数理解析研究所講究録
第683巻 1989年 67-75

ある非線形方程式の漸近的性質について

慶応大学 理工 下村 俊
(Shun SHIMOMURA)

Painlevé の V-型方程式の特別な場合

$$(P_V) \qquad \lambda'' = \left(\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda-1}\right)\lambda'^2 - \frac{\lambda'}{t} + \frac{\alpha}{t^2}\lambda(\lambda-1)^2 + \frac{\gamma\lambda}{t} - \frac{\delta\lambda(\lambda+1)}{\lambda-1}$$

$('=d/dt)$ を考える。 t を正の実軸上に限ったとき，初期値問題

$$(1) \qquad \lambda(t_0)=\lambda_0 \ , \qquad \lambda'(t_0)=\lambda_1$$

の解 $\lambda_0(t)$ が $t\to+\infty$ とした時どのような漸近的性質をもつかという問題を考える。今，$\alpha, \gamma\in\mathbb{R}$，$\delta<0$，かつ，

$$0<\lambda_0<1 \ , \qquad \lambda_1\in\mathbb{R}$$

という仮定をおく。 $\lambda=\tanh^2 u$ という変換により方程式 (P_V) は

$$(2) \qquad t(tu')' = \frac{\alpha}{2}\tanh u\cosh^{-2}u + \frac{\gamma}{4}t\sinh 2u + \frac{\delta}{8}t^2\sinh 4u$$

に変換されることに注意すると，上の問題は方程式 (2) の初期条件

$$(3) \qquad u(t_0)=u_0 \ , \quad u'(t_0)=u_1 \qquad u_0, u_1\in\mathbb{R}$$

をみたす解 $u_0(t)$ について $t\to+\infty$ のときの漸近的性質を調べるという問題に帰着される。［3］によれば t_0, u_0, u_1 に依存した定数 $\rho\geq 0$, $0\leq\theta<2\pi$ をとれば $t\to+\infty$ のとき

(4) $$u(t)=\rho(1+O(t^{-1}))\,t^{-1/2}$$
$$\times\cos\left(\left(\frac{-\delta}{2}\right)^{1/2}t-\left(\frac{\gamma}{4}\left(\frac{2}{-\delta}\right)^{1/2}-\left(\frac{-\delta}{2}\right)^{1/2}\rho^2\right)\log t+\theta+O(t^{-1})\right)$$

となることがわかる。

本稿では上の問題をより一般的な方程式

(5) $$v''+v\,\Phi(x,v)=0$$

にまで拡張することを試みる。（$u=t^{-1/2}v$ とおけば方程式(2)は上記方程式にまで変換される。）

§1. 方程式と条件

できるだけ一般的な条件の下で方程式(5)を考える事が望ましいのであるがここでは次のような形の方程式を考える。

r と ε を正数とする。方程式

(6) $$u''+u(1+x^{-1}p(u)+x^{-1-\varepsilon}f(x,u))=0$$

を考える。ここで次の条件を仮定する。

(A) $p(u)$ は $2n$ (≥ 0) 次の多項式

(7) $$p(u)=\lambda_0+\lambda_1u+\cdots+\lambda_{2n}u^{2n}$$

で，$n=0$ ならば $\lambda_0\in\mathbb{R}$，$n\geq 1$ ならば $\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_{2n-1}\in\mathbb{R}$，かつ $\lambda_{2n}>0$ をみたす。

(B1)　$f(x,u)$，$(\partial/\partial x)f(x,u)$ は領域

$$D(r)=\{(x,u)\in\mathbb{R}^2\ ;\ x>r,\ -\infty<u<+\infty\}$$

で定義された実数値連続関数。

(B2)　任意の正数 r' に対して，正数 $L(r')$ が存在して，$x>r$，$|u|<r'$ のとき

(8)　$$|f(x,u)|\leq L(r'),\qquad \left|\frac{\partial}{\partial x}f(x,u)\right|\leq L(r')$$

が成立する。

(C)　積分

(9)　$$F(x,u)=2\int_0^u v f(x,v)\,dv,$$

(10)　$$G(x,u)=2\int_0^u v\frac{\partial}{\partial x}f(x,v)\,dv$$

に対し，実数 α_1，α_1'，β_1 が存在して $x>r$，$-\infty<u<+\infty$ をみたす (x,u) に対して一様に

(11)　$$\inf_{|s|\leq|u|} F(x,s)\geq-\alpha_1u^2-\beta_1,$$

(12)　$$\inf_{|s|\leq|u|}(-G(x,s))\geq-\alpha_1'u^2-\beta_1$$

が成立する。

注意　(A) により，

(13)　$$P(u)=2\int_0^u v p(v)\,dv$$

とおけば，実数 α_2，β_2 が存在して，$-\infty<u<+\infty$ に対して

一様に

(14) $$\inf_{|s|\leq|u|} P(s) \geq -\alpha_2 u^2 - \beta_2$$

が成立する。

§2. 定理

u_0, u_0' を任意の実数, x_0 は $x_0 > r$ をみたすとする。

初期条件

(15) $$u(x_0) = u_0, \quad u'(x_0) = u_0'$$

をみたす方程式 (6) の解を $u = U(x)$ とおく。このとき次の定理が成立する。

定理 1. $x_0 > r$ が

(16) $$\alpha_2 x_0^{-1} + \alpha_1 x_0^{-1-\varepsilon} + (1/2)(|\alpha_1'| + \alpha_1') x_0^{-\varepsilon} < 1$$

をみたすとする。このとき $U(x)$ は区間 $x_0 \leq x < +\infty$ 上延長され $x \to +\infty$ のとき

(17) $$U(x) = R_0(\rho, x) \cos(x + \Lambda(\rho)\log x + \Theta_0(\theta, x)),$$

(18) $$U'(x) = -R_1(\rho, x) \sin(x + \Lambda(\rho)\log x + \Theta_1(\theta, x)),$$

(19) $$R_i(\rho, x) = \rho + O(x^{-m(\varepsilon)}),$$

(20) $$\Theta_i(\theta, x) = \theta + O(x^{-m(\varepsilon)}) \qquad (i = 0, 1)$$

をみたす。ここで $\rho = \rho(x_0, u_0, u_0')$ および $\theta = \theta(x_0, u_0, u_0')$ は $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ をみたす積分定数であり, $m(\varepsilon)$, $\Lambda(\rho)$ は

(21) $$m(\varepsilon) = \min\{1, \varepsilon\} \quad (>0),$$

(22) $$\Lambda(\rho) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_{2j} \binom{2j+1}{j} 2^{-2j-1} \rho^{2j} \quad (\in \mathbb{R})$$

によって定められる定数である。

§3. 応用

方程式 (5) よりもより一般的な方程式

(23) $$y'' + s(x) y' + g(x, y) = 0$$

に対しても，変換 $y = z \exp(-(1/2)\int s(x)\,dx)$ を施せばこれは方程式 (5) に帰着される。従って何らかの条件をつければこのような方程式に対しても定理は適用されるはずである。ここでは特に次のような形の方程式

(24) $$u'' + x^{-1} u' + u\,(g_0(u) + x^{-1} g_1(u) + x^{-1-\varepsilon} g_2(x, u)) = 0$$

に対して上の定理を適用して得られる結果を与えよう。方程式 (24) に変換 $u = x^{-1/2} v$ を施せば

(25) $$v'' + v\,Q(x, v) = 0,$$

(26) $$Q(x,v) = g_0(x^{-1/2} v) + x^{-1} g_1(x^{-1/2} v) + x^{-1-\varepsilon} g_2(x, x^{-1/2} v) + (1/4)\,x^{-2}$$

になる。定理を適用しやすくするためにまず次の仮定をおく。

(D) $g_0(u)$，$g_1(u)$ は

(27) $$g_0(u) = 1 + \lambda u^2 + u^{2(1+\varepsilon)} h_0(u),$$

(28) $$g_1(u) = \mu + u^{2\varepsilon} h_1(u)$$

と書ける。ここで，$\lambda \geq 0$ ，$\mu \in \mathbb{R}$ であり，$h_0(u)$, $h_1(u)$ は $-\infty < u < +\infty$ 上定義された実数値連続関数である。

この条件の下では方程式 (25) においては

(29) $$Q(x, v) = 1 + x^{-1}(\lambda v^2 + \mu) + x^{-1-m(\varepsilon)} h(x, v),$$

但し

(30) $$h(x, v) = x^{m(\varepsilon)-\varepsilon}\left(v^{2(1+\varepsilon)} h_0(x^{-1/2} v) + v^{2\varepsilon} h_1(x^{-1/2} v) + g_2(x, x^{-1/2} v)\right) + (1/4)\, x^{m(\varepsilon)-1}$$

($m(\varepsilon) = \min\{1, \varepsilon\}$) となる。従って仮定 (A) , (B1) , (B2) , (C) に対応するものは次のようになる。

(E) 関数 $h(x, v)$ および $(\partial/\partial x) h(x, v)$ は領域 $D(r)$ ($\ni (x, v)$) において定義された実数値連続関数であり，次のような性質をもつ。

(E1) 任意の正数 r' に対し，正数 $L'(r')$ が存在し，$x > r$ ，$|v| < r'$ のとき

(31) $$|h(x, v)| \leq L'(r'), \qquad \left|\frac{\partial}{\partial x} h(x, v)\right| \leq L'(r')$$

が成立する。

(E2) 積分

(32) $$H(x, v) = 2\int_0^v w\, h(x, w)\, dw,$$

(33) $$K(x, v) = 2\int_0^v w \frac{\partial}{\partial x} h(x, w)\, dw$$

を考えるとき，実数 α_3, α_3' , β_3 が存在して，$x > r$, $-\infty < v < +\infty$ をみたす (x, v) に対して一様に

(34) $$\inf_{|s|\leq|v|} H(x, s) \geq -\alpha_3 v^2 - \beta_3,$$

(35) $$\inf_{|s|\leq|v|} (-K(x, s)) \geq -\alpha_3' v^2 - \beta_3$$

が成立する。

このとき，初期条件

(36) $$u(x_0) = u_0 \quad , \quad u'(x_0) = u_0' \qquad (x_0 > r, \ u_0, u_0' \in \mathbb{R})$$

をみたす方程式(24)の解を $u = V(x)$ とおけば次の結果をうる。

<u>定理2.</u> $x_0 > r$ が

(37) $$\alpha_3 x_0^{-1-m(\varepsilon)} + (1/2)(|\alpha_3'| + \alpha_3') x_0^{-m(\varepsilon)} < 1$$

をみたすとする。このとき $V(x)$ は区间 $x_0 \leq x < +\infty$ 上まで延長され $x \to +\infty$ のとき

(38) $$V(x) = S_0(\rho, x) x^{-1/2} \cos(x + \kappa(\rho) \log x + \phi_0(\theta, x)),$$

(39) $$V'(x) = -S_1(\rho, x) x^{-1/2} \sin(x + \kappa(\rho) \log x + \phi_1(\theta, x)),$$

(40) $$S_i(\rho, x) = \rho + O(x^{-m(\varepsilon)}),$$

(41) $$\phi_i(\theta, x) = \theta + O(x^{-m(\varepsilon)}) \qquad (i = 0, 1)$$

をみたす。ここで $\rho = \rho(x_0, u_0, u_0')$, $\theta = \theta(x_0, u_0, u_0')$ は $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ をみたす積分定数であり，$\kappa(\rho)$ は

(42) $$\kappa(\rho) = \frac{\mu}{2} + \frac{3}{8}\lambda\rho^2$$

により定められる定数である。

§4. 例.

Painlevé 方程式 (P_V) に同値な方程式 (2) が方程式 (24) の一つの例となっていることは, (D), (E) の条件をみたしていることを直接計算することにより確めることができる。方程式 (6) の例として次の方程式を考える。

(43) $$u'' + u(1 + x^{-1}u^2 - x^{-2}u^3 \sin(u^3)) = 0$$

$\varepsilon = 1$, $p(u) = u^2$ とおけば任意の $r > 0$ に対し, 条件 (A), (B1), (B2) はみたされる。 $-\infty < u < \infty$ に対して一様に

(44) $$\begin{aligned} F(x, u) &= 2\int_0^u (-v^4 \sin(v^3))\, dv \\ &= \frac{2}{3} u^2 \cos(u^3) - \frac{4}{3}\int_0^u v \cos(v^3)\, dv \\ &\geq \frac{2}{3}(\cos(u^3) - 1) u^2 \geq -\frac{4}{3} u^2 \end{aligned}$$

が成立するから, $\alpha_1 = 4/3$, $\alpha_1' = \beta_1 = 0$ とすれば条件 (C) もみたされる。また $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ とすれば不等式 (14) も成立する。よって定理1より, $x_0 > (4/3)^{1/2}$ のとき初期条件 (15) をみたす方程式 (43) の解 $u = U(x)$ は $x \to +\infty$ のとき

(45) $$U(x) = (\rho + O(x^{-1})) \cos\left(x + \frac{3}{8}\rho^2 \log x + \theta + O(x^{-1})\right)$$

が成立する。ここで $\rho = \rho(x_0, u_0, u_0')$, $\theta = \theta(x_0, u_0, u_0')$ は $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ をみたす積分定数である。

References

[1] R. Garnier, Contribution à l'étude des solutions de l'équation (V) de Painlevé, J. Math. Pures Appl., 46 (1967), 353 - 412.

[2] S. P. Hastings and J. B. McLeod, A boundary value problem associated with the second Painlevé transcendent and the Korteweg - de Vries equation, Arch. Rational Mech. Anal., 73 (1980), 31 - 51.

[3] S. Shimomura, On solutions of the fifth Painlevé equation on the positive real axis II, Funkcial. Ekvac., 30 (1987), 203 - 224.