数理解析研究所講究録
第 685 巻 1989 年 39-42

プロログを用いた、あるリー環のコホモロジーの計算

埼玉大教養部　柴田　勝征　(Katsuyuki Shibata)

§0. プロログ言語

論理型プログラミング言語プロログでは、プログラムは数学で言う「定義」や「公理」に相当する「事実」と「規則」から成り、推論はコンピュータが自主的に行なう。これがプロログのセールスポイントであるが、もし本当ならば、世の中に数学者なる職業は不要になってしまう。とは言え、プロログが一定の推論機構を内蔵していて、プロログで書かれたプログラムは他の言語で書かれたものよりも顕著に短かくなる傾向がある事は確かである。その様なプロログの特徴に注目して、私が興味を持っているあるリー環のコホモロジーの計算に応用してみた経験を報告する。

§1. ホモトピー・リー環

Xを任意の位相空間とすると、そのホモトピー群$\pi_*(X)$に有理数体$\mathbb{Q}$を掛けたものは、Whitehead積により有階(graded)

なリー環の構造が入る。特にXが、ある空間Yの懸垂空間SYというホモトピー型をしていると、そのホモトピー・リー環は自由リー環となる。「自由リー環」とは、リー環として満たすべき最低限の関係式以外には、その元たちの間に非自明な関係式を持たないリー環の事である。自由リー環や、それから派生する類似のリー環の性質を調べる事は、有理ホモトピー理論にとって重要である。

§2. 自由リー環のホール基底

Vを$\mathbb{Q}$上の有限次元ベクトル空間とし、$B=\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$を、順序付けられた$V$の基底とする。$V$で生成される自由リー環$\mathbb{L}(V)$の基底として次の様な$H$が取れる。

(i) $H = \bigcup_{n \geqq 1} H_n$; H_nの元はVのn個の元のブラケット積で表わされており、$H_1 = B$, かつHには、長さの長い元ほど大きい順序が定義されている。

(ii) $H_2 = \{ [x_i, x_j] ; x_i, x_j \in B$ かつ $i<j \}$

(iii) $\bigcup_{n \geqq 3} H_n = \{ [Y, [X, Z]] ; X, Y, Z, [X, Z] \in H, \ Y \geqq X, \ Y < [X, Z] \}$

この様なHを、$\mathbb{L}(V)$の（Bに関する）Hall基底と呼ぶ。

$\mathbb{L}(V)$の任意の元が与えられた時、まず、それが基底Hの元であるか否かを判定したい。それには、上の定義をほぼ丸

写しにしただけのプロログ・プログラムを書いておけば、この程度の再帰的パターンマッチによる推論はコンピュータが自動的にやってくれる。

次に、$\mathbb{L}(V)$ の任意の元 X が与えられた時（さきほど位相空間を X と表わしたが、今度は、もちろん全然別の話）、それを基底 H の元たちの一次結合で表わした式 C を求める事を「正規化」と呼ぶ事にして、プロログの述語として normalize (X, C) と表わそう。「正規化」を手計算でやると大変だが、プロログなら、「正規化」に関するいくつかの性質（線型性や Jacobi 律など基本的なもの）を記述するだけで、あとの推論はコンピュータが行なってくれる。

§3. リー環のコホモロジーの計算

$E(e)$ で、1つの元 e によって生成される $\mathbb{Q}$ 上の有階外積代数を表わす。$E(e)\otimes\mathbb{L}(V)$ により、$E(e)$ と $\mathbb{L}(V)$ のテンソル積上の有階リー環を表わす。ただし、リー積は

$$[a\otimes v,\ b\otimes w] = (-1)^{\deg(v)\cdot\deg(b)}\, ab\otimes[v, w]$$

$$a, b \in E(e), \quad v, w \in \mathbb{L}(V)$$

で定義する。

純粋に代数的に定義されたこのリー環のコホモロジーは、ベクトル空間 V と $\deg(e)$ を適当に定めると、n 次元球面 S^n のゲルファント・フックス・コホモロジーと呼ばれる、幾何

学で出て来るコホモロジーと、環として同型になる。(Haefliger の結果。) ただし、$\deg(e)=n$ とし、リー環には実数体をテンソルして係数体を拡大しておく。

このコホモロジー環は無限生成で、どの様に計算したらよいのか分からないくらい大きな環なのだが、§2で説明した自由リー環の「正規化」プログラムを利用して、そのコホモロジー環を少しずつだが計算して行く事ができる。私はその計算を以前は手計算だけで行なっていたが、パソコンとプロログ言語を知ったので、計算の補助手段として利用してみたわけである。

以上の事を、ある国際会議で報告し、「数学」にもその報告を掲載させて頂いたので、もう少し詳しい事が知りたい方は、下の「数学」の記事を参照されたい。

柴田勝征：トポロジーとコンピュータ —— セビリア国際会議の報告を中心に；「数学」1988年10月秋季号 (p.349–353)