数理解析研究所講究録
第684巻 1989年 123-136

相互作用方程式と逆散乱法

静大理　米山　徹 (Yoneyama, Tohru)

Part I KdV eq. のソリトン解

§1－1 相互作用KdV方程式と逆散乱法

KdV の解を，新しい方法で求める．

$$du-6u\partial u+\partial^3 u = 0$$

但し $d\equiv\partial/\partial t$，$\partial\equiv\partial/\partial x$

物理的に自然なInt KdV 方程式は

$$du_i-6u\partial u_i+\partial^3 u_i = 0 \qquad (1)$$

N-soliton 解； $u=\Sigma^N{}_{i=1}u_i$

他の Int KdV 方程式の形；

$$du_i'-3u\partial u_i'-3u_i'\partial u+\partial^3 u_i'=0 \qquad (2)$$

$$u = \Sigma^N{}_{i=1}u_i'.$$

i が1つなら（1）と（2）とは同じ形になる．

$$du_i(')-6u_i(')\partial u_i(')+\partial^3 u_i(')=0$$ [1)]

GGKM[2)] (1974) は "Schroedinger eq."

$$\partial^2\psi_i-(u-\lambda_i)\psi_i=0 \qquad (3)$$

または $u=(\partial^2\psi_i)/\psi_i+\lambda_i$ （3'）

を満たす ψ_i は

$$d\psi_i+\partial^3\psi_i-3(u+\lambda_i)(\partial\psi_i) = 0 \qquad (4)$$

或は $d\psi_i+\partial^3\psi_i$

$$-3[2u-(\partial^2\psi_i)/\psi_i](\partial\psi_i) = 0 \qquad (4')$$

を満たすことを示した．ここで u は KdV eq. の解である．

§1－2　$u_i \propto \psi_i^2$ の証明

（4'）から

$$\psi_i d\psi_i + \psi_i \partial^3\psi_i - 6u\psi_i(\partial\psi_i)$$
$$+3(\partial\psi_i)(\partial^2\psi_i) = 0$$

または　$d(\psi_i^2) + 2\psi_i\partial^3\psi_i - 6u(\partial\psi_i^2)$
$$+6(\partial\psi_i)(\partial^2\psi_i) = 0$$

即ち　$d(\psi_i^2) - 6u(\partial\psi_i^2) + \partial^3(\psi_i^2) = 0.$

そこで

$$u_i = \alpha_i\psi_i^2. \ (\alpha_i : \text{const.}) \qquad (5)$$

（5）と "Schroedinger eq."（3）とを使うと

$$\partial^3\psi_i / \alpha_i = 2\partial[\psi_i\partial^2\psi_i + (\partial\psi_i)^2]$$
$$= 2\partial[(u-\lambda_i)\psi_i + (\partial\psi_i)^2]$$
$$= 2\partial[(u-\lambda_i)\psi_i] + 4(u-\lambda_i)\psi_i\partial\psi_i$$
$$= 2\partial[(u-\lambda_i)\psi_i] + 2(u-\lambda_i)\partial(\psi_i^2).$$

よって

$$du_i = 6u\partial u_i - 3\partial^3 u_i + 2\partial^3 u_i$$
$$= 6u\partial u_i - 6\partial[(u-\lambda_i)u_i]$$
$$-6(u-\lambda_i)\partial u_i + 2\partial^3 u_i$$

$$= -6\partial[(u-2\lambda_i)u_i] + 2\partial^3 u_i$$

及び

$$d\int_{-\infty}^{\infty} u_i\,dx$$

$$= [-6(u-2\lambda_i)u_i + 2\partial^2 u_i]_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

この様にして，次のことが解る．

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_i\,dx = \mathrm{const.}$$

1ーソリトン解 u で解っていることは

$$\int_{-\infty}^{\infty} u\,dx = 4\kappa$$

ここで κ はソリトンのパラメータ．依って u_i の具体的な関数形を知らなくても，一般の i ($i = 1, 2, \cdots, N$) について

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_i\,dx = 4\kappa_i.$$

である事が解る．ψ_i を

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_i^2\,dx = 1,$$

と規格化すれば

$$u_i = 4\kappa_i\psi_i^2. \qquad (6)$$

量 ψ_i は，直接にソリトン解と関係がある．

§1−3　$u\to 0$ の時の $\psi_i\to\phi_i$（$u_i\to v_i$）

Int KdV eq.（1）と "Schroedinger eq. とは $u\to 0$ の時，それぞれ

$$d v_i+\partial^3 v_i = 0 \quad (u_i\to v_i) \quad (7)$$

$$\partial^2\phi_i=-\lambda_i\psi_i\equiv\kappa_i{}^2\psi_i \quad (\psi_i\to\phi_i)(8)$$

となる．よって

$$\phi_i=A_i(t)\exp(\pm\kappa_i x).$$

符号は $+\kappa_i$ と選ぶ．$v_i\to\phi_i{}^2$ と（7）より

$$\phi_i=\exp(\kappa_i x-4\kappa_i{}^3 t+c_i). \quad (9)$$

§1−4　$u_i' \propto \partial(\phi_i\psi_i)$ ということ

（4'）より

$$\phi_i(d\psi_i)+\phi_i(\partial^3\psi_i)-6u\phi_i(\partial\psi_i)$$
$$+3\phi_i(\partial\psi_i)(\partial^2\psi_i)/\psi_i=0$$

（9）から　$\partial\phi_i=\kappa_i\phi,$

$$\partial^2\phi_i=\kappa_i{}^2\phi_i=-\lambda_i\phi_i$$

そして

$$\psi_i(d\phi_i)+4\psi_i(\partial^3\phi_i)=0.$$

これらと "Schroedinger eq." (3) 或は (3')から

$$d(\phi_i\psi_i)-3u\partial(\phi_i\psi_i)+\partial^3(\phi_i\psi_i)=0 \quad (10)$$

或は

$$d[\partial(\phi_i\psi_i)]-3u_x[\partial(\phi_i\psi_i)]$$

$$-3u\,\partial[\partial(\phi_i\psi_i)]+\partial^3[\partial(\phi_i\psi_i)]=0. \quad (10')$$

よって（２）の ソリトン解 u_i' が得られる.

$$u_i' \propto \partial(\phi_i\psi_i),$$

ここで u_i' は ϕ_i と ψ_i のパラメータ κ_i によって決められるとする.

次に（１０）から

$$d\int_{-\infty}^{\infty}\partial(\phi_i\psi_i)dx$$

$$=\{[3u\,\partial(\phi_i\psi_i)+\partial^3[\partial(\phi_i\psi_i)]\}_{-\infty}^{\infty}=0.$$

故に $\quad \int_{-\infty}^{\infty}\partial(\phi_i\psi_i)dx=\mathrm{const.}$

（１０）と Int KdV eq.（１）とからこの定数が $2\kappa_i$ であることが解る. そのように ϕ_i の位相 c_i を選べばよい. これと（６）とから

$$u_i'=2\,\partial(\phi_i\psi_i). \qquad (11)$$

u_i' のグラフは Calogero and Degasperis.[3] に載っている. ただしここで考えた様な意味は与えていない.

§1−5　ソリトン解を求める

Ｎ－成分ベクトル $\underset{\sim}{\phi}$ を導入する．

$$\underset{\sim}{\phi}^T=(\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3,\ \cdots,\ \phi_N)$$

ソリトン解が，この $\underset{\sim}{\phi}$ と NxN成分の<u>対称</u> 行列 M と

から組立られるとする．即ち

$$\underset{\sim}{\psi}\equiv M\underset{\sim}{\phi} \qquad (12)$$

行列 M の具体的な形を求める．

<u>5−1</u>　（6）と（12）とから

$$u=4\Sigma^N{}_{i=1}\kappa_i\psi_i{}^2=4\underset{\sim}{\psi}^T K\underset{\sim}{\psi}=4\underset{\sim}{\phi}^T MKM\underset{\sim}{\phi} \qquad (13)$$

ここで K は N x N の対角行列（要素 κ_i）である。

（11）と（12）から

$$\begin{aligned} u&=2\Sigma^N{}_{i=1}\partial(\phi_i\psi_i)\\ &=2\partial(\underset{\sim}{\phi}^T\underset{\sim}{\psi})=2\partial(\underset{\sim}{\phi}^T M\underset{\sim}{\phi})\\ &=2\underset{\sim}{\phi}^T KM\underset{\sim}{\phi}+2\underset{\sim}{\phi}^T(\partial M)\underset{\sim}{\phi}+2\underset{\sim}{\phi}^T MK\underset{\sim}{\phi}. \qquad (14)\end{aligned}$$

よって　　$\partial M=2MKM-KM-MK$　（15）

または　$-\partial(M^{-1})=2K-M^{-1}K-KM^{-1}$,

即ち　$\partial(I-M^{-1})=(I-M^{-1})K+K(I-M^{-1})$.

この形からMを　$M^{-1} \equiv I - B,$　と置くと

$$\partial B = BK + KB. \qquad (15')$$

よって次の有用な公式が出る．

$$\partial \underset{\sim}{\psi} = \partial(M\underset{\sim}{\phi}) = (2M - I)KM\underset{\sim}{\phi} \equiv R\underset{\sim}{\psi}, \qquad (16)$$

ここで　$R \equiv (2M - I)K$　と定義した．

$$\partial R = 2(\partial M)K = 2(2KMK - MK - KM)K$$

$$= (2M - I)K(2M - I)K - K^2 = R^2 - K^2. \qquad (17)$$

5－2 "Schroedinger eq.": $\partial^2 \underset{\sim}{\psi} = (u + K^2)\underset{\sim}{\psi}$　より

左辺：$\partial^2(M\underset{\sim}{\phi}) = \partial(RM\underset{\sim}{\phi})$

$$= (R^2 - K^2)M\underset{\sim}{\phi} + R^2 M\underset{\sim}{\phi}$$

右辺：$(u + K^2)M\underset{\sim}{\phi} \quad = 4M\underset{\sim}{\phi}\underset{\sim}{\phi}^T MKM\underset{\sim}{\phi} + K^2 M\underset{\sim}{\phi}.$

依って　$R^2 - K^2 = 2M\underset{\sim}{\phi}\underset{\sim}{\phi}^T K$

となるがこの左辺は　$= \partial R = 2(\partial M)K$

である．よって　$\partial M = M\underset{\sim}{\phi}\underset{\sim}{\phi}^T M$

$$\partial B = -\underset{\sim}{\phi}\underset{\sim}{\phi}^T.$$

依って B の i j 要素は

$$B_{ij} = -\phi_i \phi_j / (\kappa_i + \kappa_j).$$

これは Wadati and Sawada[4] の解である．

Part II Toda eq. のソリトン解

§2－1 相互作用戸田方程式と逆散乱法

戸田方程式は，$d \equiv \partial / \partial t$ として

$$d[dV/(1+V(n))] = \Delta^2 V(n)$$

相互作用戸田（Int Toda）方程式は

$$d[dV_i/(1+V(n))] = \Delta^2 V_i(n)$$

N-soliton 解は　$V(n) = \Sigma^N{}_{i=1} V_i(n)$

これに対する逆散乱法の Flaschka eq. は

$$a(n-1)\phi_i(n-1) + b(n)\phi_i(n) + a(n)\phi_i(n+1) = 2\lambda_i \phi_i(n)$$

及び　$2d\phi_i(n)$

$$= a(n-1)\phi_i(n-1) - a(n)\phi_i(n+1)$$

ここで

$$da(n) = a(n)[b(n) - b(n+1)]$$

$$db(n) = 2[a^2(n-1) - a^2(n)]$$

$$4a^2(n-1) = 1 + V(n)$$

$$a(n) = (1/2)\exp[-(Q_{n+1} - Q_n)/2]$$

ref[5] で解ったことは

$$V(n) = c_i a(n)\phi_i(n)\phi_i(n+1)$$

$$(i = 1, 2, \cdots, N)$$

さて $\phi_i \to f_i, g_i$ の変換をする

$$f_i(n) \equiv \exp(Q_n/2)\phi_i(n)$$

$$g_i(n) \equiv \exp(-Q_n/2)\phi_i(n)$$

すると Flaschka eq. は量 $f_i(n)$ または

$g_i(n)$ を使って

$$f_i(n-1)+2b(n)f_i(n) +[1+V(n)]f_i(n+1) =2\lambda_i f_i(n)$$

$$2df_i(n) =f_i(n-1)+2b(n)f_i(n) -[1+V(n)]f_i(n+1)$$

及び

$$[1+V(n)]g_i(n) +2b(n+1)g_i(n+1)+g_i(n+2) =2\lambda_i g_i(n+1)$$

$$2dg_i(n) =[1+V(n)]g_i(n) -2b(n+1)g_i(n+1)-g_i(n+2)$$

そして

$$V_i(n)=(c_i/2)f_i(n)g_i(n+1)$$

となる. [KdVの時は $u_i \propto g_i^2$]

§２－２ modified 差分

Flashcka eq. は ＫｄＶ での Schroedinger eq. に対応する. ここで２階の差分でなく１階の差分の式を考えたい.

modified 前進差分 を

$$\tilde{\Delta}^{+} f_i(n)$$
$$\equiv -[1+V(n)]f_i(n+1)+\lambda_i f_i(n)$$

modified 後退差分 を

$$\tilde{\Delta}^{-} f_i(n)$$
$$\equiv f_i(n-1)+2b(n)f_i(n)-\lambda_i f_i(n)$$

と定義をすると

$$d f_i(n) = \tilde{\Delta}^{+} f_i(n) = \tilde{\Delta}^{-} f_i(n)$$

§２－３ Ｉｎｔ Ｔｏｄａ 方程式 と 線形方程式

ＫｄＶ の時と同様に $V(n) \to 0$ の時の線形方程式を考えると

$$d^2 V_i(n) = \Delta^2 V_i(n)$$

または $(d^2 - \Delta^2)V_i(n) = 0$

Flaschka eq. で $V(n)=0$ とすると

$$\phi_i(n-1) + \phi_i(n+1) = 2\lambda_i \phi_i(n)$$
$$= (z_i^{-1} + z_i^{1})\phi_i(n)$$

$\phi_i(n+1) = z_i^{-1}\phi_i(n)$ とすると

$$\phi_i(n) = \exp(-\alpha_i n)$$

次に $\phi_i(n)$ の t-dependence を求める.

$$d\phi_i = \frac{1}{2}[\phi_i(n-1) - \phi_i(n+1)]$$
$$= (\sinh\alpha_i)\,\phi_i(n)$$

$$\phi_i(t) = \exp(\sinh\alpha_i t) \equiv \exp(\beta_i t)$$

よって $\phi_i(t, n) = \exp(\beta_i t - \alpha_i n + c_i)$

§2－4 ソリトン解を求める

$$\underset{\sim}{f}(n) \equiv Q(n)\underset{\sim}{\phi}(n)$$

$$\underset{\sim}{g}(n) \equiv P(n)\underset{\sim}{\phi}(n)$$

とすると $\tilde{\Delta}^{-}\underset{\sim}{f}(n) = -Q(n+1)\underset{\sim}{\phi}(n+1)$

$$-2Q(n+1)\underset{\sim}{\phi}(n+1)\underset{\sim}{\phi}(n+1)$$
$$\times P(n+1)\beta Q(n)\underset{\sim}{\phi}(n)$$
$$+\lambda Q(n)\underset{\sim}{\phi}(n)$$

$$\Delta^{-}\underset{\sim}{g}(n) = -P(n+2)\underset{\sim}{\phi}(n+2)$$

$$-2P(n+1)\underset{\sim}{\phi}(n+1)\underset{\sim}{\phi}(n+1)$$

$$\times Q(n+1)\beta P(\underset{\sim}{n}+1)\phi(n+1)$$

$$+\lambda P(n+1)\underset{\sim}{\phi}(n+1)$$

仮定： $P(n+1)\underset{\sim}{\phi}(n)\underset{\sim}{\phi}^{T}(n)P(n)$

$$=P(n)\underset{\sim}{\phi}(n)\underset{\sim}{\phi}^{T}(n)P(n+1)$$

$$\rightarrow \quad Q(n)=P(n+1)$$

$$\therefore \quad \underset{\sim}{f}(n)=P(n+1)\underset{\sim}{\phi}(n)$$

$$\underset{\sim}{g}(n)=P(n)\underset{\sim}{\phi}(n)$$

さて　$\tilde{\Delta}^{+}f_{i}(n)=\tilde{\Delta}^{-}f_{i}(n)$　から

$$-P(n+2)zP^{-1}(n+1)$$

$$-2P(n+1)\Phi(n+1)P(n+2)\beta+\lambda$$

$$=-\lambda+P(n)z^{-1}P^{-1}(n+1)$$

$$+2P(n)\Phi(n)P(n+1)\beta$$

よって　$P(n)Z^{-1}P^{-1}(n+1)$

$$=2P(n)\beta+Z$$

$$-P(n+1)ZP^{-1}(n+1)$$

$$=2P(n+2)\beta-Z^{-1}$$

及び　$P(n+2)-P(n+1)$

$$= P(n+2)\underset{\sim}{\phi}(n+1)\underset{\sim}{\phi}^T(n+1)P(n+1)$$

とすると　$P^{-1}(n) \equiv I + B(n)$

$$dB(n) = \beta B(n) + B(n)\beta$$

$\rightarrow dB(n)$

$$= \frac{1}{2}[\underset{\sim}{\phi}(n)\underset{\sim}{\phi}^T(n+1) + \underset{\sim}{\phi}(n+1)\underset{\sim}{\phi}^T(n)]$$

$$dB_{ij}(n) = \frac{1}{2}(z_i^{-1} + z_j^{-1})\phi_i(n+1)\phi_j(n+1)$$

所が　$\frac{1}{2}(z_i^{-1} + z_j^{-1})/(\beta_i + \beta_j) = 1/(1 - z_i z_j)$

であるから

$$B_{ij}(n) = \phi_i(n+1)\phi_j(n+1)/(1 - z_i z_j)$$

References

1) Yoneyama,T., Prog. Theor. Phys. 72, 1081 (1984).

2) Gardner,C.S., Greene,J.M., Kruskal,M.D. and Miura, R.M., Commun. Pure Appl. Math. 27, 97 (1974).

3) Calogero,F, and Degasperis,A., "Spectral Transform and Solitons" (North Holland, Amsterdam") (1982).

4) Wadati,M. and Sawada,K., J. Phys. Soc. Jpn. 48, 312 (1980).

5) Yoneyama,T., J. Phys. Soc. Jpn. 55, 753 (1986).

以上