数理解析研究所講究録 116
第683巻 1989年 116-120

超幾何微分方程式の幾何学的一般化

九州大学 理学部 吉田正章
Masaaki YOSHIDA

超幾何微分方程式は，様々な方向で一般化が考えられている。本稿では，Gaußによって発見された，だ円曲線の族と超幾何微分方程式（HGDE）の関係を復習し，だ円曲線の族の代りに，色々な代数多様体の族を考えることにより，HGDEの一般化を試みる。

だ円曲線の族とHGDEの関係： 記号を用意．

$C(x)$ ： $s^2 = t(1-t)(1-xt)$ だ円曲線

$X := \mathbb{C} - \{0,1\}$ ： パラメタ x の空間

$\eta(x)$ ： $C(x)$ 上の1つの正則微分，x に正則に依存

$\gamma_1(x), \gamma_2(x)$ ： $H_1(C(x), \mathbb{Z})$ の基底で交点行列が $\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$ となるもの，x に連続に依存

$\omega_i(x) = \int_{\gamma_i(x)} \eta(x)$ ： 周期 $i = 1, 2$

このとき，$\omega_1(x), \omega_2(x)$ は HGDE

$$x(1-x)u'' + \{c-(a+b+1)x\}u' - ab\,u = 0$$

$(a=b=1/2,\ \ c=1)$ の線型独立解である。写像

$$\varphi:\ X \ni x \longmapsto \omega_1(x):\omega_2(x) \in \mathbb{P}^1$$

の像は上半平面 $H=\{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,z>0\}$ で，Monodromy 群は

$$\Gamma(2) := \{X \in SL(2,\mathbb{Z}) \mid X \equiv \mathbb{1}_2 \bmod 2\}$$

に共役で，

$$\pi := \varphi^{-1}:\ H \longrightarrow X \quad (\text{projection}) \text{ は } \bmod \Gamma(2).$$

一般化の試み： だ円曲線の代りに色々な代数多様体をもってきて，HGDEの代りにどんなものが出てくるかを調べよう。何をもってきても，ある線型微分方程式が出てくることは分っているが，その方程式がよく分らないと，何の為にやってるんだか分らない。成功例：

(i) 特殊な曲線の特殊な族，方程式は，Appell-Lauricella の超幾何微分方程式 F_D. Picard-寺田-Deligne-Mostow による.

(ii) K3曲面の特殊な族，方程式は同上の F_D. 志賀弘典による.

(iii) 2次元Abel多様体の族，方程式は2つの F_D (3変数)の“外積”. 佐々木武との共同研究

本稿では，(ii) とは異る，K3 曲面の特殊な族を扱う。記号：

$l_j := \{(t^1, t^2, t^3) \in \mathbb{P}^2 \mid v_{1j} t^1 + v_{2j} t^2 + v_{3j} t^3 = 0\}$

$(1 \leqq j \leqq 6)$：$\mathbb{P}^2$ 上の 6 本の直線

$l := \{l_1, \cdots, l_6\}$

X：一般の位置にある配置 l の全体　(4次元)

$S(l)$：l で分岐する $\mathbb{P}^2$ の 2 枚の cover の 15 個の特異点を解消して得られる K3 曲面.

$\eta(l) := \prod_{j=1}^{6} (v_{1j} s^1 + v_{2j} s^2 + v_{3j})^{-\frac{1}{2}} ds^1 \wedge ds^2$：$S(l)$ 上の 1 つの正則 2 次微分．l に正則に依存.

$\gamma_1'(l), \cdots, \gamma_6'(l) \in H_2(S(l), \mathbb{Z})$：任意の代数的 cycle と直交し，交点行列 $I = (I_{ij})$，$I_{ij} = \gamma_i'(l) \cdot \gamma_j'(l)$ が l に依存せずかつ，$\gamma_1(l), \cdots, \gamma_6(l) \in H_2(S(l), \mathbb{Z})$ があって $\gamma_i' \cdot \gamma_j = \delta_{ij}$ となっているもの．l に連続に依存.

I は対称で符号が $(2+, 4-)$ である.

$\omega_j(l) := \int_{\gamma_j(l)} \eta(l)$　：　周期　$j = 1, 2, \cdots, 6$.

$Q := \{(z^1, \cdots, z^6) \in \mathbb{CP}^5 \mid \sum_{i,j} I_{ij} z^i z^j = 0\}$：2次超曲面.

さて 周期 $\omega_j(l)$ は Riemann の関係式と不等式をみたす：

$$\sum_{i,j} I_{ij}\, \omega_i(l)\, \omega_j(l) = 0,$$

$$\sum_{ij} I_{ij}\, \omega_i(\ell)\, \overline{\omega_j(\ell)} > 0 .$$

写像 φ を

$$\ell \longmapsto \omega_1(\ell) : \cdots : \omega_6(\ell) \in \mathbb{P}^5$$

と定義すると φ による X の像は $Q \subset \mathbb{P}^5$ 内の領域であることが分る. いわゆる 4次元の IV 型領域である.

Monodromy 群は

$$\{ X \in GL(6,\mathbb{Z}) \mid {}^tX I X = I \ ,\ X \equiv \mathbb{1}_6 \mod 2 \}$$

である.

さて, 6本の一般の位置にある直線のうち, 4本は勝手な所にもってこれるから, ℓ を決める (v_{ij}) を以下のように取る.

$$(v_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & x^1 & x^2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & x^3 & x^4 \end{pmatrix}.$$

すると, $\omega_1, \cdots \omega_6$ は x の関数として, 次の偏微分方程式系 の線型独立解である.

$$(E): \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} = g_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^4} + \sum_1^3 a_{ij}^k \frac{\partial u}{\partial x^k} + a_{ij}^0 u \qquad 1 \le i,j \le 6 .$$

ここに,

$$g_{11} = \frac{x^2x^3 - x^4}{x^1(1-x^1)} - \frac{x^3(x^4-x^2)}{x^1(x^1-x^3)} - \frac{x^2(x^4-x^3)}{x^1(x^1-x^2)}$$

等 (他の係数は略す) となる.

$Q \subset \mathbb{P}^5$ は2次超曲面故, Q 上に flat conformal structure が canonical に存在している. それの φ による X へのひきもどしが

$$g = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i dx^j$$

に conformal である. とくに, g は flat である.
実は, (E) の他の係数 a^*_{**} は g から決まることが一般的に分っている。

微分方程式 (E) は新しいものでなく, 青本-Gel'fand の超幾何方程式 $E(k,n;\alpha_1,\cdots,\alpha_6)$ の特別な場合 $E(3,6;1/2,\cdots,1/2)$ に一致している.

以上述べたことの, もう少しくわしいことは,
松本-佐々木-吉田: The period map of a 4-parameter family of K3 surfaces and the Aomoto-Gelfand hyp. geom. ftn. of type (3.6). Proc J. Acad. (1988).
にあり, くわしいことは
松本-佐々木-吉田: On the Aomoto-Gel'fand HGDE of type (3,6) に書く予定です。