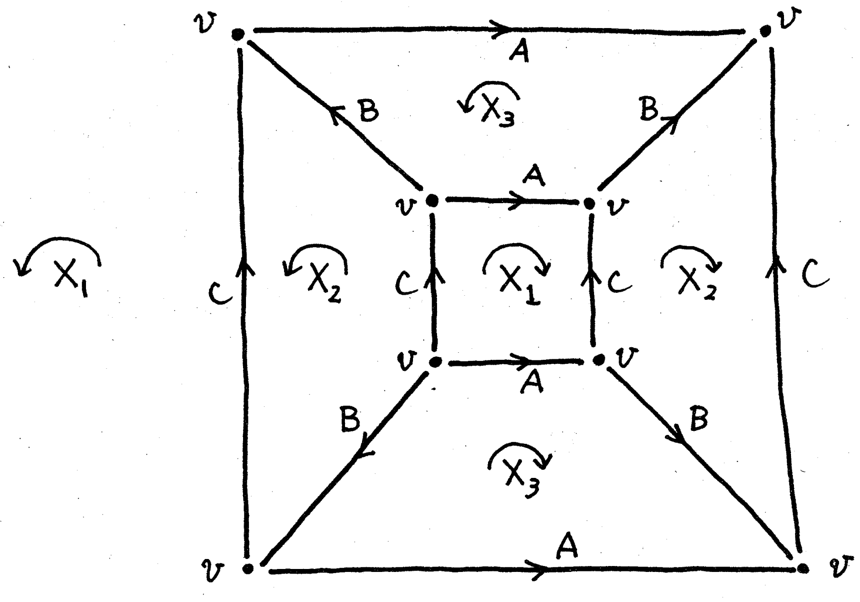
数理解析研究所講究録
第683巻 1989年 1-8

3次元多様体の多面体表示について

慶応大.理工　石井一平(Ippei ISHII)

§.0. 序

任意の閉3次元多様体 M^3 は、3次元球体 B^3 の境界 $\partial B^3 = S^2$ を適当に貼り合わせることによって得られることが知られている。例えば、立方体の対面どうしを貼り合わせて、3次元トーラス $S^1 \times S^1 \times S^1$ を表示すると、



となる。ここで、同じ名前の付いた面、辺、頂点は指定

された向きに、同一視，すなわち貼り合わせる。このような表示を、"多面体表示"と呼ぶ。上の例でわかるように、M^3 の多面体表示は、球面 S^2 上のあるグラフの面，辺，頂点の同一視を与えることによって得られる。もちろん、面，辺，頂点の同一視が、互いに整合していなければならない。（即ち、2つの面 X，Y が同一視されるならば ∂X に現われる辺達と、∂Y に現われる辺達は、X，Y に指定された向きに、同一視されなければならない、等々……）。以下、多面体表示とは、球面グラフ G と、それに付随した、同一視を与える写像 $f: S^2 \to S^2/\sim$ の組 (G, f) と考える。球面の isotopy で互いに移り合うものは同じ多面体表示と見なす。従って、上の図のような表示で、一つの多面体表示が指定されている。

そこで、$\mathcal{P}$ で多面体表示全体の集合，$\mathcal{M}_3$ で3次元閉多様体全体の集合とすると，$\varphi: \mathcal{P} \to \mathcal{M}_3$ が定まり、これは全射である。しかし、$M \in \mathcal{M}_3$ に対し、$\varphi^{-1}(M)$ は無限個ある。そこで、次の様な標準化の問題が考えられる。

問題：$\mathcal{P}$ の部分集合 $\mathcal{P}_0$ で

i) $\varphi(\mathcal{P}_0) = \mathcal{M}_3$

ii) $\#(\varphi^{-1}(M) \cap \mathcal{P}_0) = \text{finite}$ for $^\forall M \in \mathcal{M}_3$

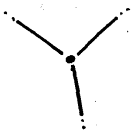
なる $\mathcal{P}_0$ を求めよ。

以下では、この標準化の試みについて述べる。

§.1. DS-diagram.

多面体表示 (G, f) が次の条件 (a)〜(d) を満足するとき、(G, f) は <u>DS-diagram</u> であるという。

(a) G は 3-regular graph (即ち、G の各頂点では、



のようになっている。) で connected.

(b) v が G の頂点ならば、$\# f^{-1}(f(v)) = 4$.

(c) x が G の辺の点ならば、$\# f^{-1}(f(x)) = 3$.

(d) x が頂点でも辺の点でもなければ $\# f^{-1}(f(x)) = 2$.

[注]. 前節の例は、DS-diagram では<u>ない</u>。

DS-diagram 全体を $\mathcal{DS}$ と書く。明らかに、$\mathcal{P} \supsetneqq \mathcal{DS}$,
更に、$\varphi(\mathcal{DS}) = \mathcal{M}_3$ ([1]) である。

(G, f) を DS-diagram とする。G の辺の集合を $E(G)$, 頂点の集合を $V(G)$ と書く。$e = \{E_1, E_2, \cdots, E_n\} \subset E(G)$ が (G, f) の *E-cycle* であるとは、

(i) $f(E_i) \neq f(E_j)$ for $1 \leqq i < j \leqq n$

(ii) $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{E}_i$ は S^2 上の Jordan 閉曲線。

(iii) X, Y が S^2-G の連結成分で $X\neq Y$, $f(X)=f(Y)$ ならば，X と Y は e で分離される。

の3条件を満たすことであるとする。$\mathcal{DS}_E$ で E-cycle を持つ DS-diagram の集合を表わす。$\mathcal{DS}\supsetneqq\mathcal{DS}_E$，$\varphi(\mathcal{DS}_E)=\mathcal{M}_3$ である。([2])

(G, f) を E-cycle $e=\{E_1,\cdots,E_n\}$ を持つ DS-diagram とする。閉曲線 $\bigcup_{k=1}^{n}\overline{E_k}$ も同じ文字 e で表わす。e は次の性質を持つ。(S^2-e の連結成分を Σ_1,Σ_2 とする)

(i) $\#(f^{-1}(f(v))\cap e)=2$ for $^\forall v\in V(G)$

(ii) $v_1,v_2\in e\cap V(G)$，$v_1\neq v_2$，$f(v_1)=f(v_2)$ で，v_1 から出る e 上にない辺が Σ_1 に含まれるとすると，v_2 から出る e 上にない辺は Σ_2 に含まれる。

(iii) $^\forall x\in e$ に対し，$\#(f^{-1}(f(x))\cap\Sigma_j)=1$ $(j=1,2)$.

そこで，$e\cap V(G)$ を，2つの集合 A_1, A_2 に次の様に分ける。

$v\in A_j \Leftrightarrow$ v から出る e 上にない辺は Σ_j に含まれる。

このとき，さらに次の性質が成り立つ。

(iv) $v\in A_1$ (or A_2)，$\{x_k\}$ を片側から v に近づく点列，$\{y_k\}=\Sigma_2\cap f^{-1}(f(x_k))$ (or $\Sigma_1\cap f^{-1}(f(x_k))$) とすると，次のいずれか一方が成り立つ。

(r) $\{x_k\}$ が右側から近づいたとき，$y_k\to e\cap V(G)$

(l) $\{x_k\}$ が左側から近づいたとき，$y_k\to e\cap V(G)$

そこで，各 A_j ($j=1,2$) をそれぞれ 2つの集合 A_j^r，A_j^l に分ける。即ち，

$v \in A_j^r$ (or A_j^l) $\Leftrightarrow$ $v \in A_j$ かつ，条件 (r) (or (l)) を満足する.

さらに，$g : A_1 \longrightarrow A_2$ を $g(v) = A_2 \cap f^{-1}(f(v))$ によって定める。　このとき，$(A_1^r, A_1^l ; A_2^r, A_2^l ; g)$ によって，(もし，これに対応する DS-diagram (G, f) が存在すれば) 一意的に (G, f) が定まることが示される。

次節では，標準的 DS-diagram の候補をこの五つ組によって記述する。

§.2. 標準的 DS-diagram の候補

[I] 松 ("特上" ともいう)

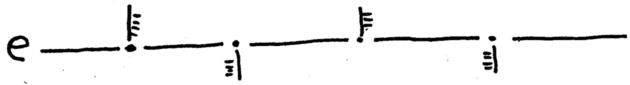
$(A_1^r, A_1^l ; A_2^r, A_2^l ; g)$ によって定まる (G, f) が "松" であるとは，次の条件 (i)～(iii) を満たすことである.

(i) $A_1^l = A_2^r = \phi$

(ii) A_1^r の点と A_2^l の点は e 上交互に並ぶ

(iii) $\underbrace{{}^\forall v \in A_1^r}_{\# A_1^r \geqq 2 \text{ のときは}}$ の左隣にある A_2^l の点は $g(v)$ ではない。

この条件(i),(ii)を次の様に図示する.



すなわち —!— (or —¡—) は A_1 (or A_2) の点を表わし.
—!— ならば A_1^r, —!— ならば A_1^l の点とする.

<u>定理 1.</u>

M を松の $(A_1^r, A_1^l\,;\,A_2^r, A_2^l\,;\,g)$ によって定まる 3-manifold とすると.次が成り立つ.

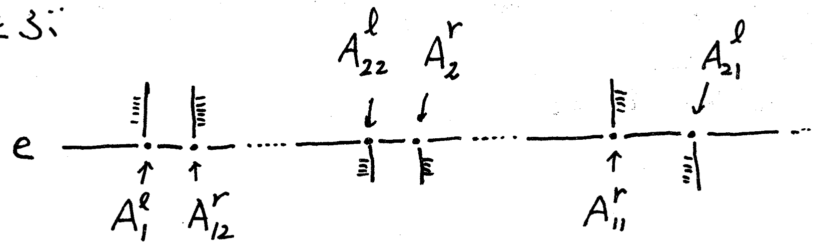
(i) $\# A_1^r = 1 \quad \Rightarrow \quad M = S^3$

(ii) $\# A_1^r \geqq 2 \quad \Rightarrow \quad \pi_1(M)$ は非自明

[II] 梅 ("並"ともいう)

$(A_1^r, A_1^l\,;\,A_2^r, A_2^l\,;\,g)$ が"梅"であるとは.次の条件(i)〜(iii)を満足することとする.

(i) $A_1^r = A_{11}^r \cup A_{12}^r$, $A_2^l = A_{21}^l \cup A_{22}^l$ とそれぞれ分数され. $A_{11}^r, A_{12}^r, A_1^l, A_{21}^l, A_{22}^l, A_2^r$ が e 上下図のように並ぶ



(ii) $g(A_{11}^r) = A_{21}^\ell$, $g(A_{12}^r) = A_{22}^\ell$, $g(A_1^\ell) = A_2^r$.

(iii) $\#A_{11}^r \geqq 2$ のとき、$v \in A_{11}^r$ に対し、A_{21}^ℓ の点のうちで、v の左隣の点は $g(v)$ ではない。

定理 2.

任意の orientable closed 3-manifold は梅の DS-diagram によって表示される。

[III] 竹 ("上" ともいう)

条件：梅 + (iv)

(iv) 左端点が A_2^r の点，右端点が A_2^ℓ の点であるような $e - A_2$ の任意の連結成分 γ に対し、$\Sigma_1 \cap f^{-1}(\overline{\gamma})$ によって分けられる Σ_1 のどちらの部分 Ω に対しても $A_{21}^\ell \cap \overline{\Omega} \neq \phi$.

予想

(1) すべての orientable closed 3-manifold は竹の DS-diagram で表示されるであろう。

(2) $\#A_{11}^r \geqq 2$ なる竹の DS-diagram で表示される多様体の基本群は非自明であろう。

[注意]

(1) 定理.2. の証明の概略

E-cycle を持つ DS-diagram は non-singular flow の組合せ的表示と考えられる([2],[3]). そこで. この non-singular flow として. fibred knot に付随したものをとると. fibre が orientable で monodromy map が orientation preserving ならば. これから得られる DS-diagram は"梅"であることが示される。一方. orientable closed 3-manifold は. 上記のような fibred knot を持つことが知られている. このことから定理.2. が導かれる.

(2) 定理.1. で. $\#A_1^r = 1$ の場合は. $M = S^3$ であることは. よく知られている([1]). $\#A_1^r \geq 2$ の場合の証明は. "松"の DS-diagram の持つ対称性を用いて. 組合せ群論的に行なわれる(Lyndon [4] の small cancellation theory に用いられる方法をまねる).

References

[1] H. Ikeda, Acyclic closed fake surfaces, Topology 10('71) 9–36

[2] I. Ishii, Flows and Spines, Tokyo J. Math. 9('86) 505–525

[3] ——, Combinatorial construction ---, Kobe J. Math. ('86) 201–208

[4] R.C. Lyndon & P.E. Schupp, Combinatorial group theory, Springer ('77)