数理解析研究所講究録
第683巻 1989年 44-57

Drach-Vessiot 理論について

熊本大学・理　梅村　浩
Hiroshi Umemura

代数方程式のGalois理論を見て，類似の理論を微分方程式について確立することをLie(1842-1899)は夢みた。解析学で必要な理論は本質的に無限次元であるが，有限次元の通常のLie群論から作り始めなければならなかった。Lie全集7巻の中に，無限次元に関する論文は決して多くない。

Picardは線型常微分方程式についてのGalois理論を作った(19世紀の終り頃)。この理論は現在Picard-Vessiot理論と呼ばれている。しかし，この理論は有限次元の場合であって，Lieの目標とした一般論から見れば，極めて特別な場合である。Lieの野心的な夢を最初に実現しようとしたのは，J. Drachの学位論文(1898)である。彼は，その理論の発展を生涯の仕事とした。しかし彼の論文には，不十分な定義，不完全な証明が多く，非常に魅力はあるが，疑わしい印象を与えることは否めない。

一方Painlevéは彼の発見した第1方程式の既約性の証明はDrach理論を使ってできると主張した(1903)。Painlevéは Drach理論の欠陥を知っていたようなので，Painlevéが

Drach理論を使った既約性の厳密な証明を得ていたのか疑わしい．Drach理論は当時，一般に受け入れられてはいなかったが，それが正しいことと近い将来万人に認められるようになることをPainlevéは信じていた．

しかし以下に見るように，そうはならなかった．Vessiotは1904年から始まる仕事で，Drachの理論を完全にするのを目標にした．その最初の3部作は，学士院の大賞（grand prix des sciences）に輝いている．しかし彼の仕事は省みられることなく，Vessiotの名前は，彼にとって不本意なことに，有限次元の場合であるPicard-Vessiot理論に残っているにすぎない．なお1915年にDrachは彼のGalois理論を使って（従って厳密でない），Painlevéの第1方程式のGalois群を計算することによって，その既約性を証明している．

Painlevéの方程式の既約性については，既に二つの異る証明がある．　　Painlevéが期待したように無限次元微分Galois理論に基づく第3の証明があるのか極めて興味深い。第3の証明のために，まずVessiotの仕事の分析から始めようと思った。その結果，定式化には問題が少しはあるが，Vessiotの仕事は，ほぼ正しいことが判明した．ただし，それが有用であるか，例えばPainlevé方程式の既約性の証明に使えるかは，未だわからない．我々の成果の一部をここに報

生する。

§1 代数拡大のGalois理論と, Picard-Vessiot 理論

L/Kを体のGalois拡大とする。この条件は$\mathrm{Spec}\,L/\mathrm{Spec}\,K$がある reducedな K-群スキームGの主等質空間であると言い換えることもできる。又, 拡大体L/Kの$\bar{K}/K$への埋め込み全体$\mathrm{Hom}_K(L, \bar{K})$が$\mathrm{Aut}_K \bar{K}$の主等質空間であるとも言える($\bar{K}$は$K$の代数的閉包を表す).

定理(代数拡大のGalois理論) L/KをGalois拡大とする. 次の2つの集合の間に包含関係を逆にした1:1対応がある.

(1) L/Kの中間体.

(2) 群$\mathrm{Aut}_K L$の部分群.

中間体Mには部分群$\{g \in \mathrm{Aut}_K L \mid g$は$M$の元をすべて固定する$\}$を, 部分群$H$には中間体$\{x \in L \mid x$は$H$の任意の元で固定される$\}$を対応させる.

次にPicard-Vessiot理論を説明する.

一般的な説明はしないことにして, Dを$\mathbb{C}$の領域とする。KをD上の有理型関数からなる体であって微分で閉じている

ものとする．$K(D)$ を D 上の有理型関数全体からなる体とする，$K(D)$ は微分で閉じている．簡単のため K は定数関数全体 $\mathbb{C}$ を含んでいるものとする．$A=(a_{ij})\in GL_n(K(D))$ とする。A の各成分を微分して得られる行列 (a_{ij}') を A' で表わす。$A'A^{-1}=F\in M_n(K)$ と仮定する．つまり A は K-係数の線型常微分方程式の解であるとする．このとき，$L=K(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}/K$ を K の GL_n－原始拡大であると言う．

定理（Picard-Vessiot 理論）L/K を GL_n－原始拡大とする。このとき $G=\{B=(b_{ij})\in GL_n(\mathbb{C})\mid a_{ij}\mapsto\sum_{l=1}^{n}a_{il}b_{lj}$ は微分体 L/K の K－自己同型を引き起す$\}$ とおくと，G は $\mathbb{C}$ 上定義された代数群となる（実際，G は $GL_n(\mathbb{C})$ の $\mathbb{C}$－代数部分群である）。さらに，次の集合の間に包含関係を逆にした $1:1$ 対応が存在する．

(1) L/K の微分中間体（＝中間体であって微分で閉じているもの）．

(2) 代数群 G の $\mathbb{C}$－代数部分群．

対応のさせ方は，代数拡大の Galois 理論の場合と同様である。さらに，Ω/K を微分万有体，C をその定数体とすると $\mathrm{Hom}_K(L,\Omega)$ は $G_C(C)=(G\otimes_{\mathbb{C}}C)(C)$ の主等質空間であ

ることが証明できる．又 L/K が $G_K = G\otimes_{\mathbb{Q}} K$ のある主等質空間のモデルとなることも証明できる。

§2 Drach理論

代数常微分方程式 $y^{(n)}=F(x;y,y',\dots,y^{(n-1)})$ を考える．ここで F は，ある領域 $D(\subset\mathbb{C})$ 上の有理型関数を係数とする y, $y',\dots,y^{(n-1)}$ の有理式（x は $\mathbb{C}$ の座標，微分は x に関する微分をあらわす）

常微分方程式 $y^{(n)}=F(x;y,y',\dots,y^{(n-1)})$ の Galois 理論はこの常微分方程式の第1積分の満たす線型偏微分方程式 $\frac{\partial z}{\partial x}+y'\frac{\partial z}{\partial y}+\cdots+F(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})\frac{\partial z}{\partial y^{(n-1)}}=0$ の Galois 理論と同値であると考えられる（この主張は何ら論理的な意味を持たない）．従って，線型偏微分方程式の微分 Galois 理論を作ることを考える．

$D\subset\mathbb{C}^{m+1}$ を領域とし，$t,t_1,\dots,t_m$ をその座標を与える関数とする。K を D 上有理型の関数から成る体であって，K は定数関数全体 $\mathbb{C}$ を含み，かつ偏微分 $\partial/\partial t,\partial/\partial t_1,\dots,\partial/\partial t_m$ に関して閉じていると仮定する．$a_1,a_2,\dots,a_m\in K$ として，線型偏微分方程式

(1) $(\partial/\partial t+a_1\partial/\partial t_1+\cdots+a_m\partial/\partial t_m)z=0$

を考察する。

$z_1, z_2, \cdots, z_n$ を(1)の独立な解とする．つまり，z_i $(1 \leq i \leq n)$ は(1)の解であり，$D(z_1, z_2, \cdots, z_n)/D(t_1, t_2, \cdots, t_n) \neq 0$．さて，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ をもう1組の(1)の独立な解とすれば，座標変換 $\Phi =$ $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$ が存在して，

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
u_1 &= \varphi_1(z_1, z_2, \cdots, z_n) \\
u_2 &= \varphi_2(z_1, z_2, \cdots, z_n) \\
&\vdots \\
u_n &= \varphi_n(z_1, z_2, \cdots, z_n)
\end{aligned}
$$

となる。

言い換えれば，(1)の解全体は座標変換全体のなす Lie pseudo-group の主等質空間になっており，§1に上げた二つの例と似たような状況にある。ただし，§1の例では一つの解から他の解へ，有理式で移れるのに対して，この場合は巾級数になっており，ここから多くの困難が生じる（§1の最初の例では根の置換であり，2番目の例では線型変換である）．

$z_1, z_2, \cdots, z_n$ にK上微分関係式があれば，Φ として微分関係式を保つもののみを考える．この様にして，(1)のGalois群が定義されるとDrachは考えた。この考え方には次のような問題点がある．

(i) 解 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ としてcanonicalなとり方がなく，どのような解をとってよいのか，はっきりしない．

(ii) 座標変換もLie pseudo-group[1]であり，Φ の定義域がはっきり

1) 定義については§2参照

りしなり.

Vessiot は(1)を次の様に改善した。

(1)の独立な解 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ を一つ固定する. (1)のGalois群ではなくて, 微拡大体 $L = K(z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots \partial^{\alpha} z_i / \partial^{\alpha_0}\tau\, \partial t_1^{\alpha_1} \cdots \partial t_n^{\alpha_n} \cdots)/K$ のGalois群が定義できる。つまり, Galois群は方程式Kのみによって決るのではなく, その独立な解のとり方にも依存する概念である。

Vessiotの考えを以下に説明する。

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ が正則である点 $\tau = (\tau_0, \tau_1, \cdots, \tau_n) \in D$ が存在して $z_1(\tau_0, t_1, t_2, \cdots, t_n) = t_1$, $z_2(\tau_0, t_1, t_2, \cdots, t_n) = t_2$, $\cdots$, $z_n(\tau_0, t_1, t_2, \cdots, t_n) = t_n$ が任意の $(\tau_0, t_1, t_2, \cdots, t_n) \in D$ について成立するとき, 独立な解 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ は主であるという.

$\mathfrak{L}$ を τ の近傍で有理型な関数の全体からなる微分体とする. 自然なK-埋め込み

$$L \longrightarrow \mathfrak{L}$$

により, Lは $\mathfrak{L}$ の微分部分体とみなせる.

1904年のVessiotの論文は次のことを主張しているようである.

(a) $\mathrm{Hom}_K(L, \mathfrak{L})$ は Lie pseudo-group の主等質空間である(ここで Hom_K は微分体のK-準同型全体を表わす).

(b) $K = \{x \in L \mid$ 任意の $\varphi \in G$ について, $\varphi(x) = x\}$
である。

(a)について少し説明を加えると, $\Phi \in \mathrm{Hom}_K(L, \mathcal{L})$ とすれば, Φ は $z_1, z_2, \cdots, z_n$ の像 $\Phi(z_1), \Phi(z_2), \cdots, \Phi(z_n)$ で決ってしまう. 従って(a)のように, 座標変換 $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$ で

$$\Phi(z_1) = \varphi_1(z_1, z_2, \cdots, z_n),$$

$$\Phi(z_2) = \varphi_2(z_1, z_2, \cdots, z_n),$$

$$\vdots$$

$$\Phi(z_n) = \varphi_n(z_1, z_2, \cdots, z_n)$$

とするものが決まる。この座標変換全体が, 合成および逆変換をとることによって閉じていることを主張する.

ここでも Drach の問題点の(ii), つまり座標変換の定義域の問題は常に残る.

(b)は次の例を見るように, デリケートである.

例 $n=1$, 微分方程式 $\partial z/\partial t = 0$ を考える. $z = z_1 = \Gamma(t_1)$ とする. $K = \mathbb{C}(t, t_1)\langle \partial^4 z/\partial t_1^4 \rangle$, $L = \mathbb{C}(t, t_1)\langle z \rangle$ とおく, ここで $\langle a \rangle$ は a および, その微分を付加することを意味するものとする。さて tr.d. $[L : K] = 4$ である (注意, $\Gamma(t_1)$ は $\mathbb{C}(t_1)$ 上自明でなく, いかなる微分方程式も満さない). また $\tau = (\tau_0, \tau_1)$ を固定しておき, τ の近傍で有理型である関数の芽全体のなす微分体を $\tilde{\mathcal{L}}$ とおく. 自然な埋め込み $L \to \tilde{\mathcal{L}}$ があ

3. tr.d. $[L:k]=4$. L の K-埋め込みは $z \longmapsto z+f(t_1)$（$f(t_1)$ は t_1 の多項式であって，その次数は 3 以下）で与えられる。従って，$\mathrm{Hom}_K(L,\mathcal{L})$ は 4 次元ある。一方，一変数の変数変換全体に含まれる有限次元 Lie 群の次元は，3 次元以下である．したがって，$\mathrm{Hom}_K(L,\mathcal{L})$ は Lie pseudo-group の主等式空間になりえない。

§2 Lie pseudo-group

変数変換に関する微分方程式系が与えられており，次の条件を満すとき，Lie pseudo-group であるという。

(1) f, g が解であり，$f\circ g$ が定義されれば $f\circ g$ も解である。

(2) f が解であれば，逆変換も解である．

例 1. $y''=0$.　解 $y=ax+b$.

2. $y^{(3)}/y'-\frac{3}{2}(y''/y')^2=0$.　解 $y=(ax+b)/(cx+d)$.

3. 2 変数. $\partial y_1/\partial x_1=1$, $\partial y_1/\partial x_2=0$, $\partial y_2/\partial x_2=0$.
解 $y_1=x_1+a$, $y_2=x_2+f(x_1)$.

4. n-変数, $\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)/\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1$.

例 1, 2 では定義域がはっきりしているが，3, 4 では合成

を考えるとき，定義域の問題が生じる．

これを避けるため，我々は次の様に考える．

Kを標数0の体とする。$\mathcal{C}(K)$を完備，局所Kー代数(A, m, K)（即ち$A/m = K$）のカテゴリーとする。次の functor Gを考える．

$$G : \mathcal{C}(K) \longrightarrow (\text{集合})\ (=\text{集合のカテゴリー}).$$
$$A \longmapsto \{\varphi \in A[[x]] \mid \varphi \equiv x \mod m\}$$

$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ ，$\psi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots \in G(A)$ とする。合成関数 $\varphi \circ \psi(x) = (a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + a_3 b_0^3 + \cdots) + (a_1 b_1 + 2a_2 b_0 b_1 + 3a_2 b_0^2 b_1 + 4a_3 b_0^3 b_1 + \cdots)x + \cdots \in G(A)$ が定まる。注意を要するが，逆写像も定まり，Gは群 functor となる．

$K[[x]]$ー係数の常微分方程式 $F(\varphi, \varphi', \cdots, \varphi^{(n)}) = 0$ があり その解が，群 functor の部分群 functor Hとなるとき，Hを Lie pseudo-group functor とよぶ．

functor $F : \mathcal{C}(K) \to (\text{集合})$ を $A \mapsto F(A) = m$ と定義すると 群 functor HはFに作用する：$a \in m = F(A)$，$\varphi(x) \in H(A) \subset G(A) = A[[x]]$ について，$\varphi(x)[a] = \varphi(a)$ とおく．

以上，1変数でやったが，多変数でも同様にできる。この立場から Lie の仕事を全て見なおすのは意味があると思れる．

§3 抽象的設定

$(N, \partial/\partial t, \partial/\partial t_1, \ldots, \partial/\partial t_n)$ を偏微分体. 体 N の標数は 0 であると仮定する. K を N の一つの微分部分体とする. $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ とする. 微分方程式

$$(1) \qquad (\partial/\partial t + a_1 \partial/\partial t_1 + \cdots + a_n \partial/\partial t_n) z = 0$$

を考える. N の定数体と K の定数体は一致すると仮定する

簡単のため, $n=1$ と仮定する。$z \in N$ となる(1)の解をとる. $\partial z/\partial t_1 \neq 0$ と仮定する. $L = K\langle z\rangle = K(z, \partial z/\partial t, \partial z/\partial t_1, \ldots)$ とおく. さて微分体 $\mathcal{K}$ に対して, その微分を忘れることによって得られる抽象体を $\mathcal{K}^\natural$ とおく. つまり $\mathcal{K} \to \mathcal{K}^\natural$ は微分構造を忘れる functor である。

Lemma $\quad N \to N^\natural[[T, T_1]]$ を $a \mapsto \displaystyle\sum_{m, m_1 \geq 0} \frac{1}{m!\, m_1!} \left(\partial^{m+m_1} a / \partial^m t\, \partial^{m_1} t_1\right) T^m T_1^{m_1}$

で定義すると, 微分体の埋め込みである. ここで, 巾級数環 $N^\natural[[T, T_1]]$ の微分は $\partial/\partial T, \partial/\partial T_1$ であり, それぞれ $\partial/\partial t, \partial/\partial t_1$ が対応する.

さて, Lemma により, 微分体の埋め込み, $i: L \to L^\natural[[T, T_1]]$ を得る.

$$(2) \qquad \begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{i} & L^\natural[[T, T_1]] \\ | & & | \\ K & \longrightarrow & K^\natural[[T, T_1]] \end{array} .$$

ここで，$i|K$ を固定する，i の infinitesimal deformation を考える．即ち，$C(L^{q}) \ni A$ について，

$X(L/K)=\{ f: L \to A[\![T, T_1]\!] \mid f|K = i|K$，かつ $L \xrightarrow{f} A[\![T, T_1]\!] \to L^{q}[\![T, T_1]\!]$ は i に等しい，ここで $A[\![T, T_1]\!] \to L^{q}[\![T, T_1]\!]$ は係数の reduction である$\}$ とおくことにより functor

$X(L/K): C(L^{q}) \to$（集合）

が定義される．

$i(z)-z^{q} \in L^{q}[\![T, T_1]\!]$ は極大イデアルに入る．一方，巾級数 $i(z)-z^{q}$ の T_1 の係数 $\partial z/\partial t_1 \neq 0$ であるので，$L^{q}[\![T, T_1]\!] = L^{q}[\![T, i(z)-z^{q}]\!]$，$i(z)-z^{q}=T_1'$ とおけば，$L^{q}[\![T, T_1']\!]$ では微分方程式 $(\partial/\partial t + a_1 \partial/\partial t_1)z = 0$ は，$(\partial/\partial T_1')i(z)=0$ となる．故に $f: L \to A[\![T, T_1]\!]$ は $\varphi(x) \in A[\![x]\!]$ が存在して，$z \mapsto z^{q} + \varphi(i(z)-z^{q})$ で決まる．

定義　上の方法で，正則拡大 L/K の定める functor $X(L/K): C(L^{q}) \to$（集合）が，Lie pseudo-group H の主等質空間となるとき，L/K は automorphic 拡大であるという．H をその Galois 群とよぶ．

次の定理が成り立つ．

定理　L/K を automorphic 拡大とする。$A=\{L \supset M \supset K \mid M$ は微分中間体，$L \supset M$ は automorphic$\}$，$B=\{G \supset H ; H$ は Lie pseudo-group functor$\}$ とおく．このとき，写像 $\Phi: A \to B$，$M \mapsto \{\varphi \in G \mid \varphi$ は M をとめる$\}$，は単射である．

注意　L/K が automorphic, $L \supset M \supset K$ を微分中間体, L/M は正則拡大と仮定しても, L/M は automorphic とは限らない。Subgroup functor から出発して, 部分体を定め, それから部分群を定義しても, もとに戻るとは限らない。

例　$K = \mathbb{C}(t, t_1, t_2)$, 微分方程式 $(\partial/\partial t + t_2\,\partial/\partial t_1 + 6t_1^2\,\partial/\partial t_2)\,z = 0$ の解 $z_1 = t_2^2 - 4t_1^3$, $z_2 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \int^{y} \frac{d\eta}{\sqrt{4\eta^3 + \theta}}\right)$ を考える。$L = K\langle z_1, z_2\rangle / K$ は automorphic であって, その Galois 群は, $(y_1, y_2) \mapsto (y_1, y_2 + f(y_1))$ f は y_1 の任意関数となる。

参考文献

[1] Drach, J.: Essai sur une théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendentes, Annales Sci. Ecole Normale Sup. (3), 15 (1898), 243–384

[2] Vessiot, E.: Sur la théorie de Galois et ses diverses généralisations, Annales Sci. Ecole Normale sup. (3), 21 (1904), 9–85.

[3] ——— : Sur une théorie générale de la réductibilité des equations et systèmes d'equations finies ou differentielles,

Ann. Sci. Ecole Normale Sup., (3) 63 (1946), 1–22.

注意　Drach のアイディアを紹介したところで，非線型常微分と線型偏微分の同値性の部分が問題であったが，線型偏微分を経由することなく，Vessiot の[illegible]の考え方で扱えるものと思われる．