数理解析研究所講究録
第683巻 1989年 103-115

非線形常微分方程式の特異点の定性的理論

東大・理　村田嘉弘（Yoshihiro Murata）

§0. 序

複素領域で定義された非線形常微分方程式の解には，タイプの異なる次のような2種類の特異点が現れる：

① 方程式の形から予測できるどの解にも共通な位置に現れる特異点（動かない特異点という）

② 方程式の形からだけでは予測できない解毎に異なる位置に現れる特異点（動く特異点という）

例

(E) $$y'' = -\frac{(y')^2}{y} + \frac{y'}{x} - \frac{y}{2x^2}$$

一般解：$y = \sqrt{x(A + B\log x)}$

$x = 0$：動かない特異点，超越的

$x = e^{-\frac{A}{B}}$：動く特異点，代数的

線形方程式では①の特異点しかありえないが，非線形になると①以外に②の特異点もありうるのである．

非線形方程式における動かない特異点，動く特異点は古くから研究の対象となり，L. Fuchs, Briot - Bouquet, Picard, Painlevé, Garnier, Malmquist, Chazy, 福原, 木村, 松田の諸先生方により深く研究されてきた。その歴史的成果は[1], [2], [3], [8]を参照されたい。本稿では, Painlevéと木村先生の研究を踏まえて, 筆者が[6], [7]で発表した連立有理的方程式の特異点についての定性的理論の要点を紹介しよう。尚, 当初は動く特異点を持たない方程式についてもふれる予定であったが, それは今後の機会に譲ることにしたい。

§1. 非線形方程式の特異点におけるPainlevéの定理, 木村の定理

1° 以下, 本稿では次の記号を使う。

[記号] $D \subset \mathbb{C}$: 領域

$\mathcal{O}_D$: D上の正則函数(独立変数はx)全体のなす環

$\mathcal{O}_D[y_1, \cdots, y_n]$: $\mathcal{O}_D$係数の多項式環

$P, Q \in \mathcal{O}_D[y_1, \cdots, y_n]$のとき

$(P, Q) = 1 \iff P, Q$は互いに素

2° 1階単独方程式の特異点の定性的理論

$$(E_1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \qquad \left[P, Q \in \mathcal{O}_D[y], \quad (P, Q) = 1 \right]$$

に対し, $y = \dfrac{1}{v}$で方程式を書き直すと,

$$(E_1)_2 \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{P_2(x, v)}{Q_2(x, v)} \qquad \left[P_2, Q_2 \in \mathcal{O}_D[v], \quad (P_2, Q_2) = 1 \right]$$

このとき，不動特異点の集合Θを次で定める：

$$\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2$$

$$\Theta_1 = \{ \zeta \in D \mid Q(\zeta, \eta) \equiv 0 \}$$

$$\Theta_2 = \{ \zeta \in D - \Theta_1 \mid {}^{\exists}\eta \in \mathbb{C} \ \text{s.t.}\ P(\zeta, \eta) = Q(\zeta, \eta) = 0 \}$$

$$\cup \{ \zeta \in D - \Theta_1 \mid P_2(\zeta, 0) = Q_2(\zeta, 0) = 0 \}$$

（Θ_i $(i=1,2)$を第i種不動特異点という）

Φを(E_1)の解とすると，次の定理が成り立つ。

定理α（Painlevé [9]）

(1) Φが$a \in D - \Theta$上特異点ωを持てば，ωは代数的特異点である。(i.e. 動く特異点は代数的特異点である)

(2) Φが$\zeta \in \Theta_2$上超越特異点ωを持てば，ωは通性超越特異点である。(i.e. Φが$\zeta \in \Theta$上真性特異点を持てば，$\zeta \in \Theta_1$である) ▨

定理β（T. Kimura [4]）

$\mathcal{R}$をΦのRiemann面とする。Φが$\zeta \in \Theta_1$上真性超越特異点ωを持ち，ωでの集積値集合が$S_\omega \subset \mathbb{P}$であるとする。このとき，

(1) $S_\omega = \mathbb{P}$

(2)（Picard型の性質）Φはωの任意の近傍で，$\mathbb{C} - \{ \eta \in \mathbb{C} \mid P(\zeta, \eta) = 0 \}$のすべての値をとる。▨

§2. n連立方程式の特異点の定性的理論

1° 主結果

$$
(E_n) \quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{P_1(x, y_1, \cdots, y_n)}{Q_1(x, y_1, \cdots, y_n)} \\ \quad \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = \dfrac{P_n(x, y_1, \cdots, y_n)}{Q_n(x, y_1, \cdots, y_n)} \end{cases}
$$

$$\left[\; P_\ell,\ Q_\ell \in \mathcal{O}_D[y_1, \cdots, y_n],\quad (P_\ell, Q_\ell) = 1 \quad (\ell = 1 \sim n) \;\right]$$

に対して，自然に不動特異点集合

$$\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2 \cup \cdots \cup \Theta_{n+1}$$

（Θ_i は第 i 種不動特異点集合）

を定めることができる。

また，定理 α, β の自然な一般化が成り立つ。

以下では，この結果（特に定理 α）の解説をしよう。

2° n項解析函数の特異点

(E_n) の解 $\Phi = (y_1, \cdots, y_n)$ は n 個の解析函数の組からなるベクトル値の函数であり，通常の単独の解析函数とは若干異なる所がある。

$\boxed{\text{定義 1}}$　$a \in D$ での主要部有限な収束 Puiseux 級数の n 個の組 $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ を D 上解析接続してできる解析函数を n 項解析函数

といい，Φとかく。またそのRiemann面を$\mathcal{R}$とかく。Φの取る値は$(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$の各成分が$x=a$上$\infty$を取らないとき，

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R} \arrow[r, "\hat{\Phi}_0"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{C}^n, & (\varphi_1,\cdots,\varphi_n) \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & (\varphi_1,\cdots,\varphi_n)(a) \in \mathbb{C}^n \\ D & & a & \end{tikzcd}$$

で定める。▨

Φの取る値が∞になるところを考察するために，$\mathbb{C}^n$に無限遠点を付け加えよう。

$\boxed{\text{定義 2}}$ n次元コンパクト多様体Mが$\mathbb{C}^n$の有理的コンパクト化であるとは，Mが次の条件を満たすことである。

1 $\exists A \subset M$ 解析的集合 s.t. $M - A \cong \mathbb{C}^n$

2 $\exists M$上のatlas $\{(U_i, \kappa_i)\}_{i=1}^m$ s.t.

(1) $U_1 = M - A = \mathbb{C}^n$, $\kappa_1 = id : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$

(2) $\kappa_j \circ \kappa_i^{-1} : (y^i) \longrightarrow (y^j)$, $y^j_k = R^{ij}_k(y^i) \in \mathbb{C}(y^i)$

(i.e. R^{ij}_k は y^i の有理式) ▨

有理的コンパクト化は具体的には次のようになる。

$n=1$ のとき　$M = \mathbb{P}^1$

$n=2$ のとき　Mは有理曲面となる（小平，Morrow）

$n \geqq 3$ のとき　$\mathbb{P}^n$, $\underbrace{\mathbb{P}\times\cdots\times\mathbb{P}}_{n}$ 等．完全には決定されていない。

$\mathbb{C}^n$の有理的コンパクト化Mを1つとると，定義1の$\hat{\Phi}_0$は正則写像$\hat{\Phi}$に自然に拡張され，immersion $\pi\times\hat{\Phi}$ができる（[6], 1.1, 2°参照）：

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{R} \arrow[r, "\hat{\Phi}"] \arrow[d, "\pi"'] & M, \\
D &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{R} \arrow[r, "\pi\times\hat{\Phi}"] \arrow[dr, "\pi"'] & D\times M \arrow[d, "pr"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\
& D
\end{tikzcd}
$$

$\pi\times\hat{\Phi}$（または$(\pi\times\hat{\Phi})(\mathcal{R})$）が方程式$(E_n)$の解曲線に当たる。

最後にΦの特異点wでの集積値集合$S_w\subset M$を定義しよう。

定義3 Φが特異点wを持つとき，

$$S_w=\bigcap_{r>0}\overline{\Phi(\mathcal{U}_r)}\subset M$$

をwでの（Mにおける）集積値集合という。ただし，$\mathcal{U}_r$はwのr近傍で，$\overline{}$はMの中での閉包を意味する。

また超越特異点wにおいて

$S_w=\{1点\}$のとき，wは（Mにおいて）通性超越特異点

$S_w=$無限集合のとき，wは（Mにおいて）真性超越特異点

であるという。▨

（注）S_wはMの取り方により変わり，$n\geq 2$のときは通性・真性という概念がa prioriな意味を持たないことに注意する。（[6], 1.1, 4°参照）

3° (E_n)の拡張

$\mathbb{C}^n$の有理的コンパクト化Mを1つ固定する。$X=D\times M$ の atlas $\{(\mathcal{U}_i, \theta_i)\}_{i=1}^m$ を次のように取る：

1　$\mathcal{U}_i = D\times U_i$, $\theta_i = id \times k_i$

2　$\theta_j \cdot \theta_i^{-1} = id \times (k_j \cdot k_i^{-1})$ ： $(x, y^i) \longmapsto (x, y^j)$

n連立方程式(E_n)は今後，ファイバー空間 $\mathcal{F}=(X, pr, D)$ の全空間Xの chart $\theta_1(\mathcal{U}_1) = D\times\mathbb{C}^n$ 上の方程式と考えることにする。座標変換 $\theta_j\cdot\theta_i^{-1}$ により(E_n)と compatible な $\theta_i(\mathcal{U}_i)$ 上の方程式

$$
(E_n)_i \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dy_1^i}{dx} &= \frac{P_1^i(x, y^i)}{Q_1^i(x, y^i)} = \frac{Y_1^i(x, y^i)}{X^i(x, y^i)} \\
&\vdots \\
\frac{dy_n^i}{dx} &= \frac{P_n^i(x, y^i)}{Q_n^i(x, y^i)} = \frac{Y_n^i(x, y^i)}{X^i(x, y^i)}
\end{aligned}
\right.
$$

を作ろう。ただし，$X^i, Y_1^i, \cdots, Y_n^i$ は互いに素とする。

4° 不動特異点集合Θの定義

$(E_n)_i$に対して autonomous system

$$
(A_n)_i \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt^i} &= X^i \\
\frac{dy_\ell^i}{dt^i} &= Y_\ell^i \qquad (\ell = 1\sim n)
\end{aligned}
\right.
$$

を考える。

$\boxed{\text{定義4}}$　$pr_i : \theta_i(\mathcal{U}_i) = D\times k_i(U_i) \longrightarrow D$, $(a, b)\mapsto a$ とする。

$$\mathcal{S}_i = \{(a, b) \in \theta_i(\mathcal{U}_i) \mid (\Delta_n)_i \text{ の}\exists\text{解 } (x, \phi)(t^i) \quad (t^i \in \Delta \subset \mathbb{C})$$
$$\text{s.t. } (x, \phi) \text{ は } (a, b) \text{ を通り},$$
$$pr_i(\{(x, \phi)(t^i) \mid t^i \in \Delta\}) = \{a\}\},$$

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^{m} \theta_i^{-1}(\mathcal{S}_i) \subset X = D \times M$$

とおき，$\mathcal{S}$ を X における (E_n) の特異初期点集合（singular initial set）と呼ぶ。▨

命題1　$\mathcal{S}$ は X の解析的集合である。▨

よって，$\mathcal{S}$ を次のように既約分解しよう．

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\sigma \in \Lambda_1} \mathcal{S}_\sigma^{(1)} \cup \cdots \cup \bigcup_{\sigma \in \Lambda_k} \mathcal{S}_\sigma^{(k)} \cup \cdots \cup \bigcup_{\sigma \in \Lambda_{n+1}} \mathcal{S}_\sigma^{(n+1)}$$

$$\operatorname{codim}_{\mathbb{C}} \mathcal{S}_\sigma^{(k)} = k, \quad \{\mathcal{S}_\sigma^{(k)}\} \text{ は locally finite}$$

命題2　$^\forall \mathcal{S}_\sigma^{(k)}$ に対し，$pr(\mathcal{S}_\sigma^{(k)}) = \{1\text{点}\}$ または D である．▨

そこで，

定義5　$pr(\mathcal{S}_\sigma^{(k)}) = \{1\text{点}\}$ のとき，$\mathcal{S}_\sigma^{(k)}$ を第k種の垂直特異点集合（vertical singularity set）といい，$pr(\mathcal{S}_\sigma^{(k)}) = D$ のとき，$\mathcal{S}_\sigma^{(k)}$ を第k種の被覆特異点集合（covering singularity set）という．▨

$\mathcal{S}_\sigma^{(k)}$ の具体的形状については，[6], 3.7（または [8], §3）の図を参照してもらいたい．

$\boxed{\text{定義 6}}$ $\Theta_1 = \{\xi \in D \mid {}^{\exists}$垂直特異点集合 $S^{(1)}_{\xi}$ s.t. $pr(S^{(1)}_{\xi}) = \{\xi\}\}$

$\Theta_k = \{\xi \in D - \Theta_1 \cup \cdots \cup \Theta_{k-1} \mid {}^{\exists}$垂直特異点集合 $S^{(k)}_{\xi}$ s.t. $pr(S^{(k)}_{\xi}) = \{\xi\}\}$

$(k = 2 \sim n+1)$

$\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2 \cup \cdots \cup \Theta_{n+1}$

とおき，Θ_kを第k種の不動特異点集合，Θを不動特異点集合と呼ぶ．また，Θ_kの元を第k種の不動特異点，Θの元を不動特異点と呼ぶ．▨

$\boxed{\text{命題 3}}$ ΘはDの中でdiscreteである．▨

$\boxed{\text{命題 4}}$ 被覆特異点集合は有限個である．▨

(E_1)の場合，定義6によるΘとPainlevéの定義によるΘ（§1, 2°）とは同一の集合であることが確かめられる（[6] §2）．

5° 定理α, βの一般化

[A] 定理αの一般化（[6] §1, 1.5）

$\boxed{\text{定理 1（基本定理）}}$

Φを(E_n)の一般解とする．Φが$a \in D$上特異点ωを持ち，ωでの集積値集合が$S_\omega \subset M$であるとする．また，$S_a = pr^{-1}(a) \cap S$とおく．

(1) $\{a\} \times S_\omega$が点$p \in X - S$を含めば，$\{a\} \times S_\omega = \{p\}$であり，$\omega$は代数的特異点である。

(2) ωが超越的特異点ならば，$\{a\} \times S_\omega \subset S_a$である。

系（被覆特異点集合の役割）

(E_n) の解の l-parameter family $\Phi(x:c)$ $(c=(c_1,\cdots,c_l))$ が $x=a(c)\in D-\Theta$ 上超越特異点 $\omega(c)$ を持ち，集積値集合が $S_\omega(c)$ であるとすれば，集合 $\{a(c)\}\times S_\omega(c)$ は被覆特異点集合の中を動く。
(i.e. 被覆特異点集合は動く超越特異点の通り道である。) ▨

定理2（定理αの一般化）

Φ を (E_n) の解とする。

(1) (E_n) が被覆特異点集合を持たないとする。

Φ が $a\in D-\Theta$ 上特異点 ω を持つ $\Rightarrow$ ω は代数的特異点

Φ が $\tau\in\Theta_{m_1}$ 上特異点 ω を持つ $\Rightarrow$ ω は代数的または通性超越的特異点

（よって，Φ が $\tau\in\Theta$ 上真性特異点を持つ $\Rightarrow$ $\tau\in\Theta_1\cup\cdots\cup\Theta_n$）

(2) (E_n) が第1〜第$(n-1)$種被覆特異点集合を持たないとする。

Φ が $a\in D-\Theta$ 上または $\tau\in\Theta_{m_1}$ 上特異点 ω を持つ

$\Rightarrow$ ω は代数的または通性超越特異点

（よって，Φ が $\tau\in\Theta$ 上真性特異点を持つ $\Rightarrow$ $\tau\in\Theta_1\cup\cdots\cup\Theta_n$）

(3) (E_n) が第1〜第$(n-1)$種の被覆特異点集合を持つとき，Φ は $a\in D-\Theta$ 上真性特異点を持ちうる。▨

(E_1) はどんな場合も被覆特異点集合を持たない。そこで $n=1$ として(1)を読むと，これは取りも直さず (E_1) に対する定理αである。

〔B〕 定理βの一般化（〔7〕, 1, 3°）

$\boxed{\text{補題}}$ 次の2条件を仮定する。

(C1) (E_n)は第1～第$(n-2)$種の被覆特異点集合を持たない。

(C2) $a \in D - \Theta_1 \cup \cdots \cup \Theta_{n-1}$

(i.e. $a \in D - \Theta$ または $a \in \Theta_n \cup \Theta_{n+1}$)

すると、解析的集合 $\mathcal{S}_a = pr^{-1}(a) \cap \mathcal{S} = \{a\} \times M \cap \mathcal{S}$ は

$$\mathcal{S}_a = \bigcup_{\tau \in \Lambda_0} \{p_\tau\} \cup \bigcup_{\sigma \in \Lambda_1} \Big\{ \bigcup_{k \in \Lambda_\sigma} A_k^{(\sigma)} \Big\} \subset D \times M$$

と既約分解される。ただし、$\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_\sigma$は有限集合であり、$p_\tau$は点、$A_k^{(\sigma)}$は$\dim_{\mathbb{C}} A_k^{(\sigma)} = 1$の既約成分、$\{\bigcup_{k \in \Lambda_\sigma} A_k^{(\sigma)}\}$は連結集合、$\{\bigcup_{k \in \Lambda_\sigma} A_k^{(\sigma)}\} \cap \{\bigcup_{k \in \Lambda_{\sigma'}} A_k^{(\sigma')}\} = \phi$ ($\sigma \neq \sigma'$のとき) ▨

$\boxed{\text{定理3（定理}\beta\text{の一般化）}}$

$p_j : D \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x, y_1, \cdots, y_n) \longrightarrow y_j$ とおく。

次の3条件を仮定する。

(C1), (C2) 上の補題と同一

(C3) 任意のσ, kについて、$A_k^{(\sigma)} \not\subset S$

[ただし、$S_i = \{(A_n)_i$の特異点$\} \subset \mathcal{S}_i$に対し、$S = \bigcup_{i=1}^{m} \theta_i^{-1}(S_i)$ とおいた。定義4と比べよ。]

Φを(E_n)の解とし、そのRiemann面をRとする。Φが$x=a$上特異点wを持ち、集積値集合がS_wであるとすると、次のことが成り立つ。

(I) $\exists \sigma,\ \exists \Gamma_\sigma \subset \Lambda_\sigma$ s.t. $\{a\} \times S_w = \bigcup_{k \in \Gamma_\sigma} A_k^{(\sigma)}$

(i.e. $\{a\} \times S_w$ は有限個の代数曲線の和集合である.)

(II) (Picard型の性質)

$X = D \times M$ 上の atlas (U_i, θ_i) で次の条件を満たすものを考える.

$$
(C*) \begin{cases} (1) & \exists \text{解析的集合 } A_i \subset X \text{ s.t. } U_i = X - A_i \\ (2) & \theta_i(U_i) = D \times \mathbb{C}^n \\ (3) & \{a\} \times S_w \cap U_i \neq \phi \end{cases}
$$

もし, ある j に対し,

$$p_j \circ \theta_i(\{a\} \times S_w \cap U_i) = \bigcup_{k \in \Gamma_\sigma} p_j \circ \theta_i(A_k^{(\sigma)} \cap U_i)$$

が無限集合ならば,

(i) $E_j = \mathbb{C} - \bigcup_{k \in I_\sigma} p_j(\theta_i(A_k^{(\sigma)} \cap U_i) - S_i)$ は有限集合. ただし,

$I_\sigma = \{k \in \Gamma_\sigma \mid p_j \circ \theta_i(A_k^{(\sigma)} \cap U_i)$ は無限集合$\}$

(ii) w の任意の近傍 $\mathcal{U} \subset R$ に対し, $\exists$開集合 $V \subset \mathcal{U}$ s.t. $(\pi \times \Phi)(V) \subset U_i$, $p_j \circ \theta_i \circ (\pi \times \Phi)$ は V 上 $\mathbb{C} - E_j$ のすべての値をとる.

参考文献

[1] Hille, E., Ordinary Differential Equations in the Complex Domain, John Willey & Sons, 1976

[2] Hukuhara, M., Kimura, T., Matuda, T., Equations différentielles

Ordinaires du Premier Ordre dans le Champ Complexe, Publications of Japan, 7, 1961.

[3] Ince, E.L., Ordinary Differential Equations, Dover, 1956.

[4] Kimura, T., Sur les généralization d'un théorème de Malmquist, Comment. Math. Univ. Sancti Pauli 2 (1953), 47-53

[5] Kimura, T., Sur les points singuliers essentiel mobiles des équations differentielles du second order, Comment. Math. Univ. Sancti Pauli 5 (1956), 81-94.

[6] Murata, Y., On fixed and movable singularities of systems of rational differential equations of order n, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 35, no 3 (1988), 439-506.

[7] Murata, Y., The Picard type theorem for essential singularities of solutions of systems of n rational differential equations, J. Differential Eq., to appear

[8] 村田嘉弘，非線形常微分方程式の特異点，京大数理研講究録「微分方程式の数式処理システムの研究」1988年10月

[9] Painlevé, P., Leçons sur la théorie analytique des équations differentielles, professées à Stockholm, OEuvres de Paul Painlevé, t III, Centre national de la recherche scientifique. France, 1975.