

スピングラス問題における積分方程式と代数方程式

東京電機大学 桂 重俊 佐々木光弘
(Shigetoshi Katsura, Mitsuhiro Sasaki)

② Cayley tree (Bethe 格子) 上のランダムイジングモデルを考える (図 1)

格子点 i のスピンの熱力学的平均値は z を最近接格子点の数とすると

$$\langle \sigma_i \rangle = \text{th} \left[\beta H_i + \sum_{j=1}^z \text{th}^{-1} (\text{th} \beta J_{ij} \text{th} \beta H_j^{(2)}) \right] \quad (1)$$

で与えられる。 H_i は外場、 $H_j^{(2)}$ は H_{j-i} と書くべき量で ij ボンドの j に働く i 以外の外から働く有効場である。 $H_j^{(2)}$ を定める式は

$$H_{j-i}^{(2)} = \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^{z-1} \text{th}^{-1} (\text{th} \beta J_{jk} \text{th} \beta H_{k-j}^{(2)}) \quad (2)$$

である。 (1) (2) の \sum の中の 1 項

$$\text{th}^{-1} (\text{th} \beta J_{jk} \text{th} \beta H_{k-j}^{(2)}) = h_{jk} \quad (2')$$

は single bond jk において k から j に働く有効場 h_{jk} であることを記す。

$$H_{j-i}^{(2)} = \sum_{k \neq i} h_{jk} + H_j \quad (3)$$

である。

ランダム系では J の分布が与えられる。例として $\pm J$ モデルでは

$$P(J) = p \delta(J - J_0) + (1-p) \delta(J + J_0) \quad (4)$$

或は Gaussian モデル

$$P(J) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta_J} \exp \left[-\frac{(J - J_0)^2}{2\Delta_J^2} \right] \quad (5)$$

等。以下 $\pm J$ モデルの場合を考へる。 (1) は

$$H_i^{(1)} = \sum_{j=1}^z h_{ij} + H_i \quad (6)$$

$$\langle \sigma_i \rangle = \text{th} \beta H_i^{(1)} \quad (7)$$

のようになる。

ここでランダム系として「 J がランダムに与えられるポンドランダム系」を考へる。ランダム系では J の分布のため、 $h, H^{(2)}, H^{(1)}$ は分布を有する。その分布関数を $g(h), G^{(1)}(H^{(1)}), G^{(2)}(H^{(2)})$ とする。

(3) および (6) により 外場 $H_i = 0$ の場合を考へると

$$G^{(2)}(H^{(2)}) = \int \delta(H^{(2)} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{z-1} h_k) \prod_{k=1}^{z-1} g(h_k) dh_k \quad (8)$$

$$G^{(1)}(H^{(1)}) = \int \delta(H^{(1)} - \sum_{k=1}^z h_k) \prod_{k=1}^z g(h_k) dh_k \quad (9)$$

の関係がある。(8)(9)より $g(h)$ の Fourier 変換 $S(k)$ が合れば $G^{(2)}(H^{(2)})$ 、 $G^{(1)}(H^{(1)})$ は $[S(k)]^{z-1}$ 、 $[S(k)]^z$ の逆 Fourier 変換で与えられることが分る。

(2') と (3) より

$$g(h) = \int \delta(h - \frac{1}{\beta} \ln^{-1}(\ln \beta J + \ln \beta H^{(2)})) G^{(2)}(H^{(2)}) dH^{(2)} P(J) dJ \quad (10)$$

$$g(h) = \int \delta(h - \frac{1}{\beta} \ln^{-1}(\ln \beta J + \ln \beta \sum_{k=1}^z h_k)) \prod_{k=1}^z g_k(h_k) d h_k P(J) dJ \quad (11)$$

となる。これが $g(h)$ の満たすべき積分方程式である。 $g(h)$ が h の保潔級数の場合 $P(J)$ は次の積分を除いても差支ない*の2以下の場合を考へる。

$$\S \quad T \rightarrow 0 \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln^{-1}(\ln \beta J + \ln \beta H) = \operatorname{sgn}(J) \operatorname{sgn}(H) \min(|J|, |H|) \quad (12)$$

が成立することを注意する。(以下 $T \rightarrow 0$ の場合を考へる。) 再び $J_0 = 1$ とする。

(10)(11)より

$$g(h) = \int \delta(h - \operatorname{sgn}(H^{(2)}) \min(|H^{(2)}|, 1)) \delta(H^{(2)} - \sum' h_k) dH^{(2)} \times \prod g(h_k) dh_k \quad (13)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int dH^{(2)} dy e^{iyH^{(2)}} \delta(h - \operatorname{sgn}(H^{(2)}) \min(|H^{(2)}|, 1)) \times \prod' \int e^{-iyh_k} g(h_k) dh_k \quad (14)$$

* (11) と (4) より

$$g(h) = p \int \delta(h - \frac{1}{\beta} \text{th}^{-1}(\text{th} \beta J_0 + \text{th}(\beta \Sigma' h_k))) \Pi g(h_k) dh_k \\ + (1-p) \int \delta(h + \frac{1}{\beta} \text{th}^{-1}(\text{th} \beta J_0 + \text{th}(\beta \Sigma' h_k))) \Pi g(h_k) dh_k \quad (11')$$

第2項を $h_k = -h'_k$ とおくと $g(h)$ が偶関数である

$$\int_{-\infty}^{\infty} dh_k g(h_k) = - \int_{-\infty}^{\infty} dh'_k g(-h'_k) = \int_{-\infty}^{\infty} dh'_k g(h'_k)$$

すなわち h'_k とおくと h_k とおくと

$$(11') = \int \delta(h - \frac{1}{\beta} \text{th}^{-1}(\text{th} \beta J_0 + \text{th}(\beta \Sigma' h_k))) \Pi g(h_k) dh_k$$

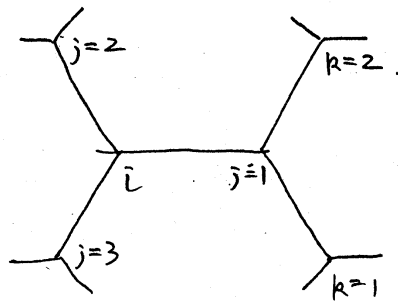


図 1

$$= \frac{1}{2\pi} \int dH^{(2)} e^{iyH^{(2)}} \delta(h - \text{sgn}(H^{(2)}) \min(1, |H^{(2)}|)) [S(y)]^{z-1} dy \quad (15)$$

∴

$$S(x) = \int g(h) e^{-ixh} dh \quad (16)$$

(16)の左辺に e^{-ixh} を対して dh を積分すると

$$S(x) = \frac{1}{2\pi} \int K(x, y) [S(y)]^{z-1} dy \quad (17)$$

$$K(x, y) = \int e^{iyH^{(2)}} \delta(h - \text{sgn}(H^{(2)}) \min(1, |H^{(2)}|)) e^{-ixh} dH^{(2)} dh \quad (18)$$

$$= \int e^{iyH^{(2)}} e^{-ix \text{sgn}(H^{(2)}) \min(1, |H^{(2)}|)} dH^{(2)} \quad (18')$$

(18)は非線形積分方程式の標準の形である。

§ ∴

$$S(x) = \sum_{l=-n}^n \mu_l e^{i \frac{l}{n} x} \quad (19)$$

よって

$$g(h) = \sum_{l=-n}^n \mu_l \delta(h - \frac{l}{n}) \quad (20)$$

と置く

$$[S(y)]^{z-1} = \left[\sum_{l=-n}^n \mu_l e^{i \frac{l}{n} y} \right]^{z-1} = \sum a_m e^{i \frac{m}{n} y} \quad (21)$$

$$G(H^{(2)}) = \sum_{m=-(z-1)n}^{(z-1)n} a_m \delta(H^{(2)} - \frac{m}{n}) \quad (21')$$

とすると

$$S(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{iyH^{(2)}} \sum a_m e^{i \frac{m}{n} y} e^{-ix \text{sgn}(H^{(2)}) \min(1, |H^{(2)}|)} \frac{dy}{dH^{(2)}} \quad (21'')$$

$\int dy$ を行う

$$= \sum a_m \int \delta(H^{(2)} - \frac{m}{n}) e^{ix \text{sgn}(H^{(2)}) \min(1, |H^{(2)}|)} dH^{(2)} \quad (21''')$$

$$= \sum_{-n+1}^{n-1} a_m e^{ix \frac{m}{n}} + \left(\sum_{-(z-1)n}^{-n} a_m \right) e^{-ix} + \left(\sum_n^{(z-1)n} a_m \right) e^{ix} \quad (22)$$

(21) 式) a_m は $(\sum_{-n}^n \mu_l z^l)^{z-1}$ の z^m の係数である. (22)

よ)

$$\mu_l = \sum_{\substack{l_1, l_2, \dots, l_{z-1} \\ \sum l_i = l}} \mu_{l_1} \mu_{l_2} \dots \mu_{l_{z-1}} \quad l = -n-1, -n-2, \dots, n-1 \quad (23)$$

$$\mu_n = \sum_{l=-n}^{(z-1)n} \sum_{\substack{l_1, l_2, \dots, l_{z-1} \\ \sum l_i = l}} \mu_{l_1} \mu_{l_2} \dots \mu_{l_{z-1}} \quad (24)$$

$$\mu_{-n} = \sum_{l=-(z-1)n}^n \sum_{\substack{l_1, l_2, \dots, l_{z-1} \\ \sum l_i = l}} \mu_{l_1} \mu_{l_2} \dots \mu_{l_{z-1}} \quad (24')$$

という $(2n+1)$ 変数 $(z-1)$ 次 ^{の連立} 代数方程式が得られる。
 対称解 $\mu_l = \mu_{-l}$ の場合 $l = 0, 1, \dots, n-1$ についての (23) と

$$2 \sum_{l=1}^n \mu_l + \mu_0 = 1 \quad (25)$$

が $n+1$ 個の変数に対して十分である。

$z=2$ に対する (23)(25) は

$n=1$

$$\begin{aligned} \mu_0 + 2\mu_1 &= 1 \\ \mu_0^2 + 2\mu_1^2 &= \mu_0 \end{aligned} \quad (26)$$

$n=2$

$$\begin{aligned} \mu_0 + 2\mu_1 + 2\mu_2 &= 1 \\ \mu_0^2 + 2\mu_1^2 + 2\mu_2^2 &= \mu_0 \\ \mu_1\mu_2 + 2\mu_0\mu_1 &= \mu_1 \end{aligned} \quad (27)$$

等と与える。

(23)(24) 等) は 2つの代数方程式として知られた式で、
 n が大きくなるにつれて急激に複雑と与える。Gröbner basis
 の方法を用いると μ_0 についての 2^n 次の整係数代数方程式
 $F(\mu_0) = 0$ と $2^n - 1$ 次の多項式 $f_l(\mu_0) = 0$ による $\mu_l =$
 $f_l(\mu_0)$ に帰着される。

例では

$n=1$

$$3\mu_0^2 - 4\mu_0 + 1 = 0$$

$$2\mu_1 + \mu_0 - 1 = 0$$

(28)

$n=2$

$$21\mu_0^4 - 46\mu_0^3 + 34\mu_0^2 - 10\mu_0 + 1 = 0$$

$$4\mu_1 + 42\mu_0^3 - 71\mu_0^2 + 34\mu_0 - 5 = 0$$

$$4\mu_2 - 42\mu_0^3 + 71\mu_0^2 - 32\mu_0 + 3 = 0$$

(29)

等.

μ_0 の方程式 (23) (25) から その解を求めるとは $n=1$, 4 変数の z に対する

z

$$\mu_0 = \mu_0^{z-1} {}_2F_1\left(\frac{1-z}{2}, 1-\frac{z}{2}; 1; \left(\frac{1-\mu_0}{\mu_0}\right)^2\right)^{1-1/z} \quad (30)$$

と得られた. 特には $z=3$ に対するは $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{3}$. (Katsura et al 1979).

$z=3$ に対する $n=2$ 以上の解の存在は Inawashiro が注意した (1980) $z=3$ に対する $n=1, 2, 3, 4$ を数値計算で Miyamoto が求めた. Gröbner basis に対する解は Fukuda が理研の SAC2 の subroutine を用いて $n=3$ まで求めた. Gebauer が $n=4$ を Gröbner basis で求めた.²⁾³⁾ この問題の $n=5$ 以上の Gröbner basis を求めることは数式処理研究会のよい例題と存った.⁴⁾ (Moritsugu, 小林)

$z=3$ の $F_n(\mu_0) = 0$ は μ_0 の 2^n 次式であるが物理的に意味のあるものは確率分布の意味をもつもので, $1 \geq \mu_l \geq 0$ をみたすものである. その解の数は

n	1	2	3	4	5
物理的に意味のある解	2	3	3	4	3
物理的に意味のない実数解	0	1	3	8	
複素解	0	0	2	4	
全数	2	4	8	16	
$\omega(n)$	1	2	2	3	2

と存っている. 特に物理的に意味のある解の数は n の約数の数を

$\omega(n)$ とすると $\omega(n)+1$ となる居り, n に対する解は n の約数に
 対するすべての解を含んでいる. $n=1, 2, 3, 4$ に対する解 $g(h)$ の
 様子は以前に示したので省略する.³⁾⁸⁾

§ 連続分布解⁵⁾

図2より $n \rightarrow \infty$ の極限での解は $h=-1, 0, 1$ における δ 関数と
 $-1 < h < 1$ における連続関数の和で与えられることが予想される.
 Morita (1984) は $-1 < h < 1$ を 512 分割して数値計算でこの
 連続関数部分を求め, 二つは解析的に解を求める.

(18)より

$$K(x, y) = \int_1^{\infty} dH^{(2)} e^{iyH^{(2)} - ix} + \int_{-\infty}^{-1} dH^{(2)} e^{iyH^{(2)} + ix} \\ + \int_0^1 dH^{(2)} e^{i(y-x)H^{(2)}} + \int_{-1}^0 dH^{(2)} e^{i(y+x)H^{(2)}} \quad (31)$$

$$= 2\pi \cos x \delta(y) - 2 \cos x \frac{\sin y}{y} + \frac{\sin(y-x)}{y-x} + \frac{\sin(y+x)}{y+x} \quad (32)$$

$S(x)$ を偶関数に限れば (32) の右辺第4項を除き第3項の
 係数を2倍にしてよい. 以下 Bessel 関数の加法定理

$$\frac{\sin(y+x)}{y+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n (1+2n) j_n(x) j_n(y) \quad (32)$$

を用いると

$$K(x, y) = 2\pi \cos x \delta(y) - 2j_0(y) \cos x + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (1+4n) j_{2n}(x) j_{2n}(y) \quad (33)$$

$S(x)$ を

$$S(x) = a + b \cos x + \sum_{l=0}^{\infty} C_{2l} j_{2l}(x) \quad (34)$$

と仮定 (33)(34) を積分方程式に入れると未定係数の間の代数方
 程式

$$a = a^2 + b^2/2 \quad (35)$$

$$b = 2ab + bc_0 + b^2/2 + c_0^2 - \sum_l \sum_m C_{2l} C_{2m} I_{0, 2l, 2m} \quad (36)$$

$$C_{2n} = 2a C_{2n} + 2b(1+4n) \sum_l C_{2l} I_{2l, 2n} + (1+4n) \sum_l \sum_m C_{2l} C_{2m} I_{2l, 2m, 2n} \quad (37)$$

を得る。なお

$$a + b + c_0 = 1 \quad (38)$$

が成立つ。ここには

$$I_{2l,2m} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy j_{2l}(y) j_{2m}(y) \cos y$$

$$I_{2l,2m,2n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy j_{2l}(y) j_{2m}(y) j_{2n}(y) \quad (39)$$

で

$$I_{00} = \frac{1}{2} \quad I_{02} = 0 \quad I_{22} = \frac{7}{80} \quad I_{000} = \frac{3}{4} \quad I_{002} = \frac{1}{16} \quad I_{022} = \frac{1}{160} \quad I_{222} = \frac{9}{256}$$

等である。 $I_{2l,2m}$, $I_{2l,2m,2n}$ は l, m, n の増加と共に急激に小さくなるので (35) を l, m, n を有限で打ち切ってもよい近似が得られると考えられる。これもまた Gröbner basis のよい例題である。規格化条件 (36) があるのを例えは C_2 まで求めるには (37) は C_0 に対する式のみを用いればよい。 b まで打ち切った場合は前節の $n=1$ の結果を再現す。表 1.2.1 に C_0 まで打ち切った場合と C_2 まで打ち切った場合の Gröbner basis を示す。 C_0 までと C_2 までとつたときの結果を比較してこの truncation の収率が非常によいことが分る。 C_2 までとつたときの $g(h)$ の図も ref. 1, 8 に示している。前節の場合とは任意の n を与えたときの積分方程式の正確解とを比べたが、本節では C_l を l で打ち切ったときの解は収率の極めてよい正確解に収束する関数列を示せる。

8. 其後の展開,

以上 $z=3$ の場合についてのべた。 $z=4, 5, 6$ に対しては非連続解に対して Inawashiro-Katsura 1980 がある。連続解に対して Sasaki-Katsura 1988 がある。⁶⁾

強磁性 bond の濃度(確率) $P(y)$ を (4) の形に与えたととき, p をかえると $g(h)$ がどう変るかという問題は Sasaki-Katsura⁷⁾ がある。このとき (32) は

$$K(x, y) = 2\pi \delta(y) \cos x$$

$$\begin{aligned} & -2p \frac{\sin(y-x)}{y} - 2(1-p) \frac{\sin(y+x)}{y} \\ & + 2p \frac{\sin(y-x)}{y-x} + 2(1-p) \frac{\sin(y+x)}{y+x} \end{aligned} \quad (40)$$

と置き,

$$S(x) = a + b \cos x - ic \sin x + \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n d_n j_n(x) \quad (41)$$

とおく、これは

$$\begin{aligned} g(h) = & a \delta(h) + \frac{1}{2} \{ (b+c) \delta(h-1) + (b-c) \delta(h+1) \} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} d_l P_l(h) \quad (|h| \leq 1) \end{aligned} \quad (42)$$

とおく、 k と等価である。(41), (40) を (17) に代入して $a, b, c, d_0, d_1, d_2, d_3$ までの代数方程式は表 3 のようになる。解は

- 1) $a=1, b=c=d_0=d_1=d_2=d_3=0$
- 2) $a=\frac{1}{3}, b=\frac{2}{3}, c=d_0=d_1=d_2=d_3=0$
- 3) $a=\frac{1}{2p-1}, b=2-\frac{1}{2p-1}, c=[(8p-7)(4p-3)]^{1/2}/(2p-1)$
- 4) $a=0.10683, b=0.43686, d_0=0.45631, d_2=0.05759$
 $c=d_1=d_3=0$
- 5) $a, b, \dots, d_3 \neq 0$ の p の関数である解

に分類される。今まで得られている 1) - 4) の他 5) が得られた。⁷⁾

$g(h)$ の図は別に発表する。⁷⁾ どの領域でどの解が物理的に実現されるかについては現在検討中である。また energy の極値と積分方程式の解の関係も近く発表する。

References

- 1) (1) (2) の導出は
 S. Katsuna and S. Fujiki, J. Phys C. 12 (1979) 1087
 総合報告と12
 S. Katsuna, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 87 (1986) 139
 桂, 猪苗代, 木公原, 藤木, 日本物理学会誌 42 (1987) 639.
 S. Katsuna, S. Inawashiro and T. Morita, J. Phys A 21
 (1988) 1937.
- 2) B. Buchberger, in Multidimensional Systems Theory
 (N. K. Bose ed.) (1985, Reidel, Dordrecht) 184.
 W. Boerge, R. Gebauer, and H. Kredel, J. Symbolic
 Computation 1 (1986) 83.
- 3) S. Katsuna, W. Fukuda, S. Inawashiro, N. M. Fujiki
 and R. Gebauer, Cell Biophys. 11 (1987) 309.
- 4) S. Moritsugu, On solving a system of algebraic
 equations by using a Gröbner basis, ISSAC 1988
 小村英恒 連立代数方程式の簡単化とその解法, 1986, 9, 26
 統研
- 5) 1) の Progress の Supplement 参照
- 6) M. Sasaki and S. Katsuna, Physica in press.
- 7) M. Sasaki and S. Katsuna, Physica in press.
- 8) 桂 理研シンポジウム 1968, 2月, 数式処理通信 5 No. 4
 1988, 11月, p. 13.

表 1. C_0 まじりと T ときの Gröbner basis
とその解

```

A>reduce33
in "gro2.red";
off time;

off ratpri$

load"groebner"$

f1:=-a+a**2+b**2/2$

f21:=3/4*c0**2+c0*c2/8+c2**2/160$

f2:=-b+2*a*b+b*c0+b**2/2+c0**2-f21$

f3:=-c0+2*a*c0+b*c0+f21$

f4:=-c2+2*a*c2-7/8*b*c2+5/16*c0**2
+c0*c2/16+45/256*c2**2$

f5:=a+b+c0-1$

c2:=0$

end;

2: groebner((f1,f2,f3,f5),(c0,a,b));

      3      2
(C0 + 27/5*B  - 3/2*B  - 7/5*B,

      3      2
A - 27/5*B  + 3/2*B  + 12/5*B - 1,

      4      3      2
B  - 4/9*B  - 4/9*B  + 16/81*B)

3: in "gr01.red";
solve(third(input(2)),b);

(B=0,B=4/9,B=2/3,B= - 2/3)
multiplicities!*;

(1,1,1,1)

```

```
y1:=first(input(2));
```

101

```
Y1 := (54*B3 - 15*B2 - 14*B + 10*C0)/10  
y2:=second(input(2));
```

```
Y2 := (10*A - 54*B3 + 15*B2 + 24*B - 10)/10  
b:=0$
```

```
solve(y1,c0);
```

```
(C0=0)  
solve(y2,a);
```

```
(A=1)  
clear b$
```

```
b:=4/9$
```

```
solve(y1,c0);
```

```
(C0=4/9)  
solve(y2,a);
```

```
(A=1/9)  
clear b$
```

```
b:=2/3$
```

```
solve(y1,c0);
```

```
(C0=0)  
solve(y2,a);
```

```
(A=1/3)  
clear b$
```

```
b:=-2/3$
```

```
solve(y1,c0);
```

```
(C0=4/3)  
solve(y2,a);
```

```
(A=1/3)
```

```
end;
```

表2. C_2 対 τ と τ_2 ときの Gröbner basis

6: groebner({f5, f3, f2, f4}, {c2, c0, b, a});

(C2 - 553533671491075763213860521904781915673 7
 37266681871841996206914766278492160
 251763756608325132004726974078402640323 6
 483982881452493457232659302318080
 27654944427705827122556639924206761761397 5
 37266681871841996206914766278492160
 19691981900242996082775583468147570066059 4
 37266681871841996206914766278492160
 132954370108602329885377854672478977549 3
 677576034033490840125723023245312
 268716882942976387392805804698230852401 2
 7453336374368399241382953255698432
 20551189154627141465991869295329230779
 7453336374368399241382953255698432
 469765428850710538530460779761192645
 7453336374368399241382953255698432
 C0 + 3999198412747322471520347516631 7
 141526048436749768091238400
 2066068372859276285226811407951 6
 20218006719535681155891200
 20572229072669593992254164305339 5
 141526048436749768091238400
 14592886780134811513837325525253 4
 141526048436749768091238400
 216282476307585366584509178061 3
 5661041937469990723649536

18193108671107743904303448797 2
 2573200880668177601658880
 3184111943601001594973468625
 5661041937469990723649536
 84232985436169723995316775
 5661041937469990723649536
 B - 3999198412747322471520347516631 7
 141526048436749768091238400
 2066068372859276285226811407951 6
 20218006719535681155891200
 20572229072669593992254164305339 5
 141526048436749768091238400
 14592886780134811513837325525253 4
 141526048436749768091238400
 216282476307585366584509178061 3
 5661041937469990723649536
 18193108671107743904303448797 2
 2573200880668177601658880
 3178450701663531604249819089
 5661041937469990723649536
 78571943498699733271667439
 5661041937469990723649536
 A - 8 2047389435712 7 3399016617044 6
 504997152843 504997152843
 2983827182848 5 1492044824578 4 1275872135360 3
 504997152843 504997152843 1514991458529
 194539581820 2 4499350400
 1514991458529 504997152843 1514991458529

表3 非対称分布の代数方程式

$$a = a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}c^2$$

$$b = \frac{1}{2}b^2 + 2ab + d_0^2 + bd_0 + \frac{1}{2}c^2$$

$$- \left(\frac{3}{4}d_0^2 - \frac{1}{8}d_0d_2 - \frac{5}{48}d_1^2 + \frac{1}{48}d_1d_3 + \frac{1}{160}d_2^2 + \frac{19}{1792}d_3^2 \right)$$

$$c = (2p-1) \left\{ 2ac + bc + \left(cd_0 + \frac{1}{2}bd_1 - \frac{1}{8}bd_3 \right) \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{3}d_0d_1 + \frac{7}{120}d_1d_2 - \frac{19}{560}d_2d_3 \right) \right\}$$

$$d_0 = 2ad_0 + \left(bd_0 - \frac{1}{2}cd_1 + \frac{1}{8}cd_3 \right)$$

$$+ \left(\frac{3}{4}d_0^2 - \frac{1}{8}d_0d_2 - \frac{5}{48}d_1^2 + \frac{1}{48}d_1d_3 + \frac{1}{160}d_2^2 + \frac{19}{1792}d_3^2 \right)$$

$$d_1 = (2p-1) \left\{ 2ad_1 + \left(\frac{3}{2}cd_0 - \frac{1}{2}bd_1 - \frac{3}{8}cd_2 + \frac{3}{8}cd_3 \right) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{5}{8}d_0d_1 - \frac{5}{16}d_1d_2 + \frac{13}{128}d_2d_3 - \frac{1}{16}d_3d_0 \right) \right\}$$

$$d_2 = 2ad_2 + \left(\frac{5}{8}cd_1 - \frac{7}{8}bd_2 + \frac{5}{16}cd_3 \right)$$

$$+ \left(-\frac{5}{16}d_0^2 + \frac{1}{16}d_0d_2 + \frac{25}{96}d_1^2 - \frac{65}{384}d_1d_3 - \frac{45}{256}d_2^2 + \frac{45}{512}d_3^2 \right)$$

$$d_3 = (2p-1) \left\{ 2ad_3 + \left(-\frac{7}{8}cd_0 + \frac{7}{8}bd_1 - \frac{7}{16}cd_2 - \frac{5}{16}bd_3 \right) \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{7}{48}d_0d_1 + \frac{91}{384}d_1d_2 - \frac{63}{256}d_2d_3 - \frac{19}{128}d_3d_0 \right) \right\}$$

$$a + b + d_0 = 1$$