数理解析研究所講究録
第 686 巻 1989 年 1-18

強理想グラフ予想とグラフの種数

関西学院大学（理）浅野考平（Kouhei Asano）

［Ｉ］　序論

理想グラフ予想に関しては，適当な概説が数多くある．ここでは，曲面に埋め込まれたグラフに対する理想グラフ予想に限って，概説を試みる．位相幾何学的グラフ理論上の結果が，それ自身は位相幾何学的グラフ理論の問題ではない強理想グラフ予想という問題にどの様に使われているかということを，中心に説明したい．

［II］　定義と背景

次のような記号を用いる．

χ：染色数．

ω：クリーク数．

θ：クリーク被覆数．

α：独立数．

クリーク数，クリーク分割数，独立数の定義を以下説明する．

2.1 クリーク数　$\omega(G)$.

グラフG=(V,E)において，Vの部分集合Cが完全グラフを誘導するとき，Cを<u>クリーク</u>(clique)という．Gのクリークの最大位数を，Gの<u>クリーク数</u>（clique number）という．

（完全部分グラフのことをクリークというのではなくて，頂点の集合のことをいう）

2.2 クリーク被覆数 $\theta(G)$.

G=(V,E)において，Vの交わらないクリークへの分割を，クリーク被覆という

2

クリーク被覆に含まれるクリークの個数の最小数をクリーク被覆数（clique cover number）という.

2.3 G=(V,E)において，Vの部分集合Iに属する頂点が互いに隣接していないとき独立点集合(independent set, stable set)であるという．Gの独立点集合の最大位数を，Gの独立数(independence number, stable number)という.

注意

定義より明らかに，

(1) $\chi(G)=\theta(G^c)$　　$\omega(G)=\alpha(G^c)$

(2)クリークに属する頂点を彩色するにはその位数以上の色が必要である.

したがって，$\chi(G)\geqq\omega(G)$である．（言い換えれば，$\theta(G)\geqq\alpha(G)$）

また，Gの補グラフに対して，上の不等式を適用すれば，$\alpha(G)\leqq\theta(G)$.

2.4 χ理想グラフ，α理想グラフ，理想グラフ

　Gがχ理想グラフ

⇔Gの任意の誘導部分グラフHに対して、$\chi(H)=\omega(H)$。

　Gがα理想グラフ

⇔Gの任意の誘導部分グラフHに対して、$\alpha(H)=\theta(H)$.

Gがα理想かつ，χ理想である時，理想グラフであるという.

注意

　(1) $\alpha(C_{2k+1})=k$，かつ$\theta(C_{2k+1})=k+1$であるからC_{2k+1}は非理想グラフである.

また，K_nとC_{2k+1}のジョインGは$\alpha(G)=k$かつ，$\theta(G)=k+1$であるので，これらのグラフも理想グラフではない.

　(2)２部グラフGは理想グラフである.

なぜならば，$\chi=\omega=2$，$\alpha=\theta=$｛Gの２部の内の位数の大きい方｝である．（必要ならば分割を適当に変更して．）

2.5 強理想グラフ予想[Berge1961]

Gが理想グラフであるための必要十分条長さ５以上の奇閉路、またはその補グラフを<u>誘導部分グラフ</u>として持たないことである。

Shannonの通信に関する論文のなかに$\alpha(G)\neq\theta(G)$となる最小のグラフは長さ５の閉路であるという記述があり，それによって動機づけられた．
そのままでは難しいと考えられたので，数年後，次の弱理想グラフ予想が提案された．
[BC]参照

2.6（弱）理想グラフ予想[Berge]

Gがα理想グラフであるための必要十分条件は，Gの補グラフG^cがα理想グラフであることである．

この弱理想グラフ予想は，Lovasz[Lo2]により既に証明されており，理想グラフ定理と呼ばれている．

長さ５以上の誘導奇閉路をodd hole，長さ５以上の奇閉路の補グラフである誘導部分グラフををodd antiholeという．この用語と，理想グラフ定理を用いると，強理想グラフ予想は次のように言い換えられる．

「Gがodd hole もodd antiholeも持たなければ，$\alpha(G)=\theta(G)$である．」
これが，強理想グラフ予想と同値であることは，すぐにわかる．何故なら，「」内の事柄が正しいとする．Gの任意の誘導部分グラフHを考えると，Hはodd hole，odd antihole を持たないので，$\alpha(H)=\theta(H)$である．従って，Gはα理想である．また，理想グラフ定理よりχ理想である．

[Ⅲ] 基本的結果

理想グラフに関する基本的結果をまとめる．

3.1 理想グラフ定理

> 3.1.1 理想グラフ定理 [Lo1]
>
> Gがα理想グラフであるための必要十分条件は，Gがχ理想グラフであることである．

Lovaszは，これより強い次の定理を証明した．

> 3.1.2 定理[Lo1]
>
> Gがα理想グラフであるための必要十分条件は，
>
> 「Gの任意の誘導部分グラフHに対して，$\alpha(H)\omega(H)\geqq|H|$」
>
> であることである．

$\alpha(H)=\omega(H^c)$であるから，定理3.1.2より理想グラフ定理が導かれる．

3.2 臨界非理想グラフと（α,ω）分割可能グラフ

Gが臨界非理想グラフ（critically imperfect graph）⇔Gが理想グラフでなくて，Gの任意の誘導部分グラフが理想グラフである．

Lovaszの定理により，Gが臨界非理想グラフであれば，

$$|G|=\omega(G)\alpha(G)+1$$

何故なら，任意の頂点xに対して，

$$\omega(G-x)\leqq\omega(G),\quad \alpha(G-x)\leqq\alpha(G)$$

$|G|-1=|G-x|\leqq\omega(G-x)\alpha(G-x)\leqq\omega(G)\alpha(G)$（G-xは理想グラフ）

$|G| \leqq \omega(G)\alpha(G)+1$,

Gは理想グラフではないので，$|G| > \omega(G)\alpha(G)$（G自身以外の任意の誘導部分グラフHは理想グラフだから，$|H| \leqq \alpha(H)\omega(H)$．従って，もし，$|G| \leqq \alpha(G)\omega(G)$であれば，Gが非理想グラフであることに反する．）

3.2.1 定義（α，ω）分割可能グラフ（(α ,ω)-partitionable graph）

α ,ωを２以上の自然数とする．

Gが（α，ω）分割可能グラフであるというのは，Gの位数が$\alpha\omega+1$であって，任意の頂点vに対して，G-vの頂点集合が，位数ωのα個のクリークに分解できてかつ，位数αのω個の独立点集合に分割できることをいう．

3.2.2 命題

任意の臨界非理想グラフは，（α，ω）分割可能グラフである．

（ただし，αは$\alpha(G)$，$\omega=\omega(G)$）

臨界非理想グラフであるから，位数は$\alpha\omega+1$である．任意の頂点vに対してG-vは理想グラフで，かつ$|G-v|=\alpha\omega$．また，$\omega(G-v) \geqq \omega-1$である．$\omega(G-v)=\omega-1$とする．G-vは理想グラフであるから，$\chi(G-v)=\omega-1$．故に$\alpha(G-v) \geqq |G-v|/(\omega-1) > \alpha$これは，矛盾．故に$\omega(G-v)=\omega$．同様に，$\alpha(G-v)=\theta(G-v)=\alpha$．G-vは理想グラフなので，$\alpha$個の位数$\omega$のクリークに分割される．

（α，ω）分割可能グラフの例

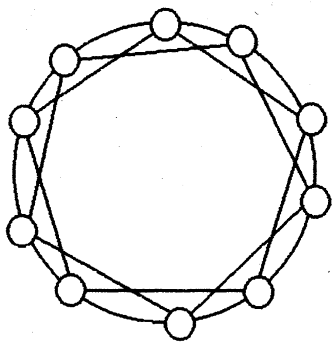
α，$\omega \geqq 3$

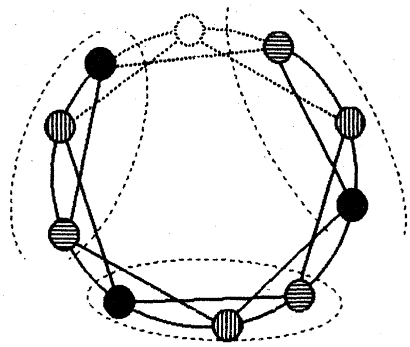
$(C_{\alpha\omega-1})^{\omega-1}$ は，（α，ω）分割可能グラフである.

（ただし，G^kはGの距離がk以下である頂点対を辺で結んでできた単純グラフ．）

$\alpha \geqq 3$かつ$\omega \geqq 3$のとき，このグラフは，臨界非理想グラフではない.

（非理想誘導部分グラフを含む，Chvatal）[Ch]





$(C_{10})^2$

$\alpha=\omega=3$，　$\alpha\omega+1=10$

クリーク分割

それぞれ独立点集合

> **3.2.3 命題**
>
> Gが（α，ω）分割可能グラフとする.
>
> $|G|=\alpha\omega+1$，$\alpha(G)=\alpha$，$\omega(G)=\omega$，$\chi(G)=\omega+1$，　$\theta(G)=\alpha+1$

3.2.4 命題[P] [BHT]

Gを（α，ω）分割可能グラフとする．｜G｜=n.

(1)Gはちょうどn個の位数ωのクリークをもつ．

(2)Gはちょうどn個の位数αの独立点集合をもつ．

(3)各頂点はちょうどω個の，位数ωのクリークに含まれる．

(4)各頂点はちょうどα個の，位数αの独立点集合に含まれる．

(5)位数ωの各クリークはちょうど１個の位数αの独立点集合と交わらない．

(6)位数αの各独立点集合はちょうど１個の位数ωのクリークと交わらない．

3.3 理想グラフとアルゴリズム

理想グラフの独立数問題は，線形計画法の問題に変換できる．そして，[GLS]によれば，この問題は，線形計画法の多項式時間アルゴリズムによって，グラフの位数の多項式で表せる時間で解ける．補グラフに対して，このアルゴリズムを，実行するとGのクリーク数が求めることができ，理想グラフであるから，染色数を求めることができる．
以下，線形計画法の問題への変換の方法を示す．

3.3.1 定義 fractional vertex packing number

Gの各頂点に次のような条件を満足するように，重みw(v)を与える．

各クリークCに対して，Cに属する頂点の重みの和は，1以下になるようにする．

のとき頂点の重みの合計の最大値をfractional vertex packing number$\alpha^*(G)$いう．

言い換えれば，fractional vertex packing number は，次のような線形計画法の解である．
グラフGの頂点集合Vとする．

任意のクリークCに対して　$\Sigma\ \{w(v): v\in C\} \leqq 1$,

$w(v)\geqq 0,\quad v\in V(G)$

という線形不等式が成立するという条件のもとで，

$\Sigma\ \{wi: 1\leqq i\leqq n\}$ の値を最大にせよ．

重みが整数であるという制限をつける．すなわち，頂点の重みは１または０であるとする．隣接する頂点はともに１という重みを持つことはないので，１という重みを持った頂点の集合は独立点集合である．逆に独立点集合Iに対してIに属する頂点に対して１という重みを与えれば，vertex　packingの条件を満足する．故に，重みに整数であるという制限をつけたときのfractinal vertex packing numberは独立数と等しい．
従って，$\alpha^{*}(G)\leqq\alpha(G)$である．

同様に，次のような線形計画法を考える．

各クリークCに対して，　$y(C)\geqq 0$

各頂点vに対して，　Σ{y(C)：vはCに含まれる．}≧1

という不等式のもとで，

Σy(C)：CはGのクリーク}を最小にせよ．

Σy(C)：CはGのクリーク}の最小値をfractional clique cover number という．
（実際　y(C)が整数であるという条件をつければ f.c.n.はクリーク被覆数と一致する．）

この２つの問題は双対問題となるので，

fractional vertex packing number= factional clique cover number

3.3.2 定理

Gが理想グラフ　⇔

Gの任意の誘導部分グラフHに対して，独立数とf.v.p.n.が等しい．

3.3.3 補題

Gが（α，ω）分割可能グラフであれば，$\alpha^*(G)=\alpha+1/\omega$

証明

①Gの各頂点に$1/\omega$の重みを与える．このときGの最大クリークの大きさは，命題により，ωであるから，．重みの割当の条件を満足している．したがって

$$\alpha^* \geq (\alpha\omega+1)*\omega=\alpha+1/\omega$$

②fractional clique cover number について考える．

Gは（α，ω）分割可能グラフであるから，各頂点はちょうどω個の位数ωのクリークに属する．

位数ωのクリークに対して1,その他のクリークに対して0という重みを与える．このとき条件を満足しているので，

$\mathrm{f.c.c.n.} \leq n*1/\omega$である．

故に　$\alpha^*(G)=\mathrm{f.c.c.n.} \leq \alpha+1/\omega$

独立数とf.v.p.n.が異なる例

長さ５の閉路の各頂点に1/2を割り当てると，合計は2.5．しかし，独立数は2である．

定理の証明

（←）Gが理想グラフでないとする．Gは臨界非理想グラフHを誘導部分グラフとして含む．Hは（α，ω）分割可能グラフである．補題により$\alpha^*(H) \neq \alpha(H)$．

（→）Gが理想グラフとする．$\alpha(G)=\theta(G)$だから，Gは$\alpha(G)$個の極大クリークC1,・・・・C$\alpha(G)$に分割される．各極大クリークCiに属する頂点の重みの合計は１以下でならなければならないので，$\alpha^*(G) \leqq \alpha(G)$である．定義より$\alpha^*(G) \geqq \alpha(G)$だから，$\alpha(G)=\alpha^*(G)$である．

●Gが与えられたとき，理想グラフかどうかを判定する問題がＰに属するか，ＮＰ完全であるかどうかは，未解決問題．ただし，平面グラフに対しては，多項式アルゴリズムが存在する．

3.4 その他

●連結グラフGにおいて，頂点の集合Cに対してG-Cが非連結である時，CはGの<u>切断</u>(cut)であるという．

3.4.1 定理　[Be]

Gは連結グラフとする．Gの切断Cに対して，Cが，クリークを成しているとする．G-Cの各連結成分が理想グラフであれば，Gは理想グラフである．

●理想グラフであるための十分条件

3.4.2 定理

長さ4のパスを誘導部分グラフとして持たないならば、$\chi(G)=\omega(G)$である．

帰納法で比較的簡単に証明できる．

●この定理の仮定である性質は，Gがこれを持てばGの任意の誘導部分グラフもこの性質

を持つ。（遺伝的性質という．）したがって，この性質はGが理想グラフでの十分条件である．しかし，必要条件ではない．何故ならば，長さ４のパス自身は理想グラフである．

●強理想グラフ予想対して完全なグラフのクラス[Co]

あるクラスに属するグラフに対して強理想グラフ予想が正しければ，任意のグラフに対する強理想グラフ予想が正しいときがある．このようなとき，強理想グラフに対して完全なクラスという．グラフの変換G→G’で，Gが理想グラフであるための必要十分条件が，G’が理想グラフであるようなものを考えればよい．

例　amalgamation，clique bond，replacementなど

●種数を減らすような変換があれば良いが．

［Ⅳ］　平面グラフに対する強理想グラフ予想．

A. C. Tuckerによって，証明された．

4.1 定理[Tu]1973

平面グラフに対して，理想グラフ予想は正しい．

以下この定理の証明の概略を述べる．

Gは臨界非理想グラフと仮定する．Gは長さが５以上の奇数である閉路であることを示す．

4.2 補題

Gは上記の閉路ではないと仮定する．任意の頂点xをとり，G-xの彩色を考える．

xの近傍$N_G(x)$の頂点a,bが異なる色1,2で彩色されいるとする．

もし，G-xのpathPで$P \cap N_G(x) = \{a,b\}$かつP上の頂点はcolor1,2をもつものが存在したら，aとbは隣接している．

証明

Pは長さが偶数の誘導路である．従って，もしaとbが隣接していなければ，Pにxを加えた閉路はGにおけるodd holeである．odd holeは非理想グラフであるからこれは仮定に反する．

4.3 補題

Gはクリークをなす3-cutを持たない．

証明

Gがこの様な3-cutTを含むとする．G-Tの各連結成分はは理想グラフである．，Bergeの補題により，Gは理想グラフである．

定理の証明

クリーク数$\omega(G)$による場合分けをする．

①$\omega(G)=1$のとき，辺は存在しないので，Gは理想グラフであるから，仮定に矛盾．

②$\omega(G)=2$のとき，

任意の頂点xをとる．G-xは理想グラフである．$\omega(G-x)\leqq\omega(G)$であるから，$\omega(G-x)=1,2$の場合を考えれば良い．$\omega(G-x)=1$のときGは２部グラフとなり，Gが非理想グラフであることに反する．

$\omega(G-x)=2$とする．$\chi(G-x)=2$だから，G-xは２部グラフ．Gは非理想グラフなので，２部グラフではない．従って，Gは奇閉路をもつ．（これはxを含む）

$N_G(x)$の２つの頂点a,bがG-xの中でpathで結ばれているので，補題によりa,bは隣接している．a,b,xがクリークをなしているので，仮定に反する．

●上の２つの場合は平面性を使わない．

③$\omega(G)=4$のとき，

４色定理を用いると，$\chi(G)=4$．任意のxに対して，G-xは理想グラフであるから，Gの任意の誘導部分グラフHに対して$\chi(H)=\omega(H)$になり，Gが非理想グラフであることに反する．

（もちろんTuckerは直接$\chi(G)=4$であることを証明している．）

④$\omega(G)=3$のとき，

Gは非理想グラフであるから$\chi(G)=4$である．$\chi(G-x)=\omega(G-x)\leqq\omega(G)=3$より，$\chi(G-x)\leqq 3$である．

最小次数$\delta(G)$による場合分けをする．

$\delta(G)\leqq 2$の場合．

xを最小次数を持つ頂点とする．このとき，G-xの３－彩色はGに拡張できるので，$\chi(G)=4$に反する．

$\delta(G)=3$の場合．

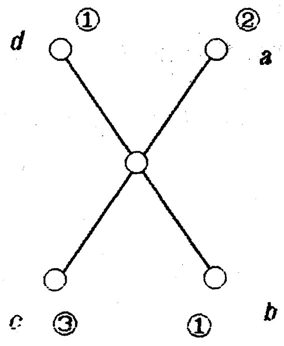
$N_G(x)=\{a,b,c\}$とする．G-xの３－彩色において，a,b.cは異なる色を持っている．（$\chi(G)=4$）それぞれの色を1,2,3とする．1,2という２つの色の頂点の集合をによってG-xにおいて誘導された部分グラフにおいて，(a,b)pathが存在するはず．（$\chi(G)=4$）補題によりa,bは隣接しているはず．同様に，b,cおよびc,aは隣接している．

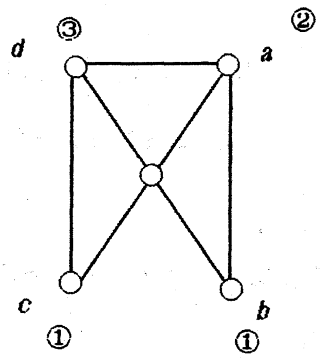
このとき，{a,b,c}（=Tとおく）は3-cutでかつクリークである．これは補題に反する．

$\delta(G)=4$の場合．

$N_G(x)=\{a,b,c,d\}$とおく．$N_G(x)$には３色が用いられているはず．従って次の２つの場合にわけられる．

(1)1および2の色を持つ頂点の集合によって誘導されるG-xの部分グラフにおいて(a,b)-pathが存在する．（もし存在しなければ，b,c,dの色をそのままにしてaの色を3に変換できる．$\chi(G)=4$に反する．）





○の中は色を示す．

故に，補題により，a,cは隣接している．{a,c,x} は3-cutでかつクリークであるから補題に反する．

(2)同様にすると，aとb，cとd，dとaは隣接していることがわかる．

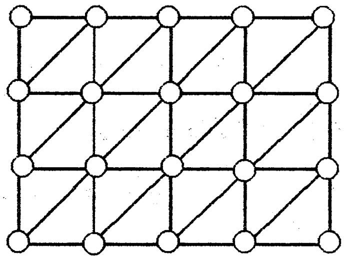
Tuckerはこの部分の結果を拡張し，次の定理を証明した．

> **4.4 定理[Tu2]**
>
> ω(G)=3であるグラフに対して，強理想グラフ予想は成立する．

［Ｖ］　種数１のグラフに対する強理想グラフ予想．

C.Grinstead[Gr1][Gr2]は種数１のグラフに対して，強理想グラフ予想が成立することを証明した．

> **5.1 補題[Alt][Ne]**
>
> 種数１のグラフに対して，最小次数が６以上であれば６正則
>
> さらに，６正則グラフは次のようにして構成したグラフと同型である．



向かい合った辺どうしを同一視し，トーラス上の６－正則グラフを構成する．

5.2 補題

Gを臨界非理想グラフとする．$\delta(G)\leqq 6$であれば$\omega(G)\leqq 4$である．

証明

最小次数を持つ頂点をxとする．

Gは（α，ω）分割可能グラフであるから，定理より，xは$\omega(G)$個の位数$\omega(G)$のクリークに含まれる．

①$\omega(G)=5$とする．

xを含むクリークは$N_G(x)\cup\{x\}$に含まれる．従って，$N_G(x)$は大きさ４のクリークを５個含む．

一方$\omega(G)=5$なので，NG(x)は大きさ５のクリークを含まない．故に$N_G(x)$の誘導部分グラフはK６から互いに隣接していない２つの辺を除いてできたグラフの部分グラフである．このグラフは大きさ４のクリークは高々４個しか含まない．これは矛盾．

$\omega(G)=6$とする．$N_G(x)$は６個の大きさ５のクリークを含む．すなわち$N_G(x)$は大きさ６のクリークである．$N_G(x)\cup\{x\}$は大きさ７のクリークになり矛盾．

$\omega(G)=7$とすると，Gは完全グラフであり，非理想グラフであることに反する．

5.3 補題［Berge1961］

Gが理想グラフであるとする．Gの任意の頂点xをとる。

Gに新しい頂点yをくわえ、yと$N_G(x)$を辺で結んでできたグラフG○xは理想グラフである。

5.4 補題

Gが理想グラフであるとする。Gの任意の頂点xをとる。

Gに新しい頂点yをくわえ、yと$N_G(x) \cup \{x\}$を辺で結んでできたグラフは理想グラフである。

5.5 補題

Gは臨界非理想グラフとする．$\omega(G)>3$ならば$\delta(G) \geqq 6$である．

証明

$\omega(G)=4$かつ$\delta(G)=5$（<5のときも同様）とする．

最小次数を持つ頂点をxとする．xは４個の大きさ４のクリークに含まれる．従って，$N_G(x)$は大きさ３のクリークを４個含む．

また，大きさ４のクリークを含まないので，$N_G(x)$の少なくとも２つの頂点対は隣接していない．もし３個以上の頂点対が隣接していなければ，大きさ３のクリークは高々２個である．従って$N_G(x)$が誘導する部分グラフはK_5から隣接していない辺を除いてできたグラフである．

G-xは理想グラフであるが，これは上の補題5.4に反する．

5.6 定理

種数１のグラフに対して強理想グラフ予想は正しい.

証明

種数１のグラフは$\delta(G)\leqq 6$である. 従って, $\omega(G)\leqq 4$

一方$\omega(G)\leqq 3$のとき, Tuckerの定理により, 成立.

$\omega(G)=4$のときだけを考えれば良い.

$\omega(G)\geqq 4$のとき, $\delta(G)\geqq 6$なので６正則グラフとなり, 特徴づけがなされている.

以下略.

［VI］　文献

強理想グラフ予想についての概説は有名なものがいくつかある. 例えば,

[BC]C.Berge, V.Chvatal(eds.), Topics on Perfect Graphs, Ann. Discrete Math.21, North-Holland, Amsterdom 1984.

[Go]M.C.Golumbic, Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs, Academic Press, New York 1981.

[Lo1]L.Lovasz, Perfect graphs, Selected Topics in Graph Theory 2, pp55-88. Academic Press, London 1983.

がある. 特に[BC]および[Go]は本全部が概説と言ってよい.

[Alt]A. Altshuler, Construction and enumeration of regular maps on torus, Discrete Math. 4(1973)201-217.

[Be]C.Berge,Graphes et hypergraphes,North-Holland, Amsterdom 1973.

日本語訳, グラフの理論, サイエンス社　1976年

[BHT]R.G.Bland, H.C.Huang, L.E.Trotter,Jr.,Graphical properties related to minimal imperfection, Discrete Math.27(1979)11-22.

[Ch]V.Chvatal,A semi-strong perfect graph conjecture, Ann. Dicrete Math.21 (1984)279-280.

[Co]D.G.Corneil, Families of Graphs complete for the strong perfect graph conjecture,J.Graph Theory 10(1986)33-40

[Gr1]C. Grinstead, The perfect graph conjecture for a class of graphs, PhD. Thesis. UCLA, Los Angels(1978)

[Gr2]C. Grinstead, The perfect graph conjecture for toroidal graphs, J. Combin. Theory(B) 30(1981) 70-74.

[GLS]M.Groetshel, L.Lovasz, A.P.Shrijver, Polynomial algorithms for perfect graphs, Ann. Discrete Math 21(1981) 322-358

[Lo2]L. Lovasz, A characterization of perfect graphs,J. Combin. Theory,(B)13 (1972)95-98.

[Ne]S.Negami,Uniqueness and faithfulness of embedding of toroidal graphs, Discrete Math.44(1983) 161-180.

[P]M.W.Padberg, Perfect zero-one matirices, Math. Programmig 6(1974)180-196.

[Tu]A.C.Tucker, The strong perfect graph conjecture for planar graphs, Canad. J. Math. 25,25(1973)103-114.

[Tu2]A. C. Tucker, Critical perfdect graphs and perfect 3-choromatic graphs, J. Combin. Theory(B)25(1977)143-149.