数理解析研究所講究録
第686巻 1989年 44-54

トポロジーからグラフ理論へ

横浜国立大学教育学部　　根　上　生　也 (Seiya Negami)

「トポロジーからグラフ理論へ」という題名であるが，それにはいくつかの意味がある．一つには，私が最近トポロジーよりもグラフ理論の方に肩入れしすぎるという傾向を暗示しているが，ここでは，トポロジストである私がトポロジーから体得した知識やセンスをグラフ理論の世界に輸入するという意味だと思っていただきたい．位相幾何学的グラフ理論と言えば，グラフの埋め込みを議論することが多いが，本稿では埋め込みと被覆空間の関係を考察し，それを組合せ的なグラフ理論に応用したい．例えば，[GT]を見ると，地図の色分け定理と関係させて，グラフの被覆空間を利用して曲面への埋め込みを構成する話が書かれているが，ここでは，近年私が発見した“1，2，∞現象”を中心に解説を試みる．

1．“1，2，∞”再考

グラフGを有限単純連結グラフとする．グラフ$\tilde{G}$の頂点集合$V(\tilde{G})$からGの頂点集合$V(G)$の上への写像$p: V(\tilde{G}) \to V(G)$で，Gの任意の頂点vの各逆像$\tilde{v} \in p^{-1}(v)$の近傍$N(\tilde{v})$に制限すると，$p: N(\tilde{v}) \to N(v)$が１対１対応になるものが定義されているとき，$\tilde{G}$をGの<u>被覆空間</u> (covering space) または<u>被覆グラフ</u> (covering graph) といい，$p: V(\tilde{G}) \to V(G)$をその<u>射影</u>と呼ぶ．特に，$\tilde{G}$の自己同型群の部分群Aの元で移り合う$\tilde{G}$の２頂点のみがpでGの同一の頂点に移されているとき，$\tilde{G}$をGの<u>正則被覆グラフ</u>という．（グラフ理論でいう正則グラフとは関係ない．）射影pは局所的に頂点の隣接関係を保存しているので，$\tilde{G}$の辺をGの辺に移す写像が自然に誘導される．その写像も同じ記号pを用いて表し，頂点集合間と辺集合間の写像を併せて，$p: \tilde{G} \to G$と書く．

上の定義はトポロジーに於ける被覆空間を組合せ的に焼き直しただけのものである．非単純グラフに対しても同様の定義ができるが，若干煩雑になるので，こ

こでは単純グラフのみを扱う．また，被覆されるグラフは有限グラフとするが，被覆グラフは無限グラフでも構わない．

そこで，与えられたグラフの被覆グラフの中に所望の性質を持つものが存在するかどうかを考える．例えば，平面的な被覆グラフがあるかと問えば，無限グラフまで許せばどんなグラフに対しても答えはＹＥＳになる．では，有限なものに制限するとどうなるか？現状ではその解答は次の定理[N4]に集約される．ただし，“正則”という制限があるので完全な解答ではない．

定理１．　連結グラフＧが平面的な正則有限被覆空間を持つならば，Ｇは高々２重の平面的な被覆空間を持つ．

また，r-因子（r-factor；r-正則全域部分グラフのこと）を有するものの存在を問うと，次のようなきれいな定理[N3]を得る．

定理２．　連結グラフＧがr-因子を有する有限被覆空間を持つならば，Ｇは高々２重の被覆空間でr-因子を有するものを持つ．

この二つの定理は所望の性質を持つ有限被覆空間があれば，１重か２重のものが存在するという共通のスタイルをしている．つまり，１重，２重のものが存在しなければ，∞重になってしまうので，“１，２，∞”なのである．しかし，定理１と２には大きな違いがある．定理２は結論が保証する高々２重の被覆グラフをＧから標準的に構成することで証明できるが，定理１ではそれが難しい．定理１においても，標準的な被覆空間をたよりに平面的な有限被覆空間の存在を議論できると非常にありがたい．そういう観点から，“１，２，∞”を再考する．

２．標準二部被覆グラフ

Ｇが二部グラフのときには，Ｂ(Ｇ)＝Ｇとおき，二部グラフでないときには，以下のようにしてＢ(Ｇ)を構成する．まず，Ｇの頂点集合Ｖ(Ｇ)のコピーを２つ作りX，Ｙとおく．Ｇの頂点ｖ，ｕのＸ（Ｙ）に属すコピーをそれぞれv_X，u_X（v_Y，u_Y）と書き，ｖとｕがＧで隣接しているとき，v_Xとu_Y，v_Yとu_Xのそ

れぞれの組を辺で結ぶ．こうして得られたグラフが$B(G)$で，XとYを部集合に持つ二部グラフになっており，コピーをオリジナルに移す写像を射影に持つGの被覆空間になている．いずれの場合にも，$B(G)$は二部グラフなので，$B(G)$をGの標準二部被覆グラフ（canonical bipartite covering）と呼ぶ．

代数的トポロジーの知識を使うと，Gの基本群$\pi_1(G)$の言葉で$B(G)$を定義できる．まず，Nを$\pi_1(G)$の元で長さが偶数のGの閉小道で実現されるもの全体の集合とする．このNは$\pi_1(G)$の指数１または２の正規部分群である．この部分群Nに対応したGの被覆空間が$B(G)$である．つまり，射影$q: B(G) \to G$が誘導する基本群の間の単射準同型写像$q_\#: \pi_1(B(G)) \to \pi_1(G)$の像が$N$に一致する．特に，$G$自身が二部グラフのときには，すべての閉小道の長さが偶数であるから，Nの指数は１になり$N = \pi_1(G)$となって，$B(G) = G$となる．

一般に，二部グラフ$\tilde{G}$がGの射影$p: \tilde{G} \to G$を持つ被覆空間になっていれば，単射準同型写像$p_\#: \pi_1(\tilde{G}) \to \pi_1(G)$の像は$N$に含まれる．この事実から次の定理が結論される．

定理３．二部グラフ$\tilde{G}$によるGの被覆射影$p: \tilde{G} \to G$は$q: B(G) \to G$経由に分解できる．すなわち，$p = qr$となる被覆射影$r: \tilde{G} \to G$が存在する．■

通常，被覆する方がされる方より上にあると考えるので，$B(G)$はGの二部被覆グラフの中で一番下にあると思ってよい．この性質とよく知られている二部グラフのr-因子の存在を保証する次の定理と組み合わせて，定理２が簡単に証明できる．

定理４（Ore[0]）　二部グラフ$B = (X, Y)$がr-因子を持つための必要十分条件は次の(i)および(ii)が成り立つことである．

(i) 任意の部分集合$S \subset X$，$T \subset Y$に対して，

$$e(S,T) - r|S| + r|T| - \Sigma\{\deg(t) : t \in T\} \leqq 0$$

となる．ただし，$e(S,T)$はSとTの頂点を端点に持つ辺の本数である．

(ii) $|X| = |Y|$．■

定理５．$\tilde{G}$をGの有限被覆グラフでともに二部グラフであるとする．このとき，$\tilde{G}$がr-因子を持つための必要十分条件はGがr-因子を持つことである．

証明：　p：$\tilde{G}\to G$をn対１の被覆射影（$n<\infty$）とする．Gがr-因子を持つとき，それをpで引き上げてやれば$\tilde{G}$のr-因子になるので，十分性は明かである．そこで，定理４の(i)の不等式の左辺を$\zeta(S,T)$とおき，$\tilde{G}$がr-因子を持つと仮定する．すると，Gの部集合の部分集合S，Tに対して，

$$\zeta(p^{-1}(S),p^{-1}(T))=n\,\zeta(S,T)\leqq 0$$

となるから，Gも(i) を満たしていることになる．同様に，(ii)も示され，Gにもr-因子が存在する．■

上の定理から“二部グラフ”の仮定を外しても十分性は成立するが，一般に必要性は成立しない．ところが，どんなグラフにも標準二部被覆グラフという二部グラフが付随しているので，それを仲介にして定理５が利用できる．

定理２の証明：　$\tilde{G}$をr-因子を有するGの有限被覆グラフとすると，$B(\tilde{G})$もr-因子を持ち，$\tilde{G}$を経由する射影p：$B(\tilde{G})\to G$によりGを被覆する．定理３により，$p=qr$となる被覆射影r：$B(\tilde{G})\to B(G)$が存在し，さらに定理５により，B(G)もr-因子を持つ．■

３．平面被覆と 楕円的２次元軌道体

前節で見たように，標準二部被覆グラフを考えると，被覆空間の因子に関して大変よい見通しが得られる．これと同じように，被覆空間の平面性を集約できる高々２重の標準的な被覆グラフが定義できると非常に都合がよい．しかし，次の定理[N2]が示すように，射影平面への埋め込みが一意的に存在しないグラフに対しては，そのような標準的なものは定義できない．

定理６．連結グラフの平面的２重被覆グラフの同型類と射影平面への埋め込みの同値類は一対一に対応する．■

しかし，その複数の平面的被覆グラフの中にもそれなりの秩序が存在する．その秩序を見るために，楕円的２次元軌道体（elliptic 2-orbifold）の概要を述べる．簡単にいうと，２次元軌道体とは，各点の近傍が平面を等長変換群の有限部分群で割ったものになっている位相空間であるが，特に，楕円的と呼ばれるものは球面を有限群の作用で割って得られるもので，下図に示した９タイプに分類されている[Th,Chap.13]．単に，位相空間として眺めると，それらは球面，射影平面，円板のいずれかであるが，群作用の不動点の構造も加味して分類する．

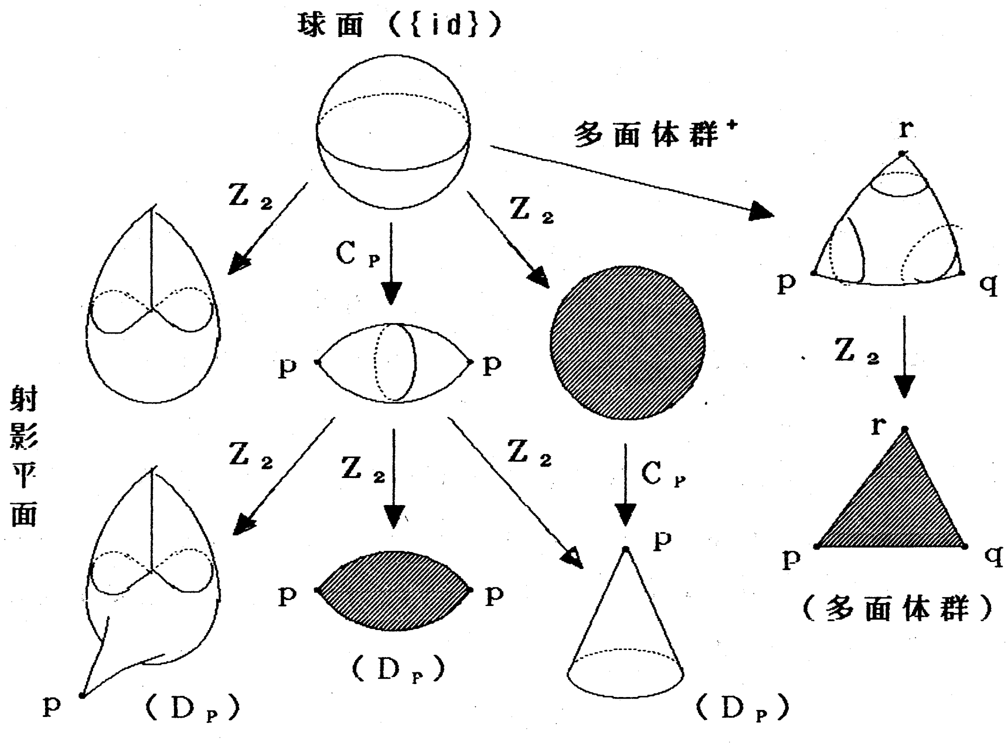


図１．楕円的２次元軌道体の階層図

不動点に対応した点には，円錐の頂点に相当するもの（corn point, elliptic point），二つの線分に挟まれた角に相当するもの（corner reflector）および曲面の境界（reflector line）の上に位置するものの３種類があり，それらにはｐ，ｑ，ｒ等の数字が書き添えてある．ただし，第三種の点は連続して存在しているので，添付されるべき２は省略することにする．その数字は球面上の群作用で対応する点を固定する変換全体が作る部分群を指示している．

例えば，ｐ，ｐと書いてあるフットボール状のものは，１本の軸のまわりの回

転で割ったもので，軸と球面の２つの交点を固定する群が位数ｐの巡回群であることを意味している．また，そのフットボールの前後を反転する群作用で割ったがその下のもので，その二辺形の角に対応した球面上の点は，π／ｐの角度で交わる２個の大円に関する反転が生成する位数２ｐの二面体群により固定されている．また，その２本の縁の部分が反転の軸となる大円に対応している．右端の系列は正多面体の対称変換により得られるもので，ｐ，ｑ，ｒには球面三角形の内角の和がπより大きいことに対応して，

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1$$

という制限が付く．また，左側の二つの射影平面は，球面とフットボールを原点対称により割って得られるものである．

この楕円的２次元軌道体の階層図を眺めることで次の定理が証明できる．

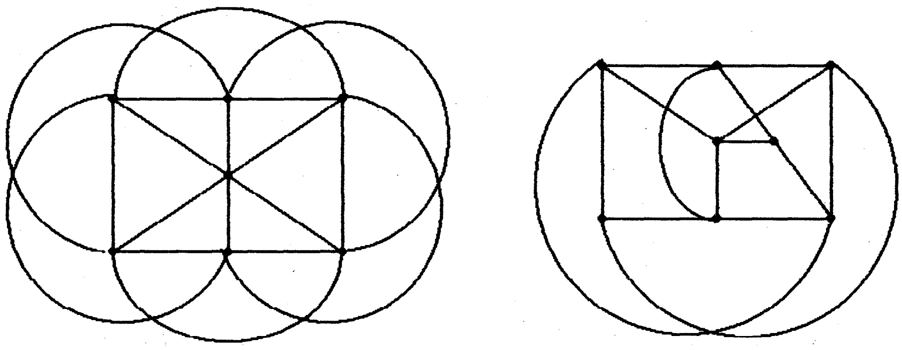
定理７．非平面的連結グラフＧの平面的な正則有限被覆空間ｐ：$\tilde{G}\to G$に対して，平面的な２重被覆グラフＰ(Ｇ)と被覆射影ｒ：$\tilde{G}\to P(G)$，ｑ：$P(G)\to G$が存在し，ｐ＝ｑｒとなる．したがって，ｐがｎ重であれば，ｎは偶数である．

証明：　一般論は煩雑な部分を含むので，ここでは$\tilde{G}$は3-連結であると仮定する．すると，3-連結平面的グラフの埋め込みの忠実性[Wh][N1]により，$\tilde{G}$の被覆変換群Ａが球面に作用するように$\tilde{G}$を埋め込むことができる．その群作用で球面を割ると図１の楕円的２次元軌道体のいずれかになり，その中にＧが埋め込まれている．ところが，左の二つを除くと，すべて球面もしくは円板であるから，そこに埋め込み可能ということは，Ｇが平面的であることを意味しており，Ｇの仮定に反する．したがって，Ｇは射影平面またはcorn pointを一つ持つ射影平面の中に埋め込まれており，Ａはそれぞれ位数２の巡回群$\mathbb{Z}_2$または位数２ｐの二面体群D_pに同型である．いずれの場合もＡは指数２の部分群を含み，その部分群で球面を割ったものがそれぞれに向かう矢印の手前に描いてある．そこに埋め込まれているグラフをＰ(Ｇ)とおけば，Ｐ(Ｇ)はＧを２重に被覆する．■

残念ながら，定理のＰ(Ｇ)は$\tilde{G}$に依存し，Ｂ(Ｇ)のようにＧのみから決定でき

るものではない．また，楕円的２次元軌道体の分類を用いる限り，群作用と関連させる必要があるので，非正則被覆空間に対しては何も言えない．しかし，私とD.ArchdeaconとM.Fellows の近年の研究により，次の予想がかなりの確率で正しいことがわかってきた[N5].

【１-２-∞予想】　平面的な有限被覆グラフを持つグラフは高々２重の平面的な被覆グラフを持つ．



$A_2 \cong K_{1,2,2,2}$　　$E_{18} \cong K_{4,4} - K_2$

図２．恐怖の二つ

すでに，この予想を肯定的に解決するためには，上図の二つのグラフが平面的な有限被覆グラフを持たないことを示せばよいという所まで詰められている．射影平面的グラフのためのKuratowski型定理と関係して，同様なことをチェックすべきグラフはちょうど１００個あったので，上の予想は９８％正しいと言えそうである(!?)．たった二つしかないのだから，すぐに解決しそうだが，それぞれに対して，アタックすべき被覆グラフは無限個存在する．オイラーの公式を駆使したり，外平面的グラフの議論と絡めたりと，いろいろ手を尽くしているが，歯がたたず，Fellows たちはこれらを恐怖の二つ（terrible two）と呼んでいる．

だからと言って，絶えず恐怖と背中合わせなわけではない．仮に，恐怖の二つが平面的な有限被覆グラフ（２重にはならない）を持ったとしても，悲劇的な事態にはならなず，今までの研究成果を集約すると，平面的な有限被覆グラフを持つグラフをKuratowski型の定理で特徴付けられる．

この予想は定理１から派生したものだが，定理７から“正則”の仮定を除いた

形の予想も考えられる.

【１-２-∞予想・強化版】　平面的な被覆空間の射影は高々２重の平面的な被覆グラフを経由する.

この予想が正しければ，非平面的グラフの平面的な被覆空間がｎ重ならば，ｎは偶数になる．仮に予想が否定されたとしても，ｎが偶数になる可能性は大きい.

４．因子と被覆

平面的な被覆空間の議論の困難さに比べると，因子の方はＢ(Ｇ)があるおかげで大変スムーズに事が運んだ．それほどＢ(Ｇ)の存在が本質的ならば，定理２の証明の道具に留めておくのはもったいない．そこで，Ｂ(Ｇ)を利用して，組合せ的グラフ理論（通常のグラフ理論）への応用を示して最後を飾りたい.

グラフＧの全域部分グラフＦの各頂点ｖの次数deg(v)がａとｂの間にあるとき，ＦをＧの[a,b]-因子（[a,b]-factor）と言う．特に，ａ＝ｂならば，[a,b]-因子はa-因子である．グラフが[a,b]-因子を持つための必要十分条件はより一般的な形ですでに求められているが，チェックすべき不等式はかなり複雑である．ここでは一般論は展開せずに，次のように不変量Ｊ(Ｇ)を定義して，きれいな形の定理を示す.

$$J(G)=\min\left\{\frac{\Sigma\{\deg(t):t\in T-S\}-e(T,S-T)}{|T|-|S|}: T,SV(G), |T|>|S|\right\}$$

定理８．Ｊ(Ｇ)≧ｒであるための必要十分条件は各頂点ｖに対して,

$$\deg_{F_+}(v)+\deg_{F_-}(u)=2r$$

となるＧの[r,r+1]-因子F_+と[r-1,r]-因子F_-が存在することである.

定理８の証明：　まず，定理にある因子を持つこととＢ(Ｇ)がr-因子を持つことが同値であることを示す.

ＦをＢ(Ｇ)のr-因子とすると，Ｆの辺は射影ｑ：Ｂ(Ｇ)→Ｇにより，２対１または１対１にＧの辺に移される．そこで，Ｇの各辺にそこへ射影されるＦの辺の

本数（０，１，２）を重みとして書き添える．すると，Ｇの各頂点に接続する辺の重みの総和は２ｒになり，そこに接続する重み１の辺は偶数本である．したがって，重み１の辺が誘導する部分グラフの各成分はオイラー・グラフである．そのオイラー回路に沿って○から始めて○と×を交互に付けていくと，出発点以外の頂点には○と×の付いた辺が同数ずつ接続する．これから，重み２の辺と○の辺により誘導される部分グラフは$[r,r+1]$-因子F_+になり，重み２の辺と×の辺により誘導される部分グラフは$[r-1,r]$-因子F_-になる．

今度は，Ｇが定理にあるF_+，F_-を持つとする．$F=q^{-1}(F_+\cup F_-)$とおき，Ｆの各辺を射影したとき，F_+とF_-のどちらに移されるかに応じて＋，－，±を書き添える．このとき，＋または－が一つだけ付いている辺が誘導するＢ(Ｇ)の部分グラフの各成分はオイラー・グラフである．ただし，Ｂ(Ｇ)が二部グラフであることから，そのオイラー回路は偶数本の辺からなるので，それに沿って○と×を交互に付けていくと，出発点に於いても○と×の辺は同数接続する．このとき，±の辺と○の辺が誘導する部分グラフＦはr-因子になっている．

これで，定理を示すためにはＢ(Ｇ)がr-因子を持つ条件をＪ(Ｇ)を使って書き換えればよいことになった．二部グラフのr-因子の存在条件はすでに定理４に示されているから，その条件をＧのレベルで評価すればよい．

まず，$B(G)\neq G$とする．作り方から$|X|=|Y|$だから，定理４の(i)の条件のみ評価すればよい．その不等式を整理すると，

$$r\ (|T|-|S|)\leqq\Sigma\ \{\deg(t):\ t\in T\}-e(S,T)$$

となるから，$|T|\leqq|S|$のときには左辺が負また０となり自動的に成立する．そこで，$|T|>|S|$の範囲に制限してもよく，ｒについて解くことができる．

$$r\leqq\frac{\Sigma\ \{\deg(t):\ t\in T\}-e(S,T)}{|T|-|S|}$$

したがって，Ｂ(Ｇ)がr-因子を持つための必要十分条件は上の右辺の最小値がｒ以上となることである．

右辺はあくまでＢ(Ｇ)のレベルで評価しているものだから，Ｊ(Ｇ)の定義とよく似ているが，微妙に違うことに注意しよう．そこで，Ｇのレベルで右辺を評価するために，Ｖ(Ｇ)の部分集合Ｔ，Ｓ（交わってもよい）を$|T|>|S|$の条件で任意に選び，射影$q:B(G)\to G$により，ＳをＸの側に，ＴをＹの側に引き

上げたものを上の右辺のＳ，Ｔであると考える．このとき，Ｂ(Ｇ)の中で評価した上の分母の値とＪ(Ｇ)の定義にある分母の値が一致するので，Ｊ(Ｇ)≧ｒであることと上の不等式が成立することが同値になる．

Ｂ(Ｇ)＝Ｇのときには，Ｊ(Ｇ)≧ｒならば，Ｖ(Ｇ)の任意の部分集合Ｓ，Ｔに対して，

$$r\ (|T|-|S|) \leqq \Sigma\ \{\deg(t):\ t \in T-S\} - e(S-T,T)$$

となっているが，特にＳ⊂Ｘ，Ｔ⊂Ｙのときは，Ｔ＝Ｔ－Ｓ，Ｓ－Ｔ＝Ｓであるから，定理４の(i)が成立している．また，Ｓ＝Ｘ，Ｔ＝Ｙ；　Ｓ＝Ｙ，Ｔ＝Ｘとおけば，｜Ｘ｜＝｜Ｙ｜も得られる．逆に，定理４の条件が成立しているときは，Ｓ，ＴをＸ，Ｙに含まれている部分に分けて不等式を評価すれば，Ｊ(Ｇ)≧ｒが得られる．■

特に，Ｇがr-正則グラフのときには，Ｊ(Ｇ)＝ｒ（練習問題）となるで，次の系が直ちに導かれる．

系（Tutte[Tu]）．r-正則グラフは，０≦ｋ≦ｒなる任意の自然数ｋに対して，[k,k+1]-因子を持つ．

定理８の証明に倣えば，二部グラフの因子に関する定理を一般のグラフの因子（ただし少しぼやけたものになる）の存在定理に変換できるだろう．また，既存の定理の証明もＢ(Ｇ)を用いて見やすいものにできるかもしれない．例えば，上の系がそのよい例です．そういうことを念頭に置いて，因子理論が要約されている[AK]などを勉強するといいことがあるのではないでしょうか．

【参考文献】

[AT] J. Akiyama and M. Kano, Factors and factorizations of graphs — A survey, J. Graph Theory, 9 (1985), 1-42.

[GT] J.L.Gross and T.W.Tucker, "Topological Graph Theory", John Wiley &

Sons, 1987.

[N1] S.Negmai, Uniqueness and faithfulness of toroidal graphs, Discrete Math. 44 (1983), 161-180.

[N2] S. Negami, Enumeration of planara embeddings of a graph, Discrete Math. 62 (1986), 299-306.

[N3] S. Negami, The virtual k-factorability of graphs, J. Graph Theory 11 (1987), 359-365.

[N4] S. Negami, The spherical genus and virtually planar graphs, Discrete Math. 70 (1988), 159-168.

[N5] S. Negmai, Graphs which have no planar covering, Bull. Inst. Math. Academia Sinica 16 (4) (1988), 377-384.

[O] O. Ore, Studies on directed graphs, I,II,III, Ann. of Math. (2) 63 (1956), 383-496; (2) 64 (1956), 142-153; (2) 68 (1958), 526-549.

[Th] W. Thurston, "The geometry and topology of 3-manfolds", Lecture notes, Princeton Univ. 1977.

[Tu] W.T. Tutte, The subgraph problem, Ann. Discrete Math. 3 (1978), 289-295.

[Wh] H. Whitney, Congruent graphs and the connectivity of graphs, Amer. J. Math. 54 (1932), 150-168.