「policy が最適である為の必要十分条件は、各時刻で条件付発見率がある一定値以上の box のみを探索することである。」

これは、Brown (1980) が、移動目標物、離散時間のモデルで示したのと類似の内容である。

### 3. Approximately Optimal Policy

policy  $\phi = \{\phi_i(t)\}$  は total search time  $T$  の関数だから、これを  $\phi^T = \{\phi_i^T(t)\}$  と表すことにする。

定理3. 任意の  $i, t$  に対し、最適政策  $\phi_i^T(t)$  は  $T$  に関する非減少関数である。

#### \* Algorithm for an Approximately Optimal Policy

(i)  $m$  を十分大きくとり、 $\Delta \equiv T/m$  とおけ。

(ii)  $\phi_i^0(t) \equiv 0$  for  $\forall i, \forall t$  とおき、第1 step から始めよ。

(iii) 第  $k$  ( $= 1, \dots, m$ ) step では、

$$(ii) \quad \mu_k \equiv \sup \left\{ \mu \mid \int_{\{t \mid K(t; \phi^{k-1}) \geq \mu\}} dt \geq k\Delta \right\}$$

$$(12) \quad \text{where } K(t; \phi^{k-1}) \equiv \max_{1 \leq j \leq n} K_j(t; \phi^{(k-1)\Delta})$$

とおき、集合  $S$  をつぎの2条件

$$(13) \quad (a) \quad S \subset \{t \mid K(t; \phi^{k-1}) = \mu_k\}$$

$$(14) \quad (b) \quad \int_{\{t \mid K(t; \phi^{k-1}) > \mu_k\} \cup S} dt = k\Delta$$

を満たすように任意にとり、policy  $\phi^{k\Delta}$  をつぎのように定義せよ。

$$(15) \quad \phi_i^{k\Delta}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } K_i(t; \phi^{(k-1)\Delta}) = K(t; \phi^{k-1}) \\ & \text{and } t \in \{t \mid K(t; \phi^{k-1}) > \mu_k\} \cup S \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$(iv) \quad k \begin{cases} < \\ = \end{cases} m \implies \begin{cases} \text{step } \wedge \text{進め.} \\ \text{stop せよ. } \phi^{m\Delta} \text{ が求める近似解である.} \end{cases}$$

#### 4. One-Box Case ( $n=1$ )

このとき、問題はつぎのようになる。

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} P[\phi] = \int_0^\infty \lambda \phi(t) \bar{F}(t) \int_0^t \exp\left[-\lambda \int_s^t \phi(u) du\right] dG(s) dt \longrightarrow \max_{\phi} \\ \text{subject to} \\ \int_0^\infty \phi(t) dt \leq T, \quad 0 \leq \phi(t) \leq 1 \quad \text{for } \forall t \in [0, \infty) \end{array} \right.$$

定理4.  $n=1$  の時、つぎのように定義される policy  $\phi^*$  は optimal である:

$$(17) \mu^* \equiv \sup \left\{ \mu \mid \int_{\{t \mid \lambda \bar{F}(t)G(t) \geq \mu\}} dt \geq T \right\}$$

とおき. 集合  $S$  を 2 条件

$$(18) (a) S \subset \{t \mid \lambda \bar{F}(t)G(t) = \mu^*\}$$

$$(19) (b) \int_{\{t \mid \lambda \bar{F}(t)G(t) > \mu^*\} \cup S} dt = T$$

を満たすように任意にとる. この時. policy  $\phi^*$  を

$$(20) \phi^*(t) \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } t \in \{t \mid \lambda \bar{F}(t)G(t) > \mu^*\} \cup S \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義する.

<Example>

$n=1$ ,  $\lambda$  と  $T$  は任意とする.

$$(21) G(t) = \begin{cases} 1/2 & (0 \leq t < 1/2) \\ 1 & (1/2 \leq t) \end{cases}, \quad F(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq 1) \\ 1 & (1 \leq t) \end{cases}$$

の case を考える. このとき

$$(22) \lambda \bar{F}(t)G(t) = \begin{cases} \lambda(1-t)/2 & (0 \leq t < 1/2) \\ \lambda(1-t) & (1/2 \leq t \leq 1) \\ 0 & (1 \leq t) \end{cases}, \quad \mu^* = \frac{\lambda}{6}(3-2T)$$

であるから. 定理 4 より optimal policy は つぎのように与えられる.

$0 \leq T \leq 3/4$  のとき

$$(23) \quad \phi^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \in [0, \frac{2T}{3}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{T}{3}] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$3/4 \leq T$  のとき

$$(24) \quad \phi^*(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & (T < t) \end{cases}$$

[注] (i) optimal policy は  $\lambda$  に関係しない。

(ii) optimal search time region が connected にはならないことがある。

## References

- [1] A. Barnett ; Opns. Res., Vol. 24 (1976), No. 3, 438-451
- [2] N. M. Blachman ; Nav. Res. Log. Quart., Vol. 6 (1959), 273-281
- [3] N. M. Blachman and F. Proschan ; Opns. Res., Vol. 7 (1959),  
No. 5, 625-638
- [4] K. Chelst ; Nav. Res. Log. Quart., Vol. 28 (1981), No. 3, 407-422
- [5] T. Nakai ; J. Opns. Res. Soci. Japan, Vol. 25 (1982), No. 2, 175-192
- [6] S. M. Pollock ; Manag. Sci., Vol. 13 (1967), No. 7, 454-465
- [7] L. D. Stone ; Math. Prog. Study, Vol. 6 (1976), 227-245