

多変数多項式の近似的 G C D とその応用

越智 正明、野田 松太郎、佐々木 建昭
(Masaaki Ochi, Matutaro Noda, Tateaki Sasaki)
(愛媛大学・工) (理化学研究所)

1. はじめに

筆者らは最近、浮動小数係数の 1 変数多項式に対する近似的 G C D 算法を定義・解析し、これを用いて 1 変数悪条件代数方程式の明快な解法を与えた¹⁾。本論では、近似的 G C D 算法を多変数多項式に拡張し、ある種の (連立) 悪条件代数方程式に応用することを考える。対象とする悪条件方程式とは次のようなものである。

$$F = D \tilde{F} + f(x, y, \dots) = 0, \quad G = D \tilde{G} + g(x, y, \dots) = 0, \dots$$

ここで、 F, G, \dots は係数が $O(1)$ の多項式であり、 f, g, \dots は微小係数多項式とする。これは最適化問題の一つとして田辺により議論されたものを含む²⁾。 F と G は $f = g = 0$ の場合には共通因子 D を持ち、2 変数の場合、連立方程式 $\{F = 0, G = 0\}$ は $D = 0$ 上で無限個の根を持つことになる。しかし、 $f, g \neq 0$ になると $D = 0$ 上の全ての点は根にならず、一般に根の個数は有限個に激減する。これは数値解法の不安定性を示唆しており、実際ヤコビアン行列は $D = 0$ の近傍で 0 に近くなるという悪条件性を持つ。このような代数方程式に通常の反復法に基ずく数値解法を適用しても、収束が極めて遅かったり、あるいは得られた解そのものが極めて不正確になったりする。この状況を簡単のために 2 変数代数方程式

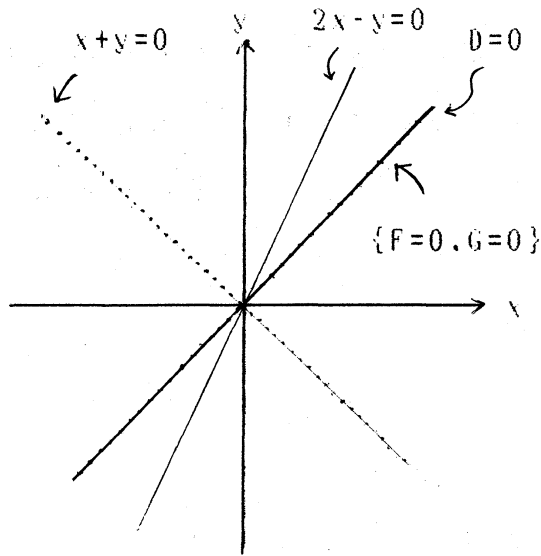
$$F = (x - y)(x + y) + \varepsilon_1(x^2 + xy)$$

$$G = (x - y)(2x - y) + \varepsilon_2(x - y)$$

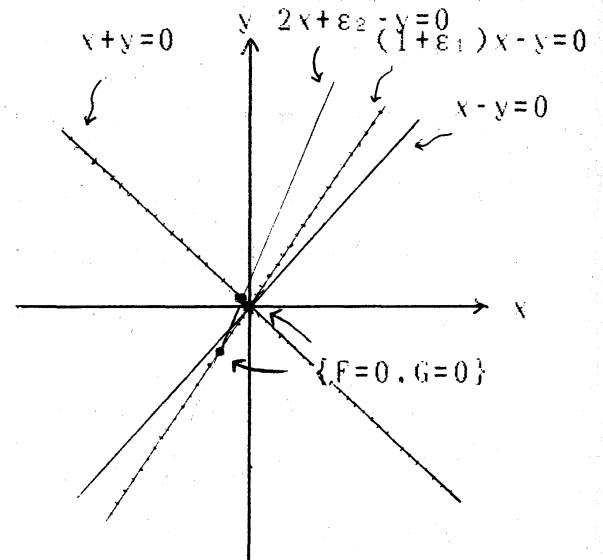
で説明する。 $D = x - y$ 、 $f = \varepsilon_1(x^2 + xy)$ 、 $g = \varepsilon_2(x - y)$ であり、
 ε_1 と ε_2 は微小量とする。

$$\{ F = 0, G = 0 \}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$$



$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \neq 0$$



見て分かるとうり、微小項 f と g の付加により解の個数は無限個から有限個に変化する。1変数代数方程式の場合と異なり、 $f = g = 0$ とした近似方程式の解は、元の方程式の解より非常に離れた場所にもあることに注意されたい。

2. 最大係数、多項式の正則化

近似的というからには、大小関係をきちんと定めなければならない。大小関係は相対的な概念であるので、与えられた多項式の係数の大きさを正則化 (regularize) することにより、近似的 GCD を定義する。1変数の場合と若干異なり正則とは当面、以下のように定めるものとする。

変数 x, y, \dots の多項式 $P(x, y, z, \dots)$ を主係数 x に注目し、

$$P(x, y, z, \dots) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_n \neq 0$$

とする。ここで、 a_i は y, z, \dots の多項式である。

定義 1 次数、主係数： P において、 n と a_n をそれぞれ P の次数、主係数といい、 $\deg(P)$ 、 $lc(P)$ と表わす。

定義 2 最大係数： P の絶対値最大の数係数をいい、 $mmc(P)$ と書く。

定義 3 項次数、全次数： 項 $c x^l y^m \dots z^n$ 、ただし c は数係数、に対し、 $l+m+n+\dots$ を項次数 (term degree) という。多項式 P の各単項の項次数のうち、最大のものを P の全次数 (total degree) といい、 $tdeg(P)$ と表わす。

定義 4 正則多項式： 上記の多項式 P のうち、項次数が最大の単項を $c_1 T_1, \dots, c_k T_k$ とする。ただし、 c_i は数係数である。 P が次の 2 条件を満足するとき正則 (regular) という。

$$mmc(a_n) = O(1), \quad \max \{ |c_1|, \dots, |c_k| \} = O(1)$$

定義 5 精度 ε の近似的 G C D： $0 < \varepsilon \ll 1$ とし、 P_1, P_2 を正則多項式とする。 $mmc(p_1) = O(\varepsilon)$ 、 $mmc(p_2) = O(\varepsilon)$ として、 P_1, P_2 が

$$P_1(x, y, \dots) = D(x, y, \dots) \tilde{P}_1(x, y, \dots) + p_1(x, y, \dots),$$

$$P_2(x, y, \dots) = D(x, y, \dots) \tilde{P}_2(x, y, \dots) + p_2(x, y, \dots),$$

のように表わせるとき、 $D(x, y, \dots)$ を 精度 ε の近似的因子 という。

特に D が次数最大のものであるとき、精度 ε の近似的 G C D といい、

$\gcd(P_1, P_2; \varepsilon)$ と表わす。

定義 6 多項式 P の係数の近似的 G C D：

$$\text{cont}(P; \varepsilon) = \gcd(a_0, \gcd(a_1, \dots, \gcd(a_{n-1}, a_n; \varepsilon), \dots; \varepsilon); \varepsilon)$$

定義 7 多項式 P の原始的部分： $pp(P; \varepsilon)$

$$b_i = b_i' + \varepsilon b_i'', \quad i = m, m-1, \dots, 0$$

と表わすことができる。ただし、 a_i' 、 $\varepsilon a_i''$ 、 b_i' 、 $\varepsilon b_i''$ はそれぞれ $D\tilde{F}$ 、 f 、 $D\tilde{G}$ 、 g から生じる係数である。今、 $\deg(D) = \deg(P_k)$ であるとすれば、 $P_k(\varepsilon \rightarrow 0) = 0$ 、 $P_{k+1}(\varepsilon \rightarrow 0) = 0$ となる。一方、 P_{k+1} の部分終結式を見れば、行列式の各要素は ε の一次式となっている。したがって、

$$\text{mmc}(P_{k+1}) = O(\varepsilon)$$

となっていることが分かる。

実際上の問題においては、 ε の値は計算する前には未知であることが大部分である。したがって、近似的 G C D の計算においては最大係数の減小を観察しつつ剰余列を計算し、最大係数が急激に減小したときに近似的 G C D が計算できたとし、減小度から精度 ε の値を推定することになる。

さて、1変数の場合と異なり、多変数多項式においては係数部もまた多項式であり、剰余列を真正直に計算すると種々の大きさの数係数が生じることが分かる（以下の例を参照されたい）。このような不揃いな大きさの数係数は理論の美しさを損なうし、また数値計算上も都合が悪い。ところで、精度 ε の近似的 G C D は係数に ε オーダーの不定性を持つ（近似的 G C D はユニークでない）ので、この不定性を利用して、数係数の不揃いを解消することができる。そのためには、 P_k が近似的 G C D を与えるとき、 $\text{mmc}(P_{k+1}) = O(\varepsilon)$ となるよう剰余列を適当に規格化して、多項式剰余列を計算した後で G C D に対応する剰余の数係数を ε オーダーでまるめればよい。剰余列の規格化としては、本論では一応、1変数多項式の場合と同様、剰余を商の最大係

数を用いる方法を採用するが、この点の解析は今後に残されたテーマである。以上より、最も簡単な近似的 G C D 算法は次のようになる。

多変数多項式の近似的 G C D 算法

入力：精度 ε 、デフォルト値は $\varepsilon = 10^{-3}$

主変数 x の多項式 $F(x, y, z, \dots)$, $G(x, y, z, \dots)$,

ただし、 $\deg(F) \geq \deg(G)$, $\text{mmc}(F) = O(1)$, $\text{mmc}(G) = O(1)$;

出力： $\text{gcd}(F, G; \varepsilon)$;

① $P_1 \leftarrow F$, $P_2 \leftarrow G$;

② $k = 2, 3, \dots$ に対し、以下を実行 (剰余列の計算) ;

$C \leftarrow \text{lc}(P_k) ** [\deg(P_{k-1}) - \deg(P_k) + 1]$;

$Q_k \leftarrow \text{quotient}(C P_{k-1}, P_k)$;

$P_{k+1} \leftarrow (C P_{k-1} - Q_k P_k) / \max\{1, \text{mmc}(Q_k)\}$;

$\text{mmc}(P_{k+1}) \geq 3\varepsilon$ なら反復計算を実行 ;

$\text{mmc}(P_{k+1}) < 3\varepsilon$ なら $\varepsilon \leftarrow \text{mmc}(P_{k+1})$;

③ $D' \leftarrow \text{pp}(P_k; \varepsilon)$ を $O(4\varepsilon)$ でまるめる ;

④ $C_f \leftarrow \text{cont}(F; \varepsilon)$, $C_g \leftarrow \text{cont}(G; \varepsilon)$;

⑤ $D \leftarrow D' * \text{gcd}(C_f, C_g; \varepsilon)$;

⑥ return D

注意 1 . 上記の算法は簡単であるが②で C を乗じることにより猛烈な係数成長を起こす。それを避けるためには縮約 PRS 算法、あるいは部分終結式 PRS 算法を使えばよい。

注意 2 . 上記③と④では変数 y, z, \dots に対する多項式に対して近似的 G C D 算法が再帰的に用いられるが、そこでは多項式が (最大係数 = $O(1)$ に) 規格化されている訳ではないので、係数の大きさに

応じて ε の値を調節する。規格化されない多項式を a_i と a_j とするとき

$$a_i' \leftarrow a_i / \text{mmc}(a_i), \quad a_j' \leftarrow a_j / \text{mmc}(a_j) \quad \text{とし、}$$

$$\text{gcd}(a_i', a_j'; \varepsilon / \min\{\text{mmc}(a_i), \text{mmc}(a_j)\})$$

を計算する。

注意 3. 上記④では $\text{pp}(P_v; \varepsilon)$ において精度 ε の数式除算が必要であるが、この計算においても不揃いな数係数が表れ易いので、結果の数係数を $O(\varepsilon)$ でまるめるのがよい。

上記の算法を 2 変数の具体例で説明しよう。

$$F = (x - y)(x + y) + \varepsilon_1 xy, \quad \varepsilon_1 = 0.001$$

$$G = (x - y)(2x - y) + \varepsilon_2(x^2 + y^2), \quad \varepsilon_2 = 0.001$$

多項式剰余列は次のように計算される。

$$P_1 = F = x^2 + 0.001 xy - y^2$$

$$P_2 = G = 2.001 x^2 - 3xy + 1.001 y^2$$

$$P_3 = 1.50025037 xy - 1.50024988 y^2$$

$$P_4 = 0.00224925 y^4$$

$\text{mmc}(P_3)$ に比べて $\text{mmc}(P_4)$ は $O(10^{-3})$ であり、 P_3 を精度 $O(10^{-3})$ の近似的 GCD とみなせる。 P_3 の係数を 0.001 でまるめると

$$D' = \text{pp}(1.500 xy - 1.500 y^2; 0.001) = x - y,$$

$$D = D' \cdot 1 = x - y$$

を得る。 F と G を D で割り、商の係数を 0.001 でまるめると

$$\tilde{F} = x + 1.001 y, \quad \tilde{G} = 2.001 x - 0.999 y$$

を得る。 $f = F - D \tilde{F}$, $g = G - D \tilde{G}$ より

$$f = 0.001 y^2, \quad g = 0.002 y^2$$

を得る。

4. 連立代数方程式の悪条件性の解消

1. で述べた悪条件連立代数方程式

$$F = D \tilde{F} + f(x, y, \dots) = 0, \quad G = D \tilde{G} + g(x, y, \dots) = 0$$

を考える。ただし、 F と G は正則多項式で、 $\text{mmc}(f) = O(\varepsilon)$ 、 $\text{mmc}(g) = O(\varepsilon)$ とする。この連立方程式の悪条件性は上で見た通りであるが、方程式を次のように変形したものを考える。

$$H \equiv F \tilde{G} - G \tilde{F} = f \tilde{G} - g \tilde{F} = 0,$$

$$F = 0$$

F と G の共通根は明らかに $H = 0$ の根となるから、この方程式はもとの方程式の根をすべて含む。ここで、方程式 $\{F = 0, H = 0\}$ は

$H \propto \tilde{F} \tilde{G} - \tilde{G} \tilde{F}$ ゆえ、 $F = 0$ のとき $H \propto \tilde{F} \tilde{G}$ となり、

$$\{F = 0, H = 0\} = \{F = 0, G = 0\} \vee \{\tilde{F} = 0, F = 0\}$$

と書かれる。このためこの方程式は $\{\tilde{F} = 0, F = 0\}$ のみを満足する余分な根までを含む。ところで、 H は F と G の微小項のみに比例するので、ほとんどの場合 F と G が有していた悪条件性を持たないと期待できる。すなわち、もとの方程式の悪条件性がほとんどの場合に解消されることが期待できる。

上述の変換ができるためには D が計算できさえすればよいが、 D は **3.** で与えた近似的 GCD 算法で計算できる。手順は n 変数の場合に適用できるが、以下では簡単のために 2 変数の場合の求根法を記述しよう。

2変数連立代数方程式 $\{ F = 0, G = 0 \}$ の解法

入力: $F = D \tilde{F} + f = 0, G = D \tilde{G} + g = 0$ なる

悪条件連立代数方程式

- ① $D \leftarrow \text{gcd}(F, G; \varepsilon)$;
- ② $\tilde{F} \leftarrow F / D, \tilde{G} \leftarrow G / D$; (精度 ε での数式除算)
- ③ $H' \leftarrow \tilde{F} G - \tilde{G} F$; (この過程の計算は高精度計算が必要)
- ④ $H \leftarrow H'$ の正規化; (数係数の大きさを揃える操作)
- ⑤ $H = 0$ と $F = 0$ を連立して、ニュートン法による数値計算を実行
- ⑥ 得られた解を元の方程式に代入し、解であるか否かをチェック。

注意 1. ③では念のため、 H において悪条件性が除かれているか否かをチェックするとよい。

注意 2. ⑥が必要なのは、 $\{ F = 0, H = 0 \}$ が元の方程式の根以外の根も含み得るからである。

ニュートン法のための初期値の設定を考えよう。連立方程式 $\{ F=0, G=0 \}$ と異なり、 $\{ F=0, H=0 \}$ は 1. に述べた悪条件性を持たない

から、根の近似値は $F = D\tilde{F}$ と近似することにより得られるであろう。この近似により方程式は

$$\{ D = 0, H = 0 \}, \{ \tilde{F} = 0, H = 0 \}$$

なる二つの連立方程式に分解される。 $H \propto \tilde{F}G - \tilde{G}F$ であることを考慮すると、後者の方程式は

$$\{ \tilde{F} = 0, \tilde{G}F = 0 \} = \{ \tilde{F} = 0, \tilde{G} = 0 \} \vee \{ \tilde{F} = 0, F = 0 \}$$

と分解される。このうち、すでに示したように $\{ \tilde{F} = 0, F = 0 \}$ は、

元の方程式 $\{ F = 0, G = 0 \}$ の根とは異なる根を与えるので除外する。以上より、初期値は

$$\{ D = 0, H = 0 \}, \{ \tilde{F} = 0, \tilde{G} = 0 \}$$

の二つの連立方程式を粗く解いて決めればよい。第一の方程式は $D=0$ の近傍に分布する（通常の方法では解きにくい）根の近似値を与え、第二の方程式は（初期値の選択さえよければ）通常の方法でも解き易い根の近似値を与える。

なお、連立代数方程式の反復的解法では、よい初期値を選ぶことが重要であるが、それはなかなか難しい。方程式が悪条件でない時は初期値の良し悪しは大して問題でないかも知れないが、悪条件の時には良し悪しは決定的である。我々の方法は（ある種の）悪条件の場合に初期値をうまく与える方法ともなっていることも指摘しておきたい。

5. 悪条件連立代数方程式への適用例

4. の求根手続きの具体例を示す。簡単のため、2変数の例だけを取り上げる。⑤での数値計算結果の正当性を保証するため、イデアル (F, G) の Gröbner 基底を計算して1変数代数方程式に変換し、c a dの手法による空間分割³⁾で解の存在範囲を求めた。存在範囲の上下限の数値が15桁一致するまで分割を繰り返し、それを真の解として示した。また、ニュートン法の実行結果には収束するまでの反復回数も示した。比較のために、元の代数方程式 $\{ F = 0, G = 0 \}$ を直接ニュートン反復した場合の結果も示してある。この場合、初期値の選び方が問題となるが、適当な方法がないので、次の3組の連立方程式を粗く解いた根を初期値とした。

$$(\tilde{F} = 0, \tilde{G} = 0), (\tilde{F} = 0, D = 0), (\tilde{G} = 0, D = 0)$$

なお、計算の大半は IBM-PC 上の SYNC で行なわれた。真の解を求める部分は SUN-4 上の MAPLE によった。

$$\begin{aligned} \text{例 1} \quad F &= (x^2 + y^2 - 1) * (x*y - 0.25) + 0.0001 * x*y \\ G &= (x^2 + y^2 - 1) * (x - y) \end{aligned}$$

多項式剰余列

$$P_1 = F$$

$$P_2 = G$$

$$P_3 = x^2*y^2 - 0.25*x^2 + 0.0001*x*y + y^4 - 1.25*y^2 + 0.25$$

$$\begin{aligned} P_4 &= 0.0001*x*y^4 - 0.00002499*x*y^2 + 0.0001*y^5 \\ &\quad - 0.000125*y^3 + 0.000025*y \end{aligned}$$

$\text{mmc}(P_4)/\text{mmc}(P_3) = O(10^{-4})$ であるから P_3 が精度 10^{-4} の近似的 GCD を与える。 P_3 の係数を 10^{-4} より若干大きな値でまるめ、原始的部分を取り出すことにより

$$D = x^2 + y^2 - 1.0$$

を得る。D による精度 $O(10^{-4})$ の除算で

$$\tilde{F} = xy - 0.25, \quad \tilde{G} = x - y$$

を得るから、

$$H \equiv \tilde{F}G - \tilde{G}F = 0.0001 * (-x^2*y + x*y^2)$$

$$\begin{aligned} \text{例 2} \quad F &= (x^2 + y^2 - 1) * (x*y - 0.25) + 0.0001 * x*y \\ G &= (x^2 + y^2 - 1) * (x - y) - 0.00001 * (x + 1) \end{aligned}$$

多項式剰余列

$$P_1 = F$$

$$P_2 = G$$

$$P_3 = x^2 * y^2 - 0.25 * x^2 + 0.00011 * x * y + y^4 - 1.25 * y^2 + 0.00001 * y + 0.25$$

$$P_4 = 0.0001 * x * y^4 - 0.00001 * x * y^3 - 0.00002249 * x * y^2 + 0.0000025 * x * y - 0.00000063 * x + 0.00011 * y^5 - 0.0001375 * y^3 + 0.000025 * y^2 + 0.0000275 * y - 0.00000063$$

前例と同様

$$D = x^2 + y^2 - 1.0$$

$$\tilde{F} = xy - 0.25, \quad \tilde{G} = x - y$$

$$H \equiv \tilde{F} \tilde{G} - \tilde{G} \tilde{F} =$$

$$0.0001 * (-1.1 * x^2 * y + x * y^2 - 0.1 * x * y + 0.025 * x + 0.025)$$

を得る。

例 1

No	真の解	F = 0, G = 0 反復回数		F = 0, $\tilde{F} \tilde{G} - \tilde{G} \tilde{F} = 0$ 反復回数	
		1	x = 1.0000000 y = 0.0	1.0000000 -1.8636E-16	17
2	x = 0.0 y = 1.0000000	-2.6491E-16 1.0000000	17	0.0000000 1.0000000	1
3	x = -1.0000000 y = 0.0	-1.0000000 1.8636E-16	17	-1.0000000 0.0000000	1
4	x = 0.0 y = -1.0000000	2.6491E-16 -1.0000000	17	0.0000000 -1.0000000	1
5	x = 0.7070360 y = 0.7070360	0.7070360 0.7070360	3	0.7070360 0.7070360	3
6	x = -0.7070360 y = -0.7070360	-0.7070360 -0.7070360	3	-0.7070360 -0.7070360	3
7	x = 0.5000500 y = 0.5000500	0.5000500 0.5000500	2	0.5000500 0.5000500	2
8	x = -0.5000500 y = -0.5000500	-0.5000500 -0.5000500	2	-0.5000500 -0.5000500	2

例 2

No	真の解	$F = 0, G = 0$ 反復回数	$F = 0, \tilde{F} G - \tilde{G} F = 0$ 反復回数
1	$x = 0.9990732$ $y = 0.0432840$	0.9990724 0.0433031	0.9990732 0.0432840
2	$x = -0.0262280$ $y = 0.9996512$	-0.0262224 0.9996513	-0.0262280 0.9996512
3	$x = -1.0000000$ $y = 0.0$	-1.0000000 -3.3942E-5	-1.0000000 3.428E-22
4	$x = -0.0227383$ $y = -0.9997464$	-0.0227343 -0.9997465	-0.0227384 -0.9997464
5	$x = 0.6645091$ $y = 0.7471453$	-0.0262224 0.9996513	0.6645091 0.7471453
6	$x = -0.7141434$ $y = -0.6998564$	-1.0000000 -3.3942E-5	-0.7141434 -0.6998564
7	$x = 0.5000350$ $y = 0.5000650$	0.5000350 0.5000650	0.5000350 0.5000650
8	$x = -0.5000550$ $y = -0.5000450$	-0.5000550 -0.5000450	-0.5000550 -0.5000450

表で、左コラムの値は Gröbner 基底と空間分割で求めた値（15 桁まで正確）、中コラムの値は元の方程式を直接ニュートン法で数値的に求めたもの、右コラムの値は近似的 GCD により悪条件性を消してからニュートン法で解いたものである。中コラムの値が示しているように、近似的 GCD である $D = x^2 + y^2 - 1 = 0$ 上に近く分布する根の多くは、ニュートン法で解くと反復回数が多くなり、あるものは解の精度が悪かったり（例 2 の No. 1 ~ 4）、またあるものは全然誤った答えになったりする（例 2 の No 5, 6）。これらの困難さは、近似的 GCD を利用した悪条件性の解消により、大幅に減じられることが分かる。もちろん、中コラムの値を求めるための初期値の推定のためにも近似的 GCD の計算結果が用いられていることに注意されたい。

以上より、多変数多項式の近似的 GCD が応用上有用であることは十分示し得たと思う。しかしながら、本論に述べた算法は改良し、あ

るいは精密化すべき点が少なくないので、それを今後の課題にしたい。

参考文献

- 1) T.Sasaki and M.T.Noda : Approximate square-free decomposition and root-finding of ill-conditioned algebraic equations, Jour. Inf. Proc.(to appear).
- 2) 田辺 國士 : Centered Newton 法について, Winter Institute「計算数学の世界」(山本哲朗編), 1988.
- 3) J.H.Davenport, Y.Siret and E.Tournier: 'COMPUTER ALGEBRA', pp.95 - 122, Academic Press, 1988.