数理解析研究所講究録
第683巻 1989年 58-66

スペクトル関数の表示と構成

東京水産大　上村 豊　(Yutaka Kamimura)

本稿では，Hilbert空間 $L^2(X)$ (測度空間 X 上の2乗可積分関数の全体)における $\mathbb{R}$ 上の単位の分解 $E(\Delta)$ でCarleman型の積分作用素であるようなものを構成する1つの方法を説明する。上記積分作用素の積分核はスペクトル関数とよばれるが，まずこの関数の一般化された固有関数と $\mathbb{R}$ 上の測度による双一次表示を確立し，次にこの固有関数を摂動してもとの単位の分解とユニタリ同値な単位の分解をつかまえようというのが本稿のもくろみである。

全体を通して，測度空間 X に対しては σ-有限であることのみを仮定し，測度を ν で表わす。また $L^2(X)$ は可分であると仮定し，$f, g \in L^2(X)$ の内積を (f, g) と書きノルム $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ での極限を l.i.m. で表わす。更に，$X \times X$ 上の関数 $f(x, y)$ が x の関数として $L^2(X)$ の元であることを $f(x, y) \in L^2(X)_x$ のように表わす。また，$L^2_{\theta_i(\lambda)}$ で $\mathbb{R}$ 上の測度 $\theta_i(\lambda)$ に関し2乗可積分な関数の

全体を表わし，それらの直和を $\sum_{i=1}^{\infty}\oplus L^2_{\theta_i(\lambda)}$ と書く。単位の分解を $E(\Delta)$（Δは1次元Borel集合）で表わし，有界な1次元Borel集合の全体を $\mathcal{B}_1^0$ と書く。また，集合Aの閉線形包を $\overline{sp}[A]$ と書く。

§1. スペクトル関数の表示

定理1. $L^2(X)$ における $\mathbb{R}^1$ 上の単位の分解 $E(\Delta)$ が任意の $\Delta\in\mathcal{B}_1^0$ に対し

（E）　$(E(\Delta)f)(x) = (f(\cdot), \theta(\cdot,x;\Delta)) = \int_X \overline{\theta}(y,x;\Delta)f(y)\,d\nu(y)$

の形の積分作用素であるとする。但し，$\theta(y,x;\Delta)\in L^2(X)_y$ for a.e. $x\in X$ とする。このとき，$\theta(x,y;\Delta)$ は等式（E）をそこなわぬように（measure zero の上で）修正することにより，

（θ）　$\theta(x,y;\Delta) = \sum_{i=1}^{\infty}\int_\Delta w_i(x,\lambda)\overline{w_i}(y,\lambda)\,d\theta_i(\lambda)$

と表わされる。但し，$\theta_i(\lambda)$ は $\mathbb{R}^1$ 上の測度であり，$w_i(x,\lambda)$ $(i=1,2,\cdots)$ は次の3条件をみたす。

（w1）　$\int_\Delta |w_i(x,\lambda)|^2\,d\theta_i(\lambda) < \infty$　for all $x\in X$ and all $\Delta\in\mathcal{B}_1^0$

（w2）　任意の $\Delta\in\mathcal{B}_1^0$ に対し，$\int_\Delta w_i(x,\lambda)\,d\theta_i(\lambda)\in L^2(X)_x$ であり，

$$\left(\int_{\Delta_2} w_j(x,\lambda)\,d\theta_j(\lambda), \int_{\Delta_1} w_i(x,\lambda)\,d\theta_i(\lambda)\right) = \delta_{ij}\,\theta_i(\Delta_1\cap\Delta_2)$$

が任意の $i,j=1,2,\cdots$ と任意の $\Delta_1,\Delta_2\in\mathcal{B}_1^0$ に対し成立する。

（w3）　$\overline{sp}\left[\left\{\int_\Delta w_i(\cdot,\lambda)\,d\theta_i(\lambda)\ \middle|\ \Delta\in\mathcal{B}_1^0,\ i=1,2,\cdots\right\}\right] = L^2(X)$

(θ) の右辺 $\sum_{i=1}^{\infty}$ は任意の $(x, y) \in X \times X$ に対し(各点)収束し，同時に x の関数(又は y の関数)として $L^2(X)$-収束する。

定理1の意味を見るために，(θ) を (E) に代入して形式的に計算すると，

$$f(x) = \underset{\Delta \to R}{\mathrm{l.i.m.}} \, (E(\Delta)f)(x) = \mathrm{l.i.m.} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Delta} w_i(x,\lambda) \left(\int_X f(y) \overline{w_i}(y,\lambda) \, d\nu(y) \right) d\theta_i(\lambda)$$

となる。この計算は正当化されて，

<u>定理1の系</u>(一般固有関数展開) 定理1と同様の仮定のもとで，任意の $f \in L^2(X)$ に対し $\{F_i(\lambda)\}_{i=1}^{\infty} \in \sum_{i=1}^{\infty} \oplus L^2_{\theta_i(\lambda)}$ が存在して，

$$f(x) = \underset{\Delta \to R}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Delta} F_i(\lambda) w_i(x,\lambda) \, d\theta_i(\lambda)$$

と表わされる。$\{F_i(\lambda)\}_{i=1}^{\infty}$ は $f(x)$ に対し一意的に定まり，

$$F_i(\lambda) = \int_X f(x) \overline{w_i}(x,\lambda) \, d\nu(x)$$

で与えられる。但し，上記右辺の積分は $L^2_{\theta_i(\lambda)}$ のノルムで収束する。更に，対応 $F : f \longmapsto \{F_i(\lambda)\}_{i=1}^{\infty}$ は $L^2(X)$ から $\sum_{i=1}^{\infty} \oplus L^2_{\theta_i(\lambda)}$ の上への等距離写像を与える。

上の系は，W. G. Bade and J. Schwartz : Proc. Acad. Sci. U.S.A 42 (1956) PP 519 − 525 によって確立・証明されたものであるが，定理1のようにスペクトル関数の段階での展開式は(驚くべきことではないが)新しい結果のようである。定理1の証明

は，ここでは省略させて頂く。

一般には $w_i(x,\lambda)\notin L^2(X)_x$ であるのでこれを固有関数と呼ぶのは憚られるが，性質 $(w2)$ より，$\theta(x,y;\Delta)$ から自然に induce される自己共役作用素を T とすると，

$$T\int_\Delta w_i(\cdot,\lambda)\,d\theta_i(\lambda)=\int_\Delta \lambda\, w_i(\cdot,\lambda)\,d\theta_i(\lambda)$$

の成立することがわかる。この意味で $\{w_i(x,\lambda)\}_{i=1}^\infty$ を一般化された固有関数と呼んでいることを注意しておく。

§2. スペクトル関数の構成

§1 において，与えられたスペクトル関数は $\mathbb{R}^1$ 上の測度と一般化された固有関数とで展開できることを見たが，逆に，スペクトル関数を得るにはどのようにすればよいかを考えたい。形式的には（何もわかったことにはならないが）次のような定理 1 の逆を得る。

補題　$(w1)$，$(w2)$，$(w3)$ をみたす関数の系 $\{w_i(x,\lambda)\}_{i=1}^\infty$ と $\mathbb{R}^1$ 上の測度の系 $\{\theta_i(\lambda)\}_{i=1}^\infty$ が与えられたとき，(θ) によって定義される $\theta(x,y;\Delta)$ はスペクトル関数になる。すなわち，(E) によって定義される $E(\Delta)$ は，$L^2(X)$ における $\mathbb{R}^1$ 上の単位の分解を与える。

補題の証明は，Lebesgue 積分と Hilbert 空間論の演習問題だから省略する。

さて，上の補題により自然に“与えられた $\{\theta_i(\lambda)\}_{i=1}^{\infty}$ に対し，(w1), (w2), (w3) をみたす $\{w_i(x,\lambda)\}_{i=1}^{\infty}$ を決定せよ” という問題が提起される。この問題に対する1つのアプローチとして，“あらかじめ与えられた既知のスペクトル関数

$$\theta^0(x,y;\Delta) = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{\Delta} w_i^0(x,\lambda)\overline{w}_i^0(y,\lambda)\,d\theta_i^0(\lambda)$$

を1つ固定して（もちろん $\{w_i^0(x,\lambda)\}_{i=1}^{\infty}$ と $\{\theta_i^0(\lambda)\}_{i=1}^{\infty}$ は条件 (w1), (w2), (w3) をみたすように取る）$\{\theta_i(\lambda)\}_{i=1}^{\infty}$ としてはこの $\{\theta_i^0(\lambda)\}_{i=1}^{\infty}$ を用い（i.e. $\theta_i(\lambda)\equiv\theta_i^0(\lambda)$）$\{w_i(x,\lambda)\}_{i=1}^{\infty}$ を

(w4)　$\{w_i(x,\lambda)-w_i^0(x,\lambda)\}_{i=1}^{\infty}\in\sum_{i=1}^{\infty}\oplus L^2_{\theta_i(\lambda)}$ for all $x\in X$

となるような範囲で捜す” ことにより，次の定理を得る。

<u>定理2</u>. $\{w_i^0(x,\lambda)\}_{i=1}^{\infty}$ と $\{\theta_i^0(\lambda)\}_{i=1}^{\infty}$ を条件 (w1), (w2), (w3) をみたすものとする。このとき，

(i) $\{w_i(x,\lambda)\}_{i=1}^{\infty}$ と $\{\theta_i(\lambda)\}_{i=1}^{\infty}=\{\theta_i^0(\lambda)\}_{i=1}^{\infty}$ が (w1), (w2), (w3), (w4) をみたすならば，$X\times X$ 上の関数 $K(y,x)$ で

(K) $\left\{\begin{array}{l} K(y,x)\in L^2(X)_y \text{ for all } x\in X \text{ であり，} (Kf)(x):=(f(\cdot),K(\cdot,x)) \\ =\int_X \overline{K}(y,x)f(y)\,d\nu(y) \text{ によって } L^2(X) \text{ 上の有界作用素が定} \\ \text{義され，} K+K^*+KK^*=K+K^*+K^*K=0 \end{array}\right.$

をみたすものが存在して，

$$(w)\qquad w_i(x,\lambda) = w_i^0(x,\lambda) + \int_X \overline{K(y,x)}\, w_i^0(y,\lambda)\, d\nu(y)$$

となる。但し，右辺第2項の積分は $L^2_{\theta_i(\lambda)}$ のノルムで収束する。

逆に，

(ii) $K(x,y)$ を条件(K)をみたすものとすると，(w)で定義される $\{w_i(x,\lambda)\}_{i=1}^{\infty}$ と $\{\theta_i(\lambda)\}_{i=1}^{\infty} \equiv \{\theta_i^0(\lambda)\}_{i=1}^{\infty}$ は(w1)，(w2)，(w3)，(w4)をみたし，従って(θ)で定義した $\theta(x,y;\Delta)$ はスペクトル関数になる。

証明は後述するとして，定理2の意味を説明しておく。条件(w4)を除けば，上のような $\theta(x,y;\Delta)$ はもとの $\theta^0(x,y;\Delta)$ とユニタリ同値な範疇で見つけていることに他ならない。実際，(自明なことだが) $\{\theta_i(\lambda)\}_{i=1}^{\infty} \equiv \{\theta_i^0(\lambda)\}_{i=1}^{\infty}$ に対し(w1)，(w2)，(w3)をみたす $\{w_i(x,\lambda)\}_{i=1}^{\infty}$ から得られる単位の分解 $E(\Delta)$ はもとの単位の分解 $E^0(\Delta)$ とユニタリ同値である。すなわち，$VE^0(\Delta)V^* = E(\Delta)$ for any $\Delta \in \mathcal{B}_1$ となるユニタリ作用素 V が存在する。逆に(証明は省略させて頂くが) $E^0(\Delta)$ とユニタリ同値な $E(\Delta)$ で Carleman 型の積分作用素で表わされるものの積分核－スペクトル関数－は(w1)，(w2)，(w3)をみたす $\{w_i(x,\lambda)\}_{i=1}^{\infty}$ と $\{\theta_i^0(\lambda)\}_{i=1}^{\infty}$ とを用いて(θ)の形に表わされる。一方，条件(K)の最後の等式の部分は，$I+K$ (但し I は恒等作用素) がユニタリ作用素ということを書き直しただけであり，そこで，上の状況に条件(w4)

を加えることと，I＋積分作用素　の形のユニタリ作用素で $\{w_i^0(x,\lambda)\}_{i=1}^{\infty}$ を摂動することとが対応している。これが定理2の主張であり，とりあえずは問題のすりかえをしただけであるが，問題を見易くすることには成功していると思う。少なくとも，いろいろなスペクトル関数を作ることはできる。例えば，

<u>例</u>. $\|\psi\|=2$ なる任意の $\psi\in L^2(X)$ に対し $K(x,y):=-\psi(x)\overline{\psi}(y)$ とすると容易に分かるように，これは条件(K)をみたす。そこで定理2より，

$$w_i(x,\lambda)=w_i^0(x,\lambda)-\int_X \overline{\psi}(y)\,w_i^0(y,\lambda)\,d\nu(y)\;\psi(x)$$

とすると，$\theta(x,y;\Delta)=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\Delta} w_i(x,\lambda)\overline{w}_i(y,\lambda)\,d\theta_i^0(\lambda)$ はスペクトル関数になる。

最後に：

<u>定理2の証明</u>. (i). 定理1の系を $\theta^0(x,y;\Delta)$ に適用して得られる $L^2(X)$ から $\sum_{i=1}^{\infty}\oplus L^2_{\theta_i(\lambda)}$ への等距離写像を F_0 として，

$$K(\cdot,x):=F_0^{-1}\left(\{\overline{w}_i(x,\lambda)-\overline{w}_i^0(x,\lambda)\}_{i=1}^{\infty}\right)$$

と定義すれば，$K(y,x)\in L^2(X)_y$ for all $x\in X$ である。これは，具体的には，

$$K(y,x)=\underset{\Delta\to\mathbb{R}}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\Delta}(\overline{w}_i(x,\lambda)-\overline{w}_i^0(x,\lambda))\,w_i^0(y,\lambda)\,d\theta_i(\lambda)$$

と書けるから，

$$(*)\quad \begin{aligned}(Kf)(x) &= \lim_{\Delta\to\mathbb{R}} \left(f(\cdot),\ \sum_{i=1}^{\infty}\int_{\Delta}(\overline{w_i}(x,\lambda)-\overline{w_i^0}(x,\lambda))\, w_i^0(\cdot,\lambda)\, d\theta_i(\lambda)\right)\\ &= \lim_{\Delta\to\mathbb{R}}\left\{\left(f(\cdot),\ \sum_{i=1}^{\infty}\int_{\Delta}\overline{w_i}(x,\lambda)\, w_i^0(\cdot,\lambda)\, d\theta_i(\lambda)\right) - (f(\cdot),\ \theta^0(\cdot,x;\Delta))\right\}\end{aligned}$$

上式右辺の第２項は $\Delta\to\mathbb{R}$ のときに $f(x)$ に $L^2(X)$-収束する。

上式右辺の第１項の極限を見るために，

$$(V_\Delta f)(x) := \left(f(\cdot),\ \sum_{i=1}^{\infty}\int_{\Delta}\overline{w_i}(x,\lambda)\, w_i^0(\cdot,\lambda)\, d\theta_i(\lambda)\right)$$

とおくと，Parseval の等式より，

$$\begin{aligned}(V_\Delta f)(x) &= \left(\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}(F_0 f)_i(\lambda)\, w_i^0(\cdot,\lambda)\, d\theta_i(\lambda),\ \sum_{i=1}^{\infty}\int_{\Delta}\overline{w_i}(x,\lambda)\, w_i^0(\cdot,\lambda)\, d\theta_i(\lambda)\right)\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\int_{\Delta}(F_0 f)_i(\lambda)\, w_i(x,\lambda)\, d\theta_i(\lambda)\end{aligned}$$

$(F_0 f)_i(\lambda)$ を単関数で近似して性質 $(w2)$ を用いることにより，

$V_\Delta f \in L^2(X)$ であり，

$$\|V_\Delta f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{\Delta}|(F_0 f)_i(\lambda)|^2 d\theta_i(\lambda) \le \sum_{i=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}|(F_0 f)_i(\lambda)|^2 d\theta_i(\lambda) = \|f\|^2$$

の成立することがわかる。そこで容易にわかるように，$Vf := \operatorname*{l.i.m.}_{\Delta\to\mathbb{R}} V_\Delta f$ が任意の $f\in L^2(X)$ に対し存在し，$\|Vf\| = \|f\|$ となる。

このことと (*) および (*) のすぐ後の指摘とを合わせ考えると

$$Kf = Vf - f \quad \text{for any } f\in L^2(X) \qquad (\text{i.e. } K = V - I)$$

を得る。そこで，V が $L^2(X)$ 全体への写像であることを示せば，V がユニタリ作用素で，従って K が条件 (K) をみたすことが直ちに分かる。

そのために再び Parseval の等式を使えば，任意の $\Delta'\in\mathcal{B}_1^0$ に対し，

$$\begin{aligned}V_{\Delta'}\int_{\Delta} w_i^0(x,\lambda)\, d\theta_i(\lambda) &= \left(\int_{\Delta} w_i^0(\cdot,\lambda)\, d\theta_i(\lambda),\ \sum_{i=1}^{\infty}\int_{\Delta'}\overline{w_i}(x,\lambda)\,\overline{w_i^0}(\cdot,\lambda)\, d\theta_i(\lambda)\right)\\ &= \int_{\Delta\cap\Delta'} w_i(x,\lambda)\, d\theta_i(\lambda).\end{aligned}$$

そこで，

(**) $\quad V\int_\Delta w_i^0(\cdot,\lambda)\,d\theta_i(\lambda) = \int_\Delta w_i(\cdot,\lambda)\,d\theta_i(\lambda)$

となり，仮定(W3)より V は $L^2(X)$ の上への写像である。

(ii) 定理1の系より (W) は $F_0K(\cdot,x) = \{\overline{w_i(x,\lambda)} - \overline{w_i^0(x,\lambda)}\}_{i=1}^\infty$ と書き直せるから，Parsevalの等式より，

$$\begin{aligned} K\int_\Delta w_i(x,\lambda)\,d\theta_i(\lambda) &= \left(\int_\Delta w_i^0(\cdot,\lambda)\,d\theta_i(\lambda),\ K(\cdot,x)\right) \\ &= \langle F_0\int_\Delta w_i(\cdot,\lambda)\,d\theta_i(\lambda),\ F_0K(\cdot,x)\rangle \\ &= \int_\Delta (w_i(x,\lambda) - w_i^0(x,\lambda))\,d\theta_i(\lambda). \end{aligned}$$

(但し，上で，$\langle\ ,\ \rangle$は，$\sum_{i=1}^\infty \oplus L^2_{\theta_i(\lambda)}$ における内積である。) そこで，$V := K + I$ とすると，(**) を得る。これより $\{w_i(x,\lambda)\}_{i=1}^\infty$ が (W1)，(W2)，(W3) をみたすことが容易に確かめられる。