数理解析研究所講究録
第683巻 1989年 85-90

Cauchy 問題の解の特異性の伝播について

千葉大理学部　筒井　亨（Toru Tsutsui）

複素領域での Cauchy 問題の解がどこに特異性を持つのか初期 data の singular locus が nonsingular でない場合，依然不明である。一例として，$\mathbb{C}^3\ (\ni(t,x,y))$ で Cauchy 問題

$$(1)\quad \begin{cases} (D_t - D_x - D_y)(D_t + D_x + D_y)u(t,x,y) = 0 \\ u(0,x,y) = 0 \\ D_t u(0,x,y) = \dfrac{1}{xy} \end{cases}$$

を挙げる。この解は，

$$u(t,x,y) = \int_0^t \frac{d\tau}{(x-t+2\tau)(y-t+2\tau)}$$
$$= \frac{1}{2(x-y)}\left\{\log(x-t) - \log(y-t) + \log(y+t) - \log(x+t)\right\}$$

であって，初期 data の singular locus を通る characteristic surface $x \pm t = 0$，$y \pm t = 0$ 以外に $x - y = 0$ 上に特異性を持つ（すなわち，解 u にとっては，初期面の乗っている branch においてだけ，たまたま singular locus $x - y = 0$ が消えているに過

ぎない).

このような現象をどう理解すべきなのか，実はよくわからない。ただし，次のようなことは成り立つ。

$\mathbb{C}^{n+1}$ 内の原点の近傍 Ω における正則関数係数 m 階線型偏微分作用素，

$$P(x,D) = D_0^m + \sum_{\substack{|\alpha| \leqq m \\ \alpha_0 \leqq m-1}} a_\alpha(x) D^\alpha$$

ただし，

$$x = (x_0, x_1, \cdots, x_n) = (x_0, x'), \quad a_\alpha(x) \in \mathcal{O}(\Omega)$$

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}, \quad |\alpha| = \alpha_0 + \cdots + \alpha_n, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$$

を考える。

<u>仮定1</u>． $|\alpha| = m \Rightarrow a_\alpha(x) \equiv a_\alpha \in \mathbb{C}$

$S = \{x_0 = 0\}$，V を $S \cap \Omega$ 内の codim. 1 の analytic subset とし，その既約分解(原点での germ の意味で)を

$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_N$$

$$V_\nu = \{x' \in S \cap \Omega \mid f_\nu(x') = 0\} \qquad (\nu = 1, \cdots, N)$$

とする。$\Omega \cap (S \setminus V)$ の universal covering space 上で正則な函数 $w_h(x')$ $(0 \leqq h \leqq m-1)$ に対して Cauchy 問題

$$(2) \quad \begin{cases} P(x,D)\,u(x) = 0 \\ D_0^h u(0,x') = w_h(x') \qquad (0 \leqq h \leqq m-1) \end{cases}$$

を考える。さらに次の仮定を置く。

<u>仮定2</u>． 主シンボル $g(\xi) = \xi_0^m + \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha$ は $\mathbb{C}[\xi_0, \cdots, \xi_n]$ 内

で1次式の積に分解する：

$$g(\xi) = \prod_{j=1}^{m} \left(\xi_0 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ji} \xi_i\right) = \prod_{j=1}^{m} (\xi_0 - \langle \lambda_j, \xi' \rangle)$$

ただし，$\lambda_j = (\lambda_{j1}, \lambda_{j2}, \cdots, \lambda_{jn}) \in \mathbb{C}^n$，$\xi' = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ と置いた。

仮定3　各 V_ν $(\nu=1,\cdots,N)$ は，$x=0$ で非特異，すなわち，

$$\mathrm{grad}\, f_\nu(0) = \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_1}(0), \cdots, \frac{\partial f_\nu}{\partial x_n}(0)\right) \neq 0$$

仮定4．特性根は単純：すなわち，$\forall j \neq j'$，$\forall \nu = 1, \cdots, N$ に対して，

$$\langle \lambda_j, \mathrm{grad}\, f_\nu(0) \rangle \neq \langle \lambda_{j'}, \mathrm{grad}\, f_\nu(0) \rangle$$

各 $\nu = 1, \cdots, N$ に対して，V_ν を通る特性超曲面 K_ν を

$$\begin{cases} \dfrac{\partial k_{j\nu}}{\partial x_0}(x) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ji} \frac{\partial k_{j\nu}}{\partial x_i}(x) = 0 \\ k_{j\nu}(0, x') = f_\nu(x') \end{cases}$$

の正則解 $k_{j\nu}(x)$ によって，$K_{j\nu} = \{k_{j\nu}(x) = 0\}$ で定義する．

さらに，超曲面 $K'_{j,JJ',\mu\nu}$ $(j, J, J' = 1, \cdots, m,\ J \neq J',\ \mu, \nu = 1, \cdots, N,\ \mu \neq \nu)$ を，

$$K'_{j,JJ',\mu\nu} = \{ c_{j,JJ',\mu}(x) k_{j\nu}(x) = c_{j,JJ',\nu}(x) k_{j\mu}(x) \}$$

ただし，

$$c_{j,JJ',\mu}(x) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_{Ji} - \lambda_{J'i}) \partial_i k_{j\mu}(x)$$

で定義する．$K'_{j,JJ',\mu\nu}$ は $\xi_0 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ji} \xi_i$ に関して特性的であるが，$V_1, \cdots, V_N$ を通らない。

$K_j = \bigcup_{\nu=1}^{N} K_{j\nu}$，$K'_j = \bigcup_{J \neq J'} \bigcup_{\mu \neq \nu} K'_{j,JJ',\mu\nu}$ と置く。($N=1$ ならば $K'_j = \phi$ に注意)．

定理　以上の仮定の下で Cauchy 問題 (2) の unique な

解 $u(x)$ は

$$u(x) = \sum_{j=1}^{m} u_j(x)$$

$$u_j(x) \in \tilde{\mathcal{O}}(\Omega' \setminus (K_j \cup K_j'))$$

と書ける．ここで，Ω' は Ω に含まれる $x=0$ の近傍．

証明は Wagschal の idea によって逐次近似によって成される．だが，いかにも仮定が多すぎるし，その仮定は証明がうまくいくために付けたものにほかならない．

すでに V が非特異な超曲面が交叉したものだという仮定自体，本質をついていないもののように思える．

例を挙げよう．

$$(3)\quad \begin{cases} (D_t - D_x)(D_t - D_y)u(t,x,y) = 0 \\ u(0,x,y) = 0 \\ D_t u(0,x,y) = (x^2 - y^3)^\lambda \qquad (\lambda \in \mathbb{C}) \end{cases}$$

解は，$x^2 - y^3 = 0$ を通る characteristic surface

$$f_1 = x^2 - (y+t)^3 = 0$$

$$f_2 = (x+t)^2 - y^3 = 0$$

上に singularity を持つことは確実であるが，それ以外にどこに singularity を持つか？ (3) の解 u は次の積分で与えられる。

$$u(t,x,y) = \int_0^t \{(x+t-s)^2 - (y+s)^3\}^\lambda ds$$

この関数uの特異性は、被積分関数の特異点集合

$$F(\zeta) = (x+t-\zeta)^2-(y+\zeta)^3 = 0$$

において、まず、ζが端点と一致するという条件から

$$V(f_1)=\{f_1=0\} \qquad V(f_2)=\{f_2=0\}$$

(end point singularity) および $F(\zeta)$ の判別式集合上に現れる (pinching singularity) (cf. Kobayashi, Math. Ann. 269, 217–234 (1984)). $F(\zeta)$の判別式を計算してみると

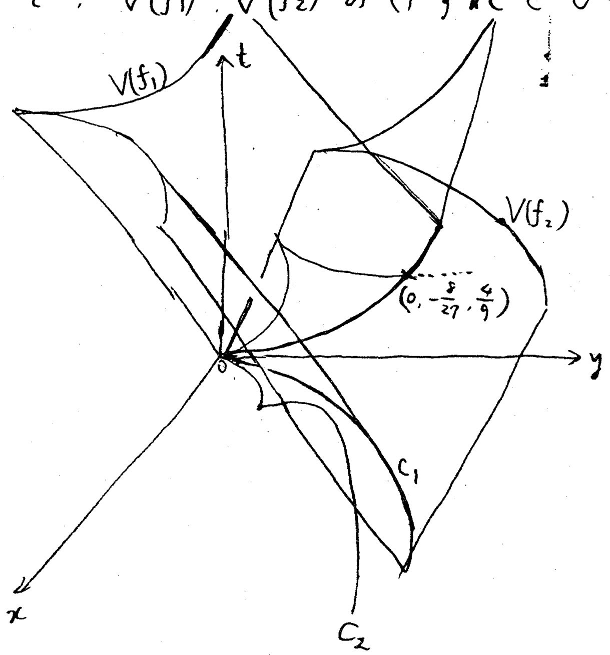
$$(x+y+t)^3\{4-27(x+y+t)\}$$

であるから、次の2つの集合上にも解uの特異性がある。

$$V(f_3)=\{f_3=x+y+t=0\}$$

$$V(f_4)=\left\{f_4=x+y+t-\frac{4}{27}=0\right\}$$

$V(f_3)$, $V(f_4)$は(D_t-D_x), (D_t-D_y) のいずれに対しても特性的。$V(f_3)$ は初期dataのsingular locus $t=x^2-y^3=0$ の特異点 $t=x=y=0$ を通る。又、$V(f_4)$は点$(t,x,y)=(0,-\frac{8}{27},\frac{4}{9})$ において、$V(f_1)$, $V(f_2)$ のいずれとも接している。



なお、図で C_1, C_2 と書いたのは

$$V(f_1, f_2) = C_1 \cup C_2$$

$$C_1 = \{t = x^2 - y^3 = 0\}$$

$$C_2 = \{x^2 - (y+t)^3 = (3y^2 + 2x) + (3y+1)t + t^2 = 0\}$$

と2つの既約成分に分かれるから、それを大体書き込んだものである。

$\mathbb{C}^{n+1}$ 内での原点の近傍で正則な関数を係数とする偏微分作用素 $P(x, D) = D_0^m + \sum_{\substack{|\alpha| \le m \\ \alpha_0 \le m-1}} a_\alpha(x) D^\alpha$ の主表象 $g(x, \xi) = \xi_0^m + \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ に対して $g(0, x'; \xi)$ の ξ_0 の多項式としての判別式を $h(x', \xi')$ とする。初期data $w_h(x')$ の特異点集合を $V = \{f(x') = 0\}$ とし、それに対して解 u の特異点集合を Σ とすると、以上の例で見たように、$\Sigma_0 = \Sigma \cap \{t = 0\}$ は必ずしも V と一致しないが、次のように予想している。

予想　Σ_0 は V と $h(x', \xi')$ とから構成できる。