

## Painlevé 方程式の第 2 種特異について

神戸大理高野 恭一 (Kyoichi Takano)

$\lambda$  と未知関数,  $t$  と独立変数とする Painlevé 方程式  $P_J$  ( $J = I, \dots, VI$ ) は, ある Hamilton 系  $(H_J)$ :  $d\lambda/dt = \partial H_J / \partial \mu$ ,  $d\mu/dt = -\partial H_J / \partial \lambda$  に同値であることが K. Okamoto ([2]) によって示された. ここで  $H_J$  は  $\lambda, \mu$  の多項式 (特に  $\mu$  については 2 次式) で係数は  $t$  の有理関数である. この Hamilton 系と Okamoto に従って Painlevé 系ということにする.  $P_J$  と 2 連立系に書き換える方法はいくつもあるが, Painlevé 系への書き換えは対称性が高く最も優れていると思われる.

$P_J$  の動かない特異点を, Painlevé 系を用いて, 第 1 種と第 2 種とに分類する. すなわち, その点における Poincaré 階数が 0 のとき第 1 種, 1 以上のとき第 2 種とする. 線形単独方程式の場合に準じて, 確定型, 不確定型ともいわれるが, 著者はこういうことにする.

$P_J$  すなわち  $(H_J)$  の動かない特異点における解の 2 パラメータ族を構成すること, いいかえれば, 適当な双正則変換によ

り求積可能な方程式に変換することと考える。このことについて  
 は、最近 S. Shimomura, S. Yoshida と共著で「数学」  
 に論説を書いたので、なるべく繰返しはさけるが、ともかく  
 Painlevé 方程式に対してはこのことが可能であることはわ  
 かってゐる。(H<sub>0</sub>)の第2種特異点  $t=\infty$  において形式変換が収  
 束することと始めて示したとき ([3]), Poincaré 条件が満たさ  
 れないのに何故収束するのかという理由ははっきりしてはい  
 ないが、(H<sub>0</sub>)そのものを扱っていたため、一体どのような方程  
 式に対して同様のことがいえるのかは不明であった。その後  
 S. Yoshida ([5])によりこの点についての解答が与えられ、  
 Painlevé 方程式の第2種特異点はすべて統一的に扱うこと  
 が可能となった。

ところで Painlevé 系の第1種特異点については、正準変換  
 を適当にとることにより  $H_0$  を求積可能な標準形にできると  
 いうことが、一般の Hamilton 系に対する定理という形で明ら  
 かにされた ([1], [4]). すなわち  $t=0$  と  $H=H(t, q, p)$  の第1種  
 特異点とするとき、 $tH$  が非有界領域

$$\{(t, q, p) \in \mathbb{C}^3 \mid |t| < \varepsilon, |q|, |tp|, |qp| < \delta\}$$

において 有界 ならば、形式的正準変換も 同様の領域で収束す  
る という定理である。これは Hamilton 関数の性質が形式的  
 正準変換の収束域に遺伝するというように理解できる。これ

と同様のことが Painlevé 系の第2種特異点に関してもいえないかということに当然考えられる。これについて著者としては満足できる結果が得られたので以下報告する。

Painlevé 系において、第1種特異点とは異なり、第2種特異点に我々の立場からは遙くで退化（している）の簡単ではないが、S. Yoshida の論文 [6] における変換を参考にし、すなわち大体は [6] の変換と正準変換でおきかえると、各  $H_j$  は独立変数  $t$  と正準変数  $q, p$  を適当にとることにより、次のように表わされることになる（第2種特異点は  $\infty$  に移して考えるという習慣に従い、以下  $t=\infty$  が特異点であることに注意する）：

$$H = \lambda qp + H'(t, q, p).$$

ここで

(i)  $\lambda \neq 0$  は定数,

(ii)  $tH'$  は  $D(\underline{\theta}, \bar{\theta}, R, \rho) := \{(t, q, p) \in \mathbb{C}^3 \mid$

$|t| > R, \underline{\theta} < \arg t < \bar{\theta}, |q|, |t^{-1}p|, |qp| < \rho\}$  で有界、

正則で

$$(1) \quad tH' = \sum_{i,j \geq -1} h_{ij}(t) q^{i+1} p^{j+1}$$

と Taylor 展開したとき、 $h_{ij}(t)$  は  $S(\underline{\theta}, \bar{\theta}, R) = \{t \in \mathbb{C} \mid$

$|t| > R, \underline{\theta} < \arg t < \bar{\theta}\}$  で有界正則かつ  $t \rightarrow \infty$  のとき

$t^j$  の巾級数に漸近展開される、

(iii) 南区間  $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$  は  $\cos(\theta + \arg \lambda) = 0$  なる  $\theta$  を唯一つ含み、 $\theta = \underline{\theta}, \bar{\theta}$  に対して  $\cos(\theta + \arg \lambda) \neq 0$ .

この  $H$  に対する Hamilton 系  $(H)$ :  $dq/dt = \partial H/\partial p$ ,  $dp/dt = -\partial H/\partial q$  は  $t = \infty$  に Poincaré 階数 1 の第 2 種特異点をもつてゐる。南区間  $H'$  が上の (ii) の有界性の性質をもつとき

$H'$  は  $D(\underline{\theta}, \bar{\theta}, R, \rho)$  に對して  $t = \infty$  に第 1 種特異点をもつ  
 ということにしよう。このとき  $|tH'| \leq M$ ,  $R\rho \geq 1$  ならば

$$|h_{ij}(t)| \leq M|t|^{-(j-i)^+} / \rho^{\max(i,j)+1}, \quad t \in S(\underline{\theta}, \bar{\theta}, R)$$

であることがわかる。ここで  $a \in \mathbb{R}$  に對して  $a^+ := \max(a, 0)$ .

以上の事実を踏之て、考察すべき Hamilton 系を Poincaré 階数が一般の  $\sigma$  のものに一般化しよう。  $\lambda(t)$  は

$$\lambda(t) = \lambda_0 t^{\sigma-1} + \lambda_1 t^{\sigma-2} + \dots + \lambda_{\sigma-1}, \quad \lambda_0 \neq 0$$

なる次数が  $\sigma-1$  の  $t$  の多項式とし、

$$\Lambda(t) := \int_0^t \lambda(t) dt = (\lambda_0/\sigma)t^\sigma + \dots + \lambda_{\sigma-1}t$$

とする。

$$\operatorname{Re} \Lambda(x) = |t|^\sigma |\lambda_0/\sigma| \cos(\sigma\theta + \arg \lambda_0) + O(t^{\sigma-1}),$$

$\theta = \arg t$  に注意して

$$\cos(\sigma\theta + \arg \lambda_0) = 0$$

なる  $\theta$  に對して方向  $(\theta)$  を  $\Lambda(t)$  の特異方向 ということにする。

次の仮定が大事である。

(A) 角領域  $S(D, \bar{\theta}, \cdot)$  は  $\Lambda(t)$  の特異方向を唯一つ含み  
かつ  $D$  も  $\bar{\theta}$  も  $\Lambda(t)$  の特異方向ではない。

さて我々の考える Hamilton 関数を

$$(2) \quad H = \lambda(t)qP + H'(t; q, P)$$

としよう。ここで  $H'$  は  $D(D, \bar{\theta}, R, P)$  に関して  $t=0$  に第  
1種特異点をもつものとし、 $tH'$  の  $q, P$  について Taylor  
展開を (1) と表わしたとき  $h_{ij}(t)$  は  $S(D, \bar{\theta}, R)$  で有界正則  
で  $t \rightarrow \infty$  のとき  $t^i$  の巾級数に漸近展開されるとする。

$\lambda(t)qP$  を Hamilton 関数とする Hamilton 系は Poincaré  
階数  $k$  の最も簡単なものである。もちろん求種できる。我  
々が考える Hamilton 関数は、この  $\lambda(t)qP$  に  $D(D, \bar{\theta}, R, P)$   
に関して第1種特異点をもつ擾動項を付け加えたものと理解  
できることに注意しておこう。

このとき以下のことがいえる。先づ形式的正準変換に関し  
ては、

定理 1. (A) を仮定すると、 $H = \lambda(t)qP + t^{-1} \sum_{i,j \geq -1} h_{ij}(t) q^{i+1} P^{j+1}$   
を  $H_{\infty} = \lambda(t)qP + t^{-1} \sum_{i,j \geq 0} h_{ij}(\infty) (qP)^{i+j+1}$  に変換する形式  
的正準変換

$$q = \sum_{i \geq 0} a_{-1,i}(t) P^i + Q \sum_{i,j \geq 0} a_{ij}(t) Q^i P^j$$

$$P = \sum_{i \geq 0} b_{i,-1}(t) Q^i + P \sum_{i,j \geq 0} b_{ij}(t) Q^i P^j$$

で次の性質をもつものが唯一つ存在する。

(i)  $a_{ij}(t), b_{ij}(t)$  は  $S(\underline{\Omega}, \bar{\Omega}, R')$  で有界正則で  $t \rightarrow \infty$  のとき  $t^{-1}$  の巾級数に漸近展開され

$$a_{ij}, b_{ij} = O(|t|^{-(j-i)+\delta_{ij} - (1-\delta_{ij})\sigma})$$

(ii)  $a_{00}(\infty) = b_{00}(\infty) = 1$ , 但し  $R' (\geq R) \gg 1$ .

次に収束性に関し

定理 2. (i)  $\sum_{j \geq 0} a_{i,j}(t) P^j$  は  $D'(\underline{\Omega}, \bar{\Omega}, R', \rho') = \{(t, P) \in \mathbb{C}^2 \mid t \in S(\underline{\Omega}, \bar{\Omega}, R'), |t^{-1}P| < \rho'\}$  において一様絶対収束し,  $\varepsilon > 0$  の大きさの正則関数を表わす,

(ii)  $\sum_{i \geq 0} b_{i,j}(t) Q^i$  は  $D'(\underline{\Omega}, \bar{\Omega}, R', \rho') = \{(t, Q) \in \mathbb{C}^2 \mid t \in S(\underline{\Omega}, \bar{\Omega}, R'), |Q| < \rho'\}$  において一様絶対収束し,  $\varepsilon > 0$  の大きさの正則関数を表わす,

(iii)  $\sum_{i,j \geq 0} c_{ij} Q^i P^j$  ( $c = a$  または  $b$ ) は  $D(\underline{\Omega}, \bar{\Omega}, R', \rho')$  において一様絶対収束し,  $\varepsilon > 0$  の有界な正則関数を表わす, 但し  $R' (\geq R)$  は十分大,  $0 < \rho' (\leq \rho)$  は十分小.

Hamilton 系  $(H_{\infty}) : dQ/dt = \partial H_{\infty} / \partial P, dP/dt = -\partial H_{\infty} / \partial Q$  は求積可能である. 実際  $Q, P$  が  $(H_{\infty})$  の第一積分であることより,

$$\mathcal{H} = h_{00}(\infty)$$

$$h(\omega) = \sum_{i \geq 1} (i+1) h_{i,i}(\infty) \omega^i$$

とおくと  $h(m)$  は  $|m| < \rho$  で正則で、 $(H_m)$  の解は

$$Q(t) = c_1 t^{\gamma+h(c_1, c_2)} \exp(\wedge(t)),$$

$$P(t) = c_2 t^{-\gamma-h(c_1, c_2)} \exp(-\wedge(t)),$$

$c_1, c_2$  は任意定数, と表わされる.

以上の定理は、第1種特異点について説明したと同じ意味での、第2種特異点に関する遺伝定理と解釈できる。従って、著者としてはこれを Painlevé 系の動かない特異点における 2パラメータ局所解の表現定理として満足すべき結果が得られたと考えている。

さてこのような局所解に関する定理が、それが直接主張している以上の意味を持つ得るか、すなわち Painlevé 方程式の大域的性質に関して何かいい得るのかという問題が当然ある。最後にこれについて考えていることとは述べてみたい。

$t$  の有理関数微分体  $\mathbb{C}(t)$  に Painlevé 方程式  $P_f$  の解をすべて添加した微分拡大体  $K$  に対し、微分 Galois 群  $G = G(K/\mathbb{C}(t))$  がどのような構造を持つ、というようになると考えてみる。K. Okamoto により Painlevé 系  $(H_f)$  の各点  $t_0$  ( $t_0 \in X := \mathbb{P}^1 - \{\text{動かない特異点}\}$ ) に対し、相空間  $R(t_0)$  が構成されたというので、 $G$  は  $R(t_0)$  の自己同型全体のなす群の部分群である。  $G$  そのものは著者には全く

わからぬ。と、この Painlevé 方程式の動点特異点は極端  
 あることに注意すると、一種のモ/ド/ル/ミ/ー/群が定義される。  
 すなわち、 $(q, p) \in R(t_0)$  に対し  $(t_0, q, p)$  を通る  $(H_J)$   
 の解を  $X$  内の閉曲線に沿って解析接続することにより  $(q, p)$   
 $\in R(t_0)$  が対応する。この対応  $(q, p) \mapsto (q, p)$  は  $R(t_0)$  から  
 $R(t_0)$  への双正則写像で、すべての閉曲線をとることにより  
 「モ/ド/ル/ミ/ー/群」 $\mathcal{M}$  がえられる。 $\mathcal{M}$  は  $\pi_1(X; t_0)$  の生  
 成元に対し決まる双正則写像より生成される  $\text{Aut}(R(t_0))$   
 の部分群で、もちろん  $G$  の部分群でもある。線形方程式  
 に対する Picard-Vessiot 理論から安易な類推をすると、動  
 かない特異点からすべての第 1 種の  $(H_{II})$  に関し  $\mathcal{M}$  が大体  
 $G$  を規定してゐるのではないかと思われぬ。 $(H_J)$  (J=III)  
 に対しは線形方程式の場合の Stokes 現象に対応するもの  
 を付加しなくてはならぬ。ほんやりと考へてゐる  
 ことは、 $\mathcal{M}$  を知る上であるいは Stokes 現象を  $\mathcal{M}$  のもの  
 と定義する上で、局所解の表現定理が使えるかどうかといふ  
 ことである。第 1 種特異点を通る閉曲線に対する  $\mathcal{M}$  の生成  
 元  $f$  に関し  $\mathcal{M}$  は、我々の定理から、 $R(t_0)$  の 1 つの不動点  
 (この特異点において有理的変換に対応する  $R(t_0)$  上の点)  
 の近傍での  $f$  の振舞はよくわかる。例之は  $(H_J)$  <sup>(J=III, IV)</sup> に含まれる  
 ばう  $X - \sigma$  の間に特異点関係があることは、 $f$  の位数は  $\infty$  であ



ることや、不動点の近傍での invariant subsets などとはよくわかる。しかし今のところこれ以上のことはわかっていない。何か御教示願ふことは幸いです。

## References

- [1] Kimura, H., The construction of a general solution of a Hamiltonian system with regular type singularity and its application to Painlevé equations, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 134 (1983), 363-392.
- [2] Okamoto, K., Polynomial Hamiltonians associated with Painlevé equations I, *Proc. Japan Acad. Ser. A*, 56 (1980), 264-268.
- [3] Takano, K., A 2-parameter family of solutions of Painlevé equation (V) near the point at infinity, *Funkcial. Ekvac.*, 26 (1983), 79-113.
- [4] ———, Reduction for Painlevé equations at the fixed singular points of the first kind, *ibid.*, 29 (1986), 99-119.
- [5] Yoshida, S., A general solution of a nonlinear 2-system without Poincaré's condition at an irregular singular point, *ibid.*, 27 (1984), 367-371.
- [6] ———, 2-parameter family of solutions of Painlevé equations (I)~(V) at an irregular singular point, *ibid.*, 28 (1985), 233-248.