数理解析研究所講究録
第686巻 1989年 175-185

ブロック上のサイクルの個数について

関西学院大理　張替　俊夫（Toshio Harikae）

グラフG上のサイクルCとは，通る点が相異なる閉じた遊歩道である．また，G上の独立なサイクルの最大数をGのベッチ数と呼んで，$\beta(G)$と表し，それらのサイクルの集合をGの本質的サイクルの集合と呼ぶ．

ここでは，Gのベッチ数が与えられた時のG上のサイクルの個数を考える．特に，Gがブロックの場合，すなわちGが連結で切断点を持たない場合を考える．

§1.　ここで，Gを$\mathbb{R}^3$における1次元多面体として考える．Gの1次元$\mathbb{Z}_2$-ホモロジー群，$H_1(G;\mathbb{Z}_2)$はG上のすべての閉曲線の集合である．その時，$\dim H_1(G;\mathbb{Z}_2)$をGの1次元ベッチ数と呼び，$\beta_1(G)$で表す．$\beta_1(G)$は$\beta(G)$と一致する．

C_1とC_2を$H_1(G;\mathbb{Z}_2)$の元とし，$\oplus$を$H_1(G;\mathbb{Z}_2)$上の加法とする．その時，$C_1\oplus C_2$をC_1とC_2のサイクル和と呼ぶ．G上のすべて

のサイクルの集合は$H_1(G;\mathbb{Z}_2)$の部分集合なので，G上のサイクルの集合上でサイクル和が定義可能である．しかし，2つのサイクルのサイクル和が常にサイクルであるとは限らない．

今$H_0(G;\mathbb{Z}_2)$, Gの0次元$\mathbb{Z}_2$ホモロジー群の次元$\beta_0(G)$は，Gの連結成分の数と一致する．そこで，$\nu(G)$, $\varepsilon(G)$をそれぞれGの頂点，辺の数とすると，オイラー＝ポワンカレの式より，

$$\nu(G)-\varepsilon(G)=\beta_0(G)-\beta_1(G)$$

が成り立つ。さらに，Gが連結ならば，

$$\nu(G)-\varepsilon(G)+\beta(G)=1$$

が成り立つ．

§2.　以下，Gを多重辺を許したブロックとする．次の定理はブロックG上のサイクルの個数とGのベッチ数の間の関係を与える．

定理1.　Gをベッチ数βのブロックとし，δをG上のサイクルの個数とする．その時，

$$\beta(\beta+1)/2 \leqq \delta \leqq 2^{\beta}-1$$

が成り立つ．

証明の概略.　$H_1(G;\mathbb{Z}_2)$ の元の数は 2^β で，その単位元はサイクルではないから，明らかに $\delta \leqq 2^\beta - 1$ である.

$\beta(\beta+1)/2 \leqq \delta$ を示すため，β に関する帰納法を使う．同相な2つのグラフは同数のサイクルを持つから，G の各頂点の度数が少なくとも3であると仮定してよい．多重辺でない辺に対して，図1に示される収縮を行ってできるグラフはもとのグラフとベッチ数が等しく，サイクルの個数は等しいか少ない．この収縮を何回か行っていくと多重辺をもつグラフ G' を得る．G' の多重辺を e, f とする時，グラフ $G'-e$ はベッチ数 $\beta-1$ のブロックである．ここで帰納法の仮定と，$G'-e$ の本質的サイクルの集合 $C_1, C_2, \cdots, C_{\beta-1}$ がすべて f を通るようにとれることを使い，G' 上のサイクルの個数が少なくとも $\beta(\beta+1)/2$ であることが示される.

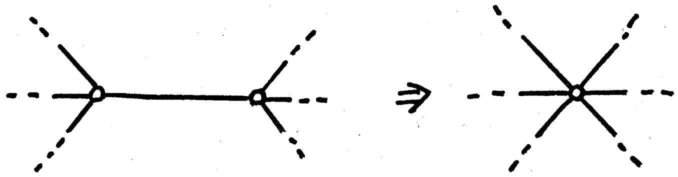

図1

§3.　定理1はベッチ数が与えられた時のブロック上のサイクルの個数の upper bound と lower bound を与える．実際，図2で示される $\theta_{\beta+1}$-curve はベッチ数が β で，サイクルの個数が

$\beta(\beta+1)/2$ のブロックである．つまり $\beta(\beta+1)/2$ はベッチ数 β のブロック上のサイクルの minimum である．また $\beta \geqq 3$ の時，$\theta_{\beta+1}$-curve で同型でないブロックで $\beta(\beta+1)/2$ のサイクルをもつものが存在する．

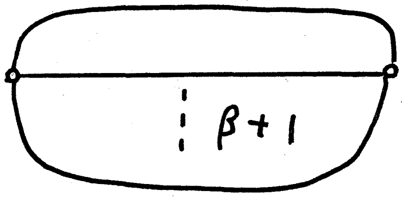

図 2

そこで，maximum に関する次の問題を考える．

問題．　$2^\beta-1$ はベッチ数 β のブロック上のサイクルの maximum か？

$\beta=1, 2, 3, 4$ の時，答は肯定的である．というのは，$\beta=1$ に対して，任意のブロックは図3(a)の circle と同相である．$\beta=2$ に対して，任意のブロックは図3(b)の θ_3-curve と同相である．$\beta=3$ に対して，図3(c)の K_4-graph と同相なブロックは $7=2^3-1$ のサイクルをもつ．$\beta=4$ に対して，図3(d)の $K_{3,3}$-graph と同相なブロックは $15=2^4-1$ のサイクルをもつ．さらに，7個のサイクルをもつベッチ数3の任意のブロックは K_4-graph と同相であり，また15個のサイクルをもつベッチ数4の任意のブ

ロックは$K_{3,3}$-graphと同相であることを以下で証明する.

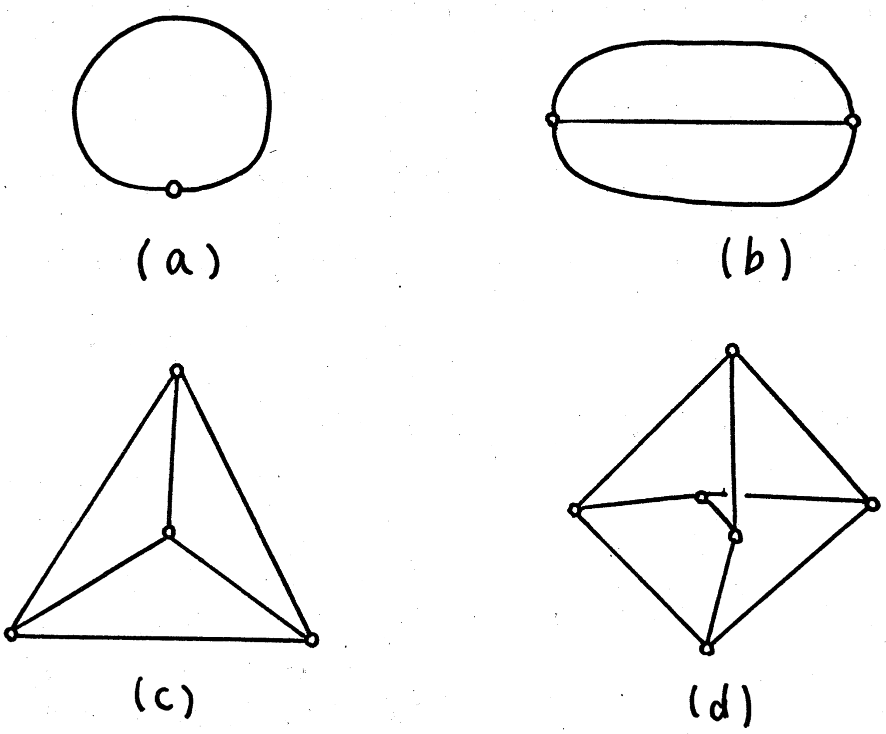

図3

Lemma 2. Gをベッチ数βのブロックとする. もしGがベッチ数βのブロックの中で最大数のサイクルをもつならば, Gの各頂点の度数は2または3である.

証明.

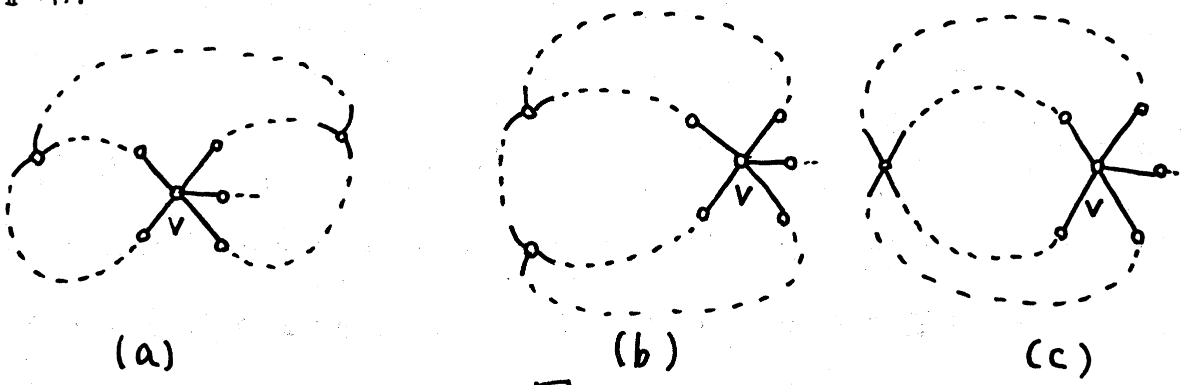

図4

Gが度数5以上の頂点vを持つと仮定する．Gはブロックなので，図4(a),(b),(c)のいずれかの部分グラフを含む．そこで，vの近傍を図5(a),(b),(c)のように修正したグラフをG′とすると，いずれの場合にも，G′はブロックで，Gのサイクルに対応するサイクルに加えて，辺e,f,g,hを含む1つのサイクルをもつ。このことは，Gがベッチ数βのブロックの中で最大数のサイクルをもつことに反する．

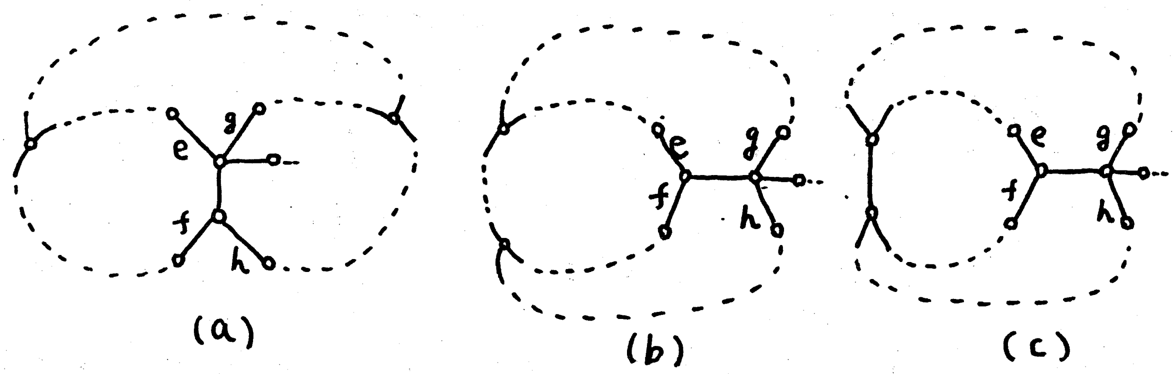

図5

次の定理はLemma 2，Euler-Poincaréの式，さらにHand-Shaking Lemmaを使って得られる．

定理3．　Gをベッチ数$\beta(\geqq 2)$のブロックとし，ν,εをそれぞれGの頂点の数，辺の数とする．もしGがベッチ数βのブロックの中で最大数のサイクルをもち，度数2の頂点を持たないならば，

$$\nu = 2(\beta - 1),$$
$$\varepsilon = 3(\beta - 1)$$

が成り立つ.

次の2つの系は, ベッチ数3,4で最大数のサイクルをもつブロックが一意的に決まることを示す.

系4. Gをベッチ数3のブロックとする. G上のサイクルの個数が7であることの必要十分条件は, GがK_4-graphと同相であることである.

もしGがベッチ数3で7個のサイクルを持つなら, Gがθ_3-curveに1つの辺をつけ加えてできることが容易に示される. その時Lemma 2より, 各頂点の度数が2または3であることを使えば, 系4は証明される.

系5. Gをベッチ数4のブロックとする. G上のサイクルの個数が15であることの必要十分条件は, Gが$K_{3,3}$-graphと同相であることである.

GはK_4-graphに1つの辺をつけ加えてできるブロックで,

各頂点の度数が2または3である．従って，系5も容易に証明される．

§4．　ベッチ数が5以上の場合，前の問題は否定的に解かれる．すなわち，

定理6．　ベッチ数が$\beta(\geqq 5)$のとき，$2^{\beta}-1$個のサイクルを持つブロックは存在しない．

この定理も系4，系5と同様の手法で証明される．すなわち，もしベッチ数5で31個のサイクルを持つブロックGが存在するならば，Gは$K_{3,3}$-graphに1つの辺をつけ加えてできるブロックで，各頂点の度数が2または3である．しかし，そのようなブロックが$K_{3,3}$-graphから作れないことがわかる．ベッチ数が6以上の場合，$2^{\beta}-1$個のサイクルを持つブロックの存在を仮定すると，$2^{\beta-1}-1$個のサイクルを持つ，ベッチ数$\beta-1$のブロックの存在が必要となり，ベッチ数5の場合と矛盾する．

それでは，ベッチ数5のブロックの中で最大数のサイクルをもつものは何か．実際そのブロックGは，$K_{3,3}$-graphに1つの辺をつけ加えてできるブロックの中で最大数のサイクルを

もつもので，図6に示される．Gは29個のサイクルを持ち，一意的に定まる，すなわち，

定理7．　Gをベッチ数5のブロックの中で最大数のサイクルをもつものとする．その時，Gは29個のサイクルを持ち，図6に示されるブロックと同相である．

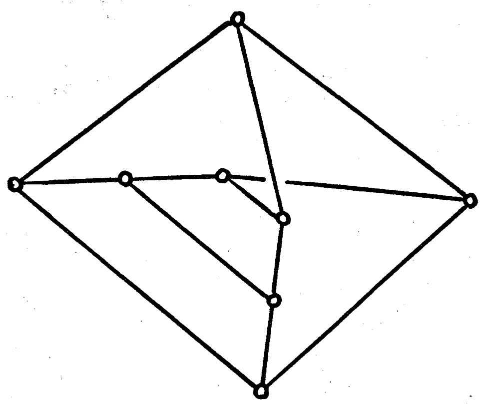

図6

§5．　ベッチ数が6以上の場合に対しても，以上の議論を適用することが可能である．しかしベッチ数が5以下の場合よりも複雑になる．例えばベッチ数が6の場合，図7のブロックは図6のブロックに1つの辺をつけ加えてできるブロックの中で最大数(57)のサイクルを持つ．このブロックが，ベッチ数6のブロックの中で最大数のサイクルを持つことを示すのは，ベッチ数5以下の場合よりも手間がかかる．図8のブロックは，図7のブロックに1つの辺をつけ加えてできるブ

ロックの中で最大数(109)のサイクルを持ち，図9のブロックは，図8のブロックに1つの辺をつけ加えてできるブロックの中で最大数(217)のサイクルを持つ。これらも，それぞれベッチ数7，8のブロックの中で最大数のサイクルを持つことが予想されるが，証明はベッチ数が6の時よりもさらに複雑となる。従って，ベッチ数が6以上の時，ベッチ数が与えられた時のブロックのもつサイクルの最大数について一般的な式はまだ得られておらず，今後の研究課題となる。

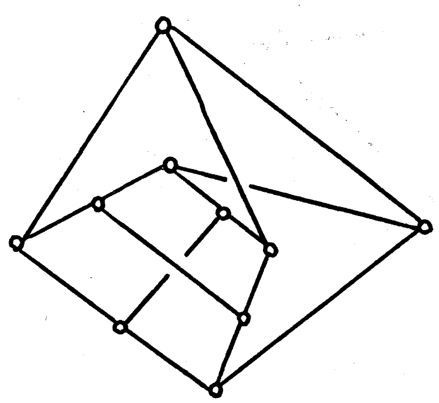

図7

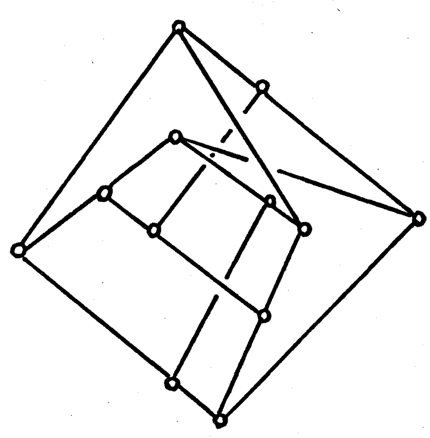

図8

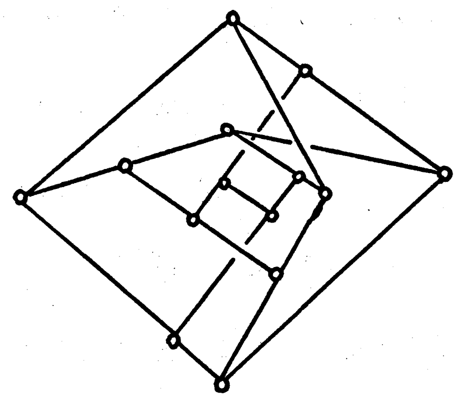

図9

References

[1] M. Behzad, G. Chartrand & L. Lesniak Foster, Graphs and Digraphs, Prindle Weber & Schmidt, 1979.

[2] F. Harary, Graph Theory, Addison-Wesley, 1969.

[3] T. Harikae, On the number of cycles on graphs, in preparation.