

Graph と群 - Voltage Graph について

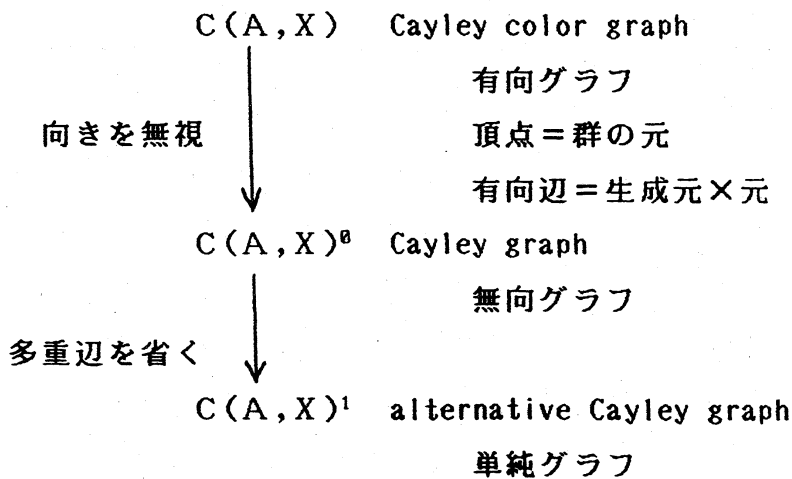
桐蔭学園工専 渡辺 信 (Shin Watanabe)

I 群表現としての Graph

(1) Cayley Graph

群を定義する方法として、その具体的構造を示すグラフは1878年に Cayley によって “Cayley color graph” が作られた。Cayley は群の全ての元を頂点として生成元毎に辺を色分けをした有向グラフ $C(A, X)$ を定義した。群 A とグラフとの関係を示す。

群 A	グラフ $G = C(A, X)$
元 A	頂点 $V(G)$
生成元 $X \times A$	辺 $E(G) = (x, a) = x_a$
	端点 a と ax



Cayley color Graph の性質

① グラフは生成元の個数 = p の時、 $2p$ -正則グラフである

- ②グラフの道は群の語に対応する
- ③グラフの道の継続は語の積に対応する
- ④グラフの閉路は群の単位元に対する語となっている
- ⑤グラフの連結性は $ax=b$ の解が存在することを示す

Cayley graph の例

群 $A = Z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 生成元 $X = \{2, 3\}$ 2:実線 3:点線で示す

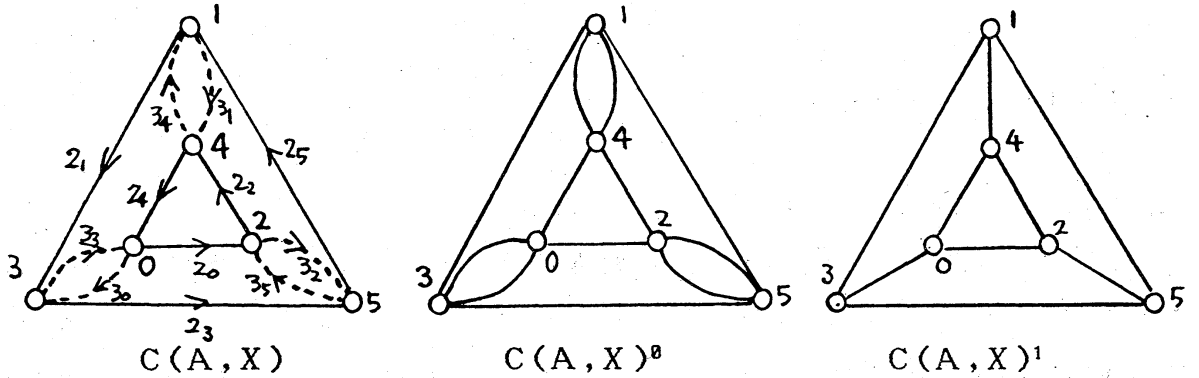
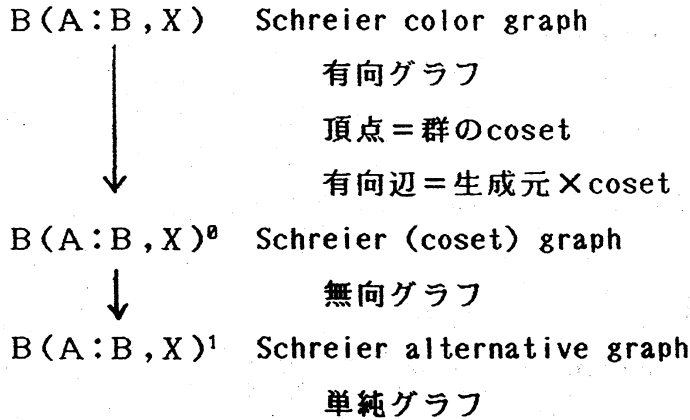


図1. Cayley graph

(2) Schreier Graph

Cayley と同様1927年 Schreier も部分群の剰余類を頂点として生成元毎に辺を色分けをした有向グラフ $S(A:B, X)$ を定義した. 群と Schreier グラフの関係を示す.

群 A と部分群 B	グラフ $G = S(A:B, X)$
部分群 B の剰余類 B_a	頂点 $V(G)$
生成元 $X \times A$	辺 $E(G) = (x, a) = x B_a x$
	端点 B_a と B_{ax}



Schreier graph の例

群 $A = D_3 = \{1, (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2)\}$

部分群 $B = \{1, (2,3)\}$

生成元 $X = \{(1,2,3), (1,2)\}$ ($(1,2,3)$:実線, $(1,2)$:点線で示す)

$S(A:D_3, X)$ の頂点 = $\{B_1, B_{(1,2)}, B_{(1,3)}\}$

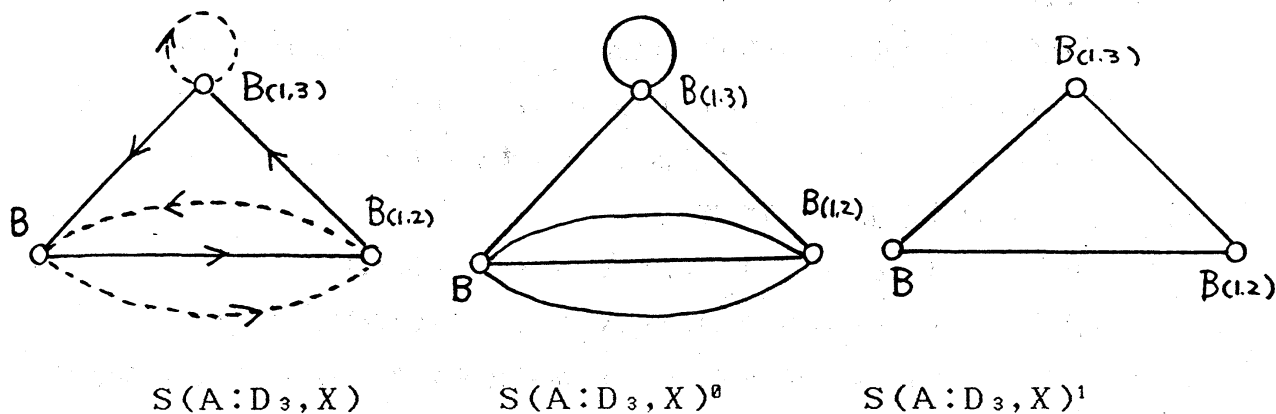


図 2. Schreier graph

Schreier Graph の性質

- ① グラフは生成元の個数 = p の時, $2p$ -正則グラフである
- ② 連結な正則な偶グラフ G は Schreier coset graph に同型である
- (3) Cayley Graph と Schreier graph の関係
 - ① $B = \{1\}$ の時, $S(A:B, X) \cong C(A, X)$
 - ② B が正規部分群の時, $S(A:B, X) \cong C(A/B, X/B)$
 A/B は剰余群 X/B は剰余準同型の生成元の集合

II Voltage Graph

(1) Ordinary Voltage Graph

グラフ G を基礎にして, 群 A と組合せてより大きなグラフを作り出す方法は, 1974年 Gross の ordinary voltage graph construction として知られている. グラフの各辺に群 A の元を, 重みとして写像 α によって対応させる. この重みが新しいグラフの辺の間の連結を決定する. 1974年 Gross and Tucker によって, このグラフの改善がなされている. 記号を説明する.

G 有向グラフ base graph
 A 群 (有限群) voltage group
 $\alpha : E(G) \longrightarrow A$ ordinary voltage assignment on G
 $\Downarrow \qquad \qquad \Downarrow$
 $e^+ = (u, v) \mapsto b$
 values of α voltage
 $\alpha(e^+) = b$ のとき $\alpha(e^-) = (\alpha(e^+))^{-1} = -b$ を対応
 $\langle G, \alpha \rangle$ ordinary voltage graph
 (G, α) $\langle G, \alpha \rangle$ から導かれたグラフ

(2) (G, α) の構成法とその性質

頂点 $V((G, \alpha)) = V(G) \times A = \{v_a = (v, a)\}$

辺 $E((G, \alpha)) = E(G) \times A = \{e_a = (e, a)\}$

G において $e^+ = (u, v)$ に voltage b が与えられている時, 対応する辺は $E((G, \alpha))$ は $e_a^+ = (u_a, v_{ab})$ である.

base graph G の頂点の個数を p , 辺の本数を q とする. 群 A の元の個数を t とすると, (G, α) の頂点の個数 = $p t$, (G, α) の辺の本数 = $q t$ となる.

例 1. (G, α) をグラフ $\langle G, \alpha \rangle$ から導くことについて

G 有向 dumbbell graph 頂点数 = 2, 辺本数 = 3

$A = Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 位数 = 5

$E(G) = \{c, d, e\}$ の各辺に対する voltage を $\alpha(c) = 1, \alpha(d) = 0, \alpha(e) = 2$

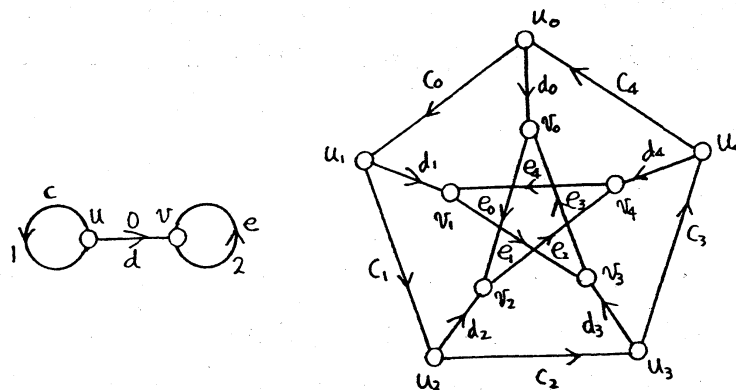


図 3. (a) dumbbell graph (b) $(G, \alpha) = P(5, 2)$

(G, α) の頂点数 = 10, 辺本数 = 15 を満たしている

$E((G, \alpha))$ の各有向辺は

$$c_i^+ : u_i \rightarrow u_{i+1}, \quad d_i^+ : u_i \rightarrow v_{i+0}, \quad e_i^+ : v_i \rightarrow v_{i+2}$$

として結ばれている。

この例を変形して、一般の Petersen Graph $P(n,k)$ を作ることが出来る。

G を有向 dumbbell graph, $A = \mathbb{Z}_n$ とし, $E(G)$ の2つのループ c, e に対して voltage を $\alpha(c)=1, \alpha(e)=k$ と決めればよい。

base graph G が平面グラフであっても、新しく作られるグラフがその性質を引き継がないことがある。逆の例を次に示す。

例2. (G, α) をグラフ G から導くことについて

G 有向二部グラフ $K_{3,3}$, $A = \mathbb{Z}_2$,

$E(K_{3,3})$ の voltage は実線部分の各辺に $\alpha(\text{実線})=0, \alpha(\text{点線})=1$ とする。

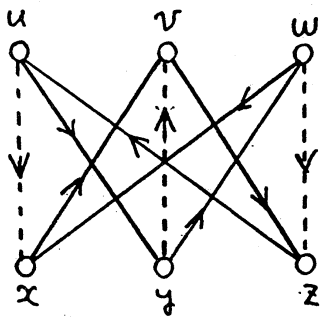
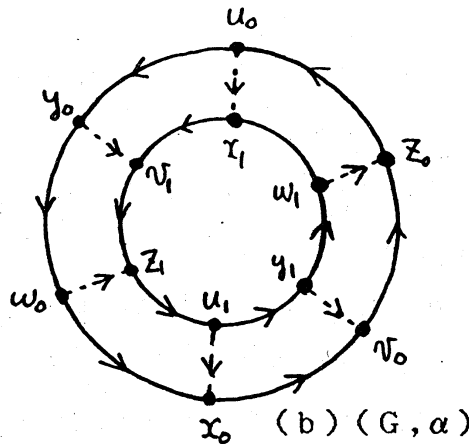


図4. (a) $K_{3,3}$



(b) (G, α)

base graph G の頂点 v に対して、対応する $(G; \alpha)$ の頂点の集合 $\{v_a\}$ を頂点 v の fiber と言う。辺に関しても G の辺 e に対応する辺の集合 $\{e_a\}$ を辺 e の fiber と言う。 G の辺 $e = (u, v)$ の起点 u , 終点 v とし, $\alpha(e) = b$ とする時, 辺 e に対応する辺 e_a の起点は頂点 u の fiber, 終点は頂点 v の fiber にあり, $e_a = (u_a, v_{a+b})$ となる。

頂点 u の fiber $\{u_a\}$ と頂点 v の fiber $\{v_a\}$ の個数は等しい。この個数の対応関係は、辺 $e = (u, v)$ の対応辺 $e_a = (u_a, v_{a+b})$ による $\{u_a\}$ と $\{v_a\}$ の 1-1 対応によって与えられる。また、ループでない辺 e の fiber は独立した t 個 (群 A の位数) の K_2 からなる集合に同型である。ループの辺に対してはサイクルが対応することもわかる。

例3. (G, α) の G 頂点の fiber について

G 有向木 T_3 , $V(T_3) = \{u, v, w\}$, $E(T_3) = \{d, e\}$ $A = \mathbb{Z}_3$ 位数 = 3

$E(T_3) = \{d, e\}$ の voltage $\alpha(d)=1, \alpha(e)=2$

(G, α) の各辺は, $d_i^+ : u_i \longrightarrow v_{i+1}, e_i^+ : v_i \longrightarrow w_{i+2}$

(G, α) における G の各頂点の fiber の個数は 3 で皆等しい

各頂点 u の fiber $\{u_a\} = \{u_0, u_1, u_2\}$

また (G, α) における G の辺に対する fiber の個数は 3 に等しく, 3 個の独立した K_2 からなっている.

各辺 d の fiber $\{d_a\} = \{d_0, d_1, d_2\}$,

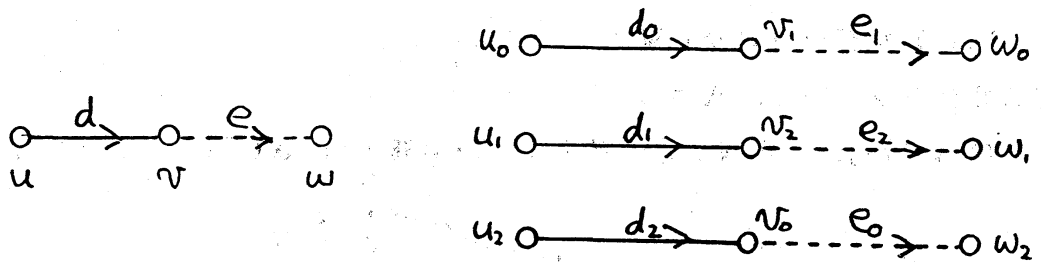


図 5. (a) T_3

(b) (G, α)

例 4. (G, α) の G のループに対応するサイクルについて

G 有向 bouquet $B_2, E(B_2) = \{d, e\}$ は 2 本のループからなる. ループ d の fiber を実線, ループ e の fiber を点線で示す. 実線のサイクルの長さ = 6, 点線のサイクルの長さ = 3 と異なっている. 辺に与えた voltage によって異なる.

$A = Z_6, E(B_2) = \{d, e\}$ の voltage $\alpha(d)=1, \alpha(e)=2$

(G, α) の各辺は, $d_i^+ : u_i \longrightarrow u_{i+1}, e_i^+ : u_i \longrightarrow u_{i+2}$

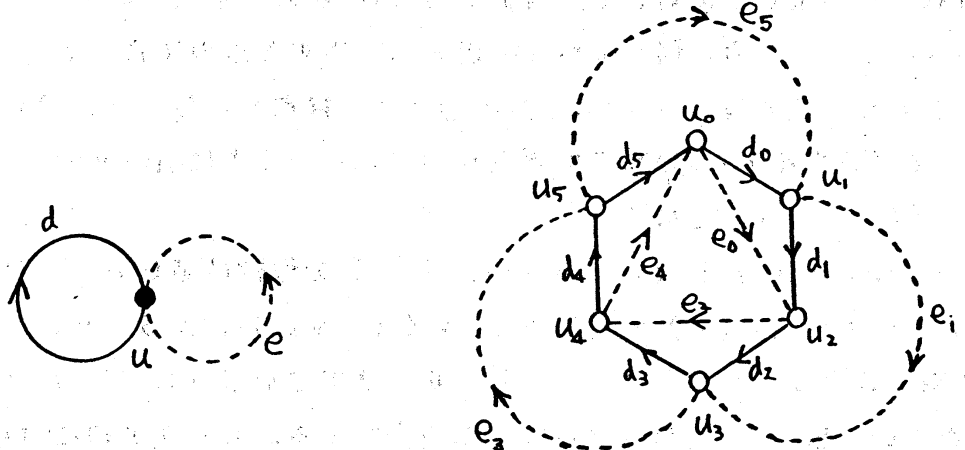


図 6. (a) bouquet B_2

(b) (G, α)

ループに対応する (G, α) のサイクルの長さの違いや, G のサイクルに対応する (G, α) のサイクルの長さの違いは, G の辺に与えられた voltage の違いによ

る。グラフ G のサイクル C に対する voltage をサイクル C 上の辺に与えられた voltage の積で次のように定義する。

G におけるサイクル $C = e_1^{s_1}, e_2^{s_2}, \dots, e_n^{s_n}$ の辺の voltage の積をサイクル C の net voltage とする。ただし, $s_i = +$ or $-$ とする。特に群 A が非可換群の時は, サイクルの基点 v が問題となるが, 基点 u と基点 v との net voltage は共役な関係になっている。

例 5. (G, α) のサイクルについて

$$G = K_4, A = Z_2 = \{0, 1\}$$

各辺の voltage はすべて 1 とする時, 実線のサイクルの net voltage = 1, 点線のサイクルの net voltage = 0

実線のサイクルに対応するサイクルは長さ 6 が 1 個, 点線のサイクルに対応するサイクルは長さ 3 が 2 個ある。

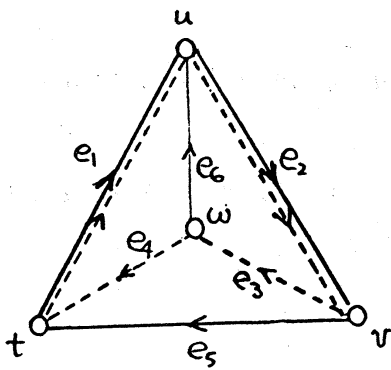
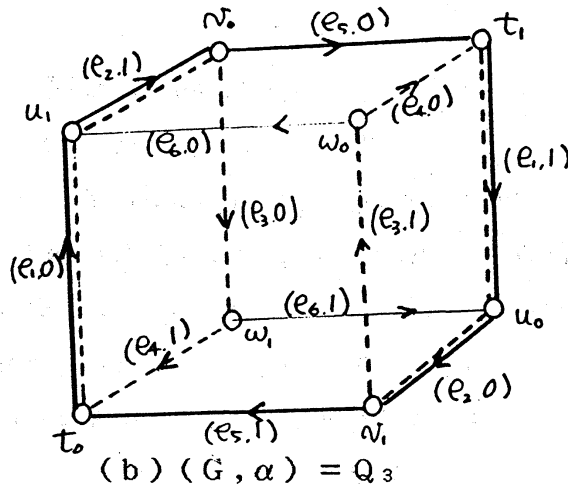


図 7. (a) K_4



(b) $(G, \alpha) = Q_3$

G のサイクル C の長さが k で, その net voltage = n で $n^m = 1$ の時, これに対応する (G, α) のサイクルの長さは km で, サイクルの個数は t/m である。ただし, t は群 A の位数である。対応するサイクルは頂点 u の fiber を m 個用いることからサイクルの個数は群 A の位数を m で割れば良い。

グラフの道 W に対する voltage を道 W 上の辺に与えられた voltage の和で次のように定義することは自然である。 G 中の道 $W = e_1^{s_1}, e_2^{s_2}, \dots, e_n^{s_n}$ の辺の voltage の和を道 W の net voltage とする。ただし, $s_i = +$ or $-$ とする。道 W の fiber は群 A の位数 t に等しい個数存在する。

例 6. (G, α) の道について

$$G = K_4, A = Z_2 = \{0, 1\}, \text{各辺の voltage はすべて 1}$$

点線の道の net voltage = 1

点線の道に対応する (G, α) の道の始点は頂点 u の fiber $\{u_a\}$ で終点は頂点 v の fiber $\{v_a\}$ である。

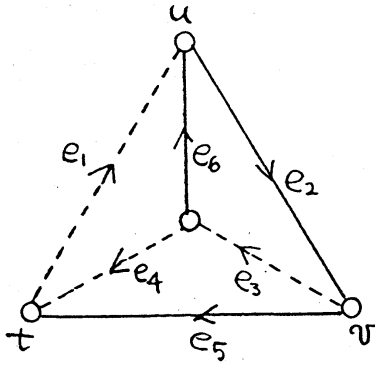
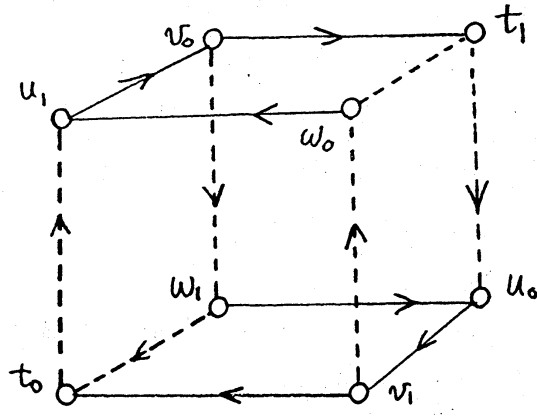


図 8. (a) K_4



(b) (G, α)

(3) ordinary Voltage Graph の拡張

- relative voltage graph と permutation voltage graph

relative voltage graph について

ordinary voltage graph の自然な拡張である, relative voltage graph の構成は1977年 Gross and Tucker によって紹介された。

- G 有向グラフ base graph
- A 群 (有限群) voltage group
- B A の部分群
- $\alpha: E(G) \longrightarrow A$ voltage assignment for G in A relative to B
- $\langle G, \alpha / B \rangle$ relative voltage graph
- $(G, \alpha / B)$ $\langle G, \alpha / B \rangle$ から導かれるグラフ

頂点 $V(\langle G, \alpha / B \rangle) = V(G) \times (A : B) = \{v_{Ba} = (v, Ba)\}$

辺 $E(\langle G, \alpha / B \rangle) = E(G) \times (A : B) = \{e_{Ba} = (e, Ba)\}$

G において $e^* = (u, v)$ に voltage b が与えられている時, 対応する辺は $E(\langle G, \alpha / B \rangle)$ は $e_{Ba^*} = (u_{Ba}, v_{Ba^*b})$ である。

群 A の部分グラフ B とし $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ を A の生成元とする. 有向グラフ B_n (bouquet) の辺に relative voltage x_1, x_2, \dots, x_n を対応させて誘導されるグラフ $(G, \alpha / B)$ は Schreier graph $S(A : B, X)$ に同型である。

例7. $(G, \alpha/B)$ をグラフ $\langle G, \alpha/B \rangle$ から導くことについて

G dumbbell graph $V(G) = \{u, v\}$, $E(G) = \{d, e, f\}$

$A = D_3$, 部分群 $B = \{1, (2,3)\}$

$\alpha(d) = (1,2)$, $\alpha(e) = 1$, $\alpha(f) = (2,3)$

$(G, \alpha/B)$ の頂点集合 = $\{u_B, u_{B(12)}, u_{B(13)}, v_B, v_{B(12)}, v_{B(13)}\}$

辺集合 = $\{d_B, d_{B(12)}, d_{B(13)}, e_B, e_{B(12)}, e_{B(13)}, f_B, f_{B(12)}, f_{B(13)}\}$

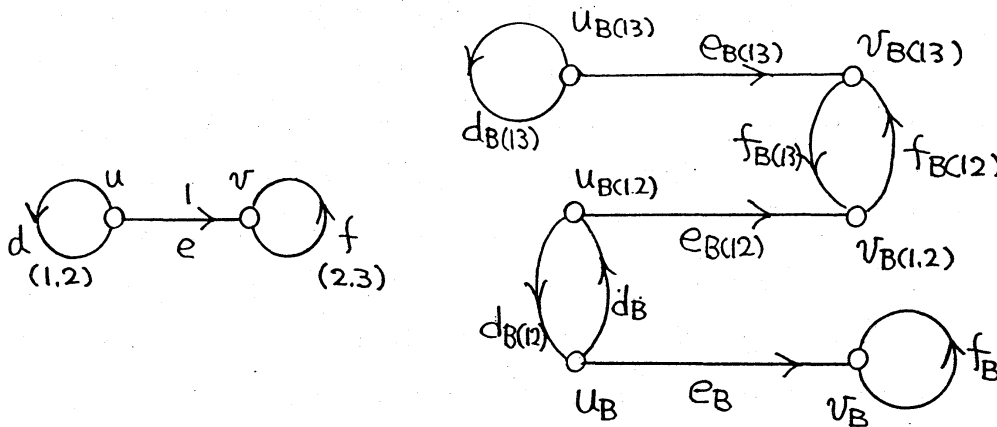


図9. (a)dumbbell graph (b) $(G, \alpha/B)$

例8. $(G, \alpha/B)$ と $S(A:B, X)$ の同型について (図2参照)

グラフ $(G, \alpha/B)$ が Schreier graph $S(A:B, X)$ と同型である例を示す.

G bouquet B_2 $V(B_2) = \{u\}$, $E(B_2) = \{d, e\}$

$A = D_3$, 部分群 $B = \{1, (2,3)\}$, $X = \{(1,2), (1,2,3)\}$

$\alpha(d) = (1,2)$, $\alpha(e) = (1,2,3)$

$(G, \alpha/B)$ の頂点集合 = $\{u_B, u_{B(12)}, u_{B(13)}\}$

辺集合 = $\{d_B, d_{B(12)}, d_{B(13)}, e_B, e_{B(12)}, e_{B(13)}\}$

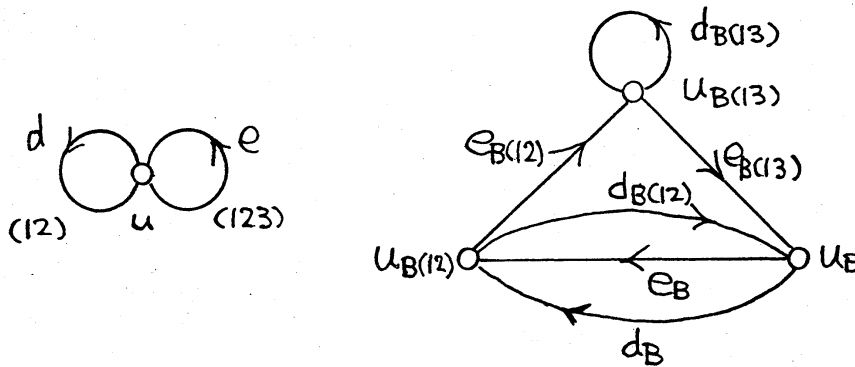


図10. (a)bouquet B_2 (b) $S(A:D_3, X)$

permutation voltage graph について

relative voltage graph からグラフを構成することに対して, 群Aとして自然数の集合 $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ の置換全体で作る n 次の対称群 S_n を用いてグラフを構成することが1977年 Gross and Tucker によって紹介された.

- G 有向グラフ base graph
- A 群 n 次対称群 voltage group
- $\alpha : E(G) \longrightarrow A$ permutation voltage assignment for G
- $\langle G, \alpha \rangle_n$ permutation voltage graph
- $(G, \alpha)_n$ $\langle G, \alpha \rangle_n$ から導かれるグラフ

頂点 $V(\langle G, \alpha \rangle_n) = V(G) \times N_n = \{v_m = (v, m)\}$

辺 $E(\langle G, \alpha \rangle_n) = E(G) \times N_n = \{e_m = (e, m)\}$

Gにおいて $e^+ = (u, v)$ に voltage π が与えられている時, 対応する辺は $E(\langle G, \alpha \rangle_n)$ は $e_i^+ = (u_i, v_{\pi(i)})$ である.

例9. $(G, \alpha)_n$ をグラフ $\langle G, \alpha \rangle_n$ から導くことについて

G dumbbell graph $V(G) = \{u, v\}$, $E(G) = \{d, e, f\}$

$A = S_3$, $\alpha(d) = (1, 2, 3)$, $\alpha(e) = (2, 3)$, $\alpha(f) = (1, 2)$

$(G, \alpha)_3$ の頂点集合 = $\{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$

辺集合 = $\{d_1, d_2, d_3, e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3\}$

permutation voltage graph $\langle G, \alpha \rangle_3$ の道Wの始点を u , net permutation voltage π に対して, $(G, \alpha)_3$ の頂点 u_i を始点とする道は唯一決まり, その終点は $v_{\pi(i)}$ である. 図11(a)の道 $W = e^+, f^+, e^-$ の net voltage π は $(23)(12)(23) = (13)$ となり, 始点 u_1 , 終点 u_3 が決まる. (図の中で点線で示す)

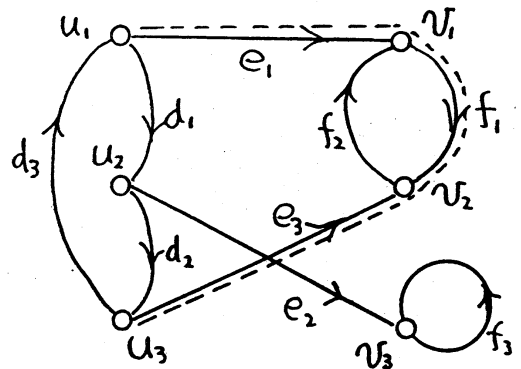
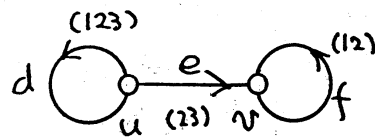


図11. (a)dumbbell graph

(b) $(G, \alpha)_3$

例 10. $(G, \alpha)_n$ のサイクルについて

G サイクル C_4 $V(G) = \{u, v, w, t\}$ $E(G) = \{d, e, f, j\}$

A 9次対称群 S_9 $\alpha(d) = (89), \alpha(e) = (1567), \alpha(f) = (127), \alpha(j) = (145)$

サイクル C_4 の net permutation voltage $\pi = (1)(27)(3)(456)(89)$

$\langle G, \alpha \rangle_9$ のサイクル C_4 の基点 u , 長さ = 4 とする時, 対応する $(G, \alpha)_9$ のサイクルは 5 個ある. サイクル数は net permutation voltage π の巡回置換の個数に等しい. π のサイクル構成は, 巡回置換の長さ $c_1=2, c_2=2, c_3=1, c_4=0, c_5=0, c_6=0, c_7=0, c_8=0, c_9=0$ より $(2, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ となり, 長さ 4 のサイクルが 2 個, 長さ 8 が 2 個, 長さ 12 が 1 個となることがわかる.

始点 u_1, v_1, w_5, t_5, u_1

始点 $u_2, v_2, w_2, t_7, u_7, v_7, w_1, t_2, u_2$

始点 u_3, v_3, w_3, t_3, u_3

始点 $u_4, v_4, w_4, t_4, u_5, v_5, w_6, t_6, u_6, v_6, w_7, t_1, u_4$

始点 $u_8, v_9, w_9, t_9, u_9, v_8, w_8, t_8, u_8$

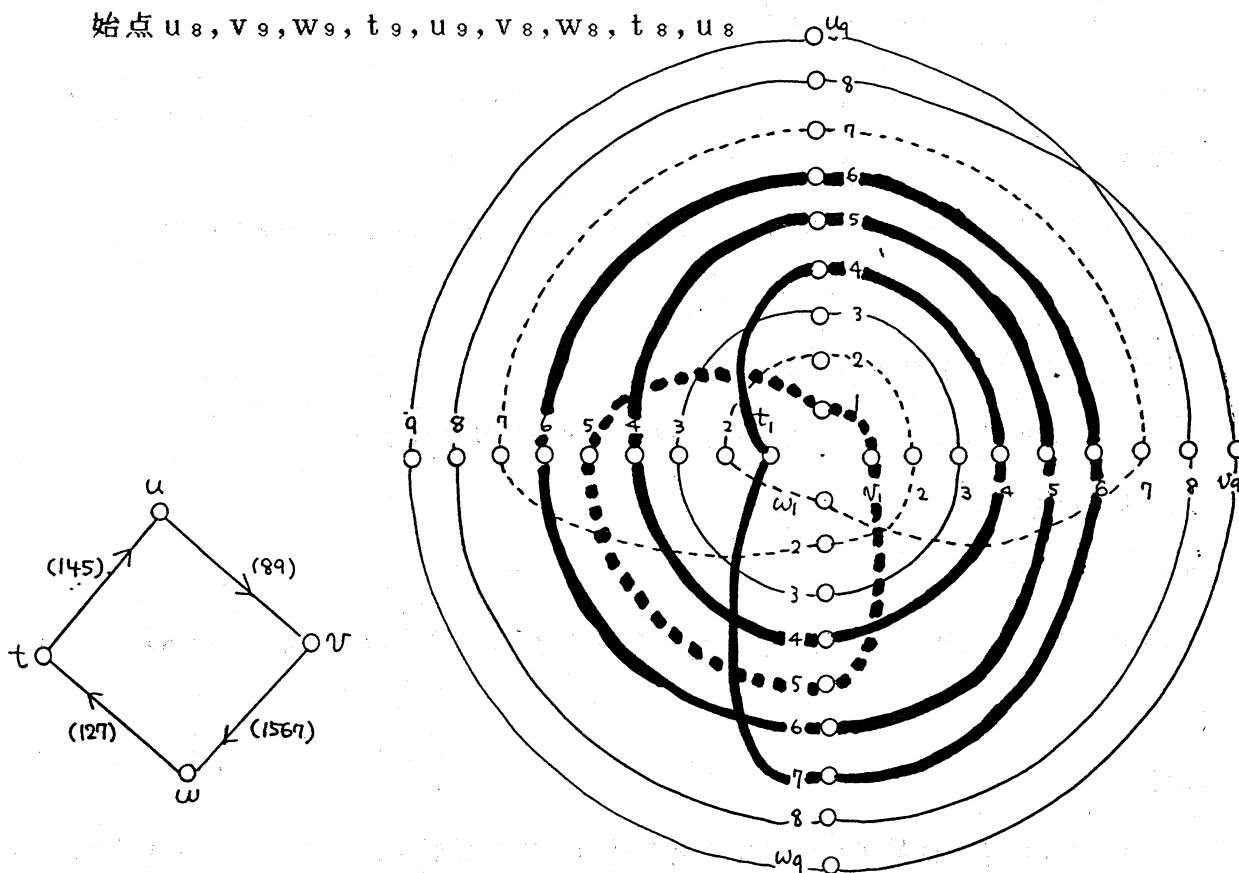


図 12. (a) C_4

(b) $(G, \alpha)_n$ のサイクル