数理解析研究所講究録
第687巻1989年62-84

ファジィパラメータを含む多目的線形分数計画問題に対するパレート最適性

岩手大学工学部情報工学科　坂和正敏　(Masatoshi Sakawa)
香川大学経済学部管理科学科　矢野均　(Hitoshi Yano)
岩手大学工学部情報工学科　高橋淳也　(Junya Takahashi)

1. まえがき

線形制約条件のもとで、線形分数(分母・分子がそれぞれ線形関数)の関数を持つ線形分数計画法(Linear Fractional Programming :LFP)は、たとえば生産計画の分野では、在庫/売上高、生産量/雇用者数などの比を最適化する場合などには不可欠である。このようなLFP問題は、CharnesとCooper[1]の変数変換法を用いて、線形計画問題に変換できる。近年、KuhnbluthとSteuer[4]は、多目的線形分数計画(Multi-objective Linear Fractional Programming : MOLFP)問題に対するすべての弱パレート最適解を求めるアルゴリズムを開発した。しかし、弱パレート最適解の集合の中から意思決定者(Decision Maker :DM)の満足解をいかにして求めるかについては考慮されていない。そこで、坂和ら[8]は、パレート最適解の集合の中から DM の満足解を求めるために、DMの各目的関数値に対する判断のあいまい性を考慮した、MOLFP問題に対する対

話型ファジィ満足化手法を提案した。さらに、彼らは、現実の意思決定状況をMOLFP問題として定式化する立場にある専門家達の、問題に含まれるパラメータに対する判断のあいまい性を考慮するため、ファジィパラメータを含むMOLFP問題を定式化し、MOLFP問題に対するパレート最適性の拡張概念として、ファジィ数のαレベル集合に基づくαパレート最適解の概念を導入し、αパレート最適解の集合の中からDMの満足解を導出するための対話型意思決定手法を提案した[5]。一方、坂和ら[6,7]は、ファジィ数間の大小関係を統合的に取り扱うためにDuboisとPrade[2,3]により提案された必然性と可能性の概念に基づく4種類の指標を用いて、ファジィパラメータを含む多目的線形計画問題に対するα実行可能性、βパレート最適性およびγパレート最適性の概念を新たに定義し、αレベル集合に基づくαパレート最適解との関連についても明らかにしている。

このような状況のもとで、本論文では、特に、ファジィパラメータを含む多目的線形分数計画問題に対して、Duboisらにより提案された4種類の指標に基づくα実行可能性とγパレート最適性の概念を導入し、α実行可能性とγパレート最適性を同時に考慮した(α，γ)パレート最適解の概念を提案する。また、最も楽観的な場合と最も悲観的な場合と見なされる(α，γ)パレート最適解の集合は、それぞれ、線形計画法により求められることを示す。さらに、ファジィ数間の演算規則として採用されている拡張原理[9]と坂和らにより提案されたαパレート最適解の

関係をも明らかにする。

2. ファジィ数の大小関係

ここでは、まず、Dubois とPrade[2,3]によりファジィ数間の大小関係を統合的に取り扱うために提案された可能性(Possibility)と必然性(Necessity)の概念に基づく4種類の指標を復習した後、次節で議論されるファジィパラメータを含む多目的線形分数計画問題に対する実行可能性とパレート最適性を定義するための準備として、各指標とαレベル集合の関係を明らかにする。

2つのファジィ数$\tilde{m}$, $\tilde{n}$の大小関係を統合的に取り扱うために、Dubois らは、区間の大小関係の自然な拡張として、次の4種類の指標を導入した。

【定義1】

$$\mathrm{Pos}(\tilde{m} \geq \tilde{n}) = \sup\{\min(\mu_{\tilde{m}}(u), \mu_{\tilde{n}}(v)) \mid u \geq v\} \tag{1}$$

$$\mathrm{Pos}(\tilde{m} > \tilde{n}) = \sup_{u}\{\inf_{v}\{\min(\mu_{\tilde{m}}(u), 1-\mu_{\tilde{n}}(v)) \mid u \leq v\}\} \tag{2}$$

$$\mathrm{Nes}(\tilde{m} \geq \tilde{n}) = \inf_{u}\{\sup_{v}\{\max(1-\mu_{\tilde{m}}(u), \mu_{\tilde{n}}(v)) \mid u \geq v\}\} \tag{3}$$

$$\mathrm{Nes}(\tilde{m} > \tilde{n}) = \inf\{\max(1-\mu_{\tilde{m}}(u), 1-\mu_{\tilde{n}}(v)) \mid u \leq v\} \tag{4}$$

■

ここで、Pos, Nesは Possibility, Necessityの省略形で、$\mu_{\tilde{m}}(u)$, $\mu_{\tilde{n}}(v)$はファジィ数$\tilde{m}$と$\tilde{n}$のメンバーシップ関数を表す。

次の定理は、各指標がしきい値α以上で満たされるための必要十分条件が、ファジィ数$\tilde{m}$と$\tilde{n}$のαレベル集合の端点の大小関係により表されることを示している。

【定理1】

$$(\mathrm{I})\quad \mathrm{Pos}(\tilde{m} \geqq \tilde{n}) \geqq \alpha \quad \leftrightarrow \quad m_{\alpha}^{R} \geqq n_{\alpha}^{L} \qquad (5)$$

$$(\mathrm{II})\quad \mathrm{Pos}(\tilde{m} > \tilde{n}) \geqq \alpha \quad \leftrightarrow \quad m_{\alpha}^{R} \geqq n_{1-\alpha}^{R} \qquad (6)$$

$$(\mathrm{III})\quad \mathrm{Nes}(\tilde{m} \geqq \tilde{n}) \geqq \alpha \quad \leftrightarrow \quad m_{1-\alpha}^{L} \geqq n_{\alpha}^{L} \qquad (7)$$

$$(\mathrm{IV})\quad \mathrm{Nes}(\tilde{m} > \tilde{n}) \geqq \alpha \quad \leftrightarrow \quad m_{1-\alpha}^{L} \geqq n_{1-\alpha}^{R} \qquad (8)$$

■

ここで、m_{α}^{L}, m_{α}^{R}, n_{α}^{L}, n_{α}^{R}は、ファジィ数$\tilde{m}$, $\tilde{n}$のαレベル集合の左右の端点を表す。

一方、"$*$"を任意の2項演算、"m_{α}","n_{α}"をファジィ数$\tilde{m}$, $\tilde{n}$のαレベル集合とすれば、次の系が成立する。

【系1】

$$(\tilde{m} * \tilde{n})_{\alpha} = m_{\alpha} * n_{\alpha} \qquad (9)$$

(証明)

i) $z \in m_{\alpha} * n_{\alpha}$とする。この時、$z = m*n$を満たす任意の$m \in m_{\alpha}$, $n \in n_{\alpha}$に対して、次式が成立している。

$$\{ \min(\mu_{\tilde{m}}(m), \mu_{\tilde{n}}(n)) \mid m*n=z \} \geqq \alpha$$

一方、拡張原理の定義から、

$$(\tilde{m}*\tilde{n})_\alpha = [\, w \mid \max\{\min(\mu_{\tilde{m}}(m), \mu_{\tilde{n}}(n)) \mid m*n=w\} \geq \alpha \,]$$

であることより、$z \in (\tilde{m}*\tilde{n})_\alpha$.

ii) $z \in (\tilde{m}*\tilde{n})_\alpha$ とする。この時拡張原理の定義から、

$$\max\{\min(\mu_{\tilde{m}}(m), \mu_{\tilde{n}}(n)) \mid m*n=z\} \geq \alpha$$

が成立している。上式より、$\mu_{\tilde{m}}(m) \geq \alpha$, $\mu_{\tilde{n}}(n)) \geq \alpha$ が満たされているので、結局、$z \in m_\alpha * n_\alpha$. ■

この系は、2つのファジィ数の拡張原理[9]に基づく2項演算により生ずるファジィ数のαレベル集合が、各ファジィ数のαレベル集合（閉区間）の2項演算により生ずるαレベル集合と一致することを示している。

3. ファジィパラメータを含む多目的線形分数計画問題

一般に、ファジィパラメータを含む多目的線形分数計画問題は、形式的には次のようなファジィパラメータを目的関数の分母・分子、および制約式に線形に含むベクトル最小化問題として定式化される。

$$\begin{aligned} &\min \ (\tilde{c}_1 x + \tilde{c}_{1,n+1}) / (\tilde{d}_1 x + \tilde{d}_{1,n+1}) \\ &\qquad \cdots\cdots \\ &\min \ (\tilde{c}_k x + \tilde{c}_{k,n+1}) / (\tilde{d}_k x + \tilde{d}_{k,n+1}) \end{aligned} \tag{10}$$

$$\text{subject to } x \in \tilde{X} = \{x \in E^n \mid \tilde{a}_j x \leq \tilde{b}_j,\ j=1,\ldots,m;\ x \geq 0\}$$

ここで、$\tilde{c}_i$, $\tilde{d}_i$ および $\tilde{a}_j$ は、それぞれ、n次元行ベクトル

$$\tilde{c}_i = (\tilde{c}_{i1}, \ldots, \tilde{c}_{in}),\ i=1,\ldots,k \tag{11}$$

$$\tilde{d}_i = (\tilde{d}_{i1}, \ldots, \tilde{d}_{in}),\ i=1,\ldots,k \tag{12}$$

$$\tilde{a}_j = (\tilde{a}_{j1}, \ldots, \tilde{a}_{jn}),\ j=1,\ldots,m \tag{13}$$

で、$\tilde{c}_{i\ell}$, $\tilde{d}_{i\ell}$, $(i=1,\ldots,k,\ \ell=1,\ldots,n+1)$, $\tilde{a}_{j\ell}$, $\tilde{b}_j$, $(j=1,\ldots,m,\ \ell=1,\ldots,n)$は、それぞれ、有界かつ強凸なファジィ数を表す。また、ファジィ数$\tilde{d}_i x+\tilde{d}_{i,n+1}$の$\alpha$レベル集合は任意の$\alpha \in (0,1]$に対して非負であると仮定する。

以下では、ファジィパラメータを含む多目的線形分数計画問題(10)に対する実行可能性とパレート最適性を、可能性と必然性の概念に基づく4種類の指標を用いて定義しよう。

3.1 α実行可能性

坂和・矢野[6]は、既に、ファジィ制約集合$\tilde{X}$

$$\tilde{X} = \{x \in E^n \mid \tilde{a}_j x \leq \tilde{b}_j,\ j=1,\ldots,m\ ;\ x \geq 0\} \tag{14}$$

に対して、ファジィ数の大小関係に関する4種類の指標に基づく、しきい値αに依存したα実行可能性を、次のように定義した。

【定義2】(α実行可能性)

(I) ファジィ制約集合 $\tilde{X}$ に対して、

$$x \in X_{VWF}(\alpha) = \{x \in E^n \mid \mathrm{Pos}(\tilde{a}_j x \leqq \tilde{b}_j) \geqq \alpha,\ j=1,\ldots,m;\ x \geqq 0\} \tag{15}$$

の時、$x \in E^n$ はα-Very Weak Feasible(α-VWF)であるという。

(II) ファジィ制約集合 $\tilde{X}$ に対して、

$$x \in X_{MWF}(\alpha) = \{x \in E^n \mid \mathrm{Pos}(\tilde{a}_j x < \tilde{b}_j) \geqq \alpha,\ j=1,\ldots,m;\ x \geqq 0\} \tag{16}$$

の時、 $x \in E^n$ は α -Medium Weak Feasible(α -MWF)であるという。

(Ⅲ) ファジィ制約集合 $\tilde{X}$ に対して、

$$x \in X_{MSF}(\alpha)$$

$$= \{ x \in E^n \mid Nes(\tilde{a}_j x \lesssim \tilde{b}_j) \geq \alpha, j=1,...,m; \ x \geq 0 \} \quad (17)$$

の時、 $x \in E^n$ は α -Medium Strong Feasible (α -MSF)であるという。

(Ⅳ) ファジィ制約集合 $\tilde{X}$ に対して、

$$x \in X_{VSF}(\alpha)$$

$$= \{ x \in E^n \mid Nes(\tilde{a}_j x \lessdot \tilde{b}_j) \geq \alpha, j=1,...,m; \ x \geq 0 \} \quad (18)$$

の時、 $x \in E^n$ は α -Very Strong Feasible(α -VSF)であるという。

■

これら4種類の α 実行可能性は、それぞれ、『$\tilde{b}_j$ が $\tilde{a}_j x$ より大きい可能性の度合い』、『$\tilde{b}_j$ が $\tilde{a}_j x$ より必然的に大きいことが可能である度合い』、『$\tilde{b}_j$ が $\tilde{a}_j x$ より可能的に大きいことが必然である度合い』、『$\tilde{b}_j$ が $\tilde{a}_j x$ より大きい必然性の度合い』が、 α 以上であるような制約集合であると解釈できる。

ファジィ制約集合(14)に対する4種類の α 実行可能な集合は、定理1を用いれば、等価的に次のような通常の線形不等式の集合として表すことができる。

【定理2】

(Ⅰ) $X_{UWF}(\alpha) = \{ x \in E^n \mid a^L_{j\alpha} x \leq b^R_{j\alpha}, j=1,...,m;$

$x \geq 0 \}$ (19)

(Ⅱ) $X_{MWF}(\alpha) = \{x \in E^n \mid a^R_{j(1-\alpha)} x \leqq b^R_{j\alpha}, j=1,\ldots,m;$

$x \geqq 0\}$ (20)

(Ⅲ) $X_{MSF}(\alpha) = \{x \in E^n \mid a^L_{j\alpha} x \leqq b^L_{j(1-\alpha)}, j=1,\ldots,m;$

$x \geqq 0\}$ (21)

(Ⅳ) $X_{USF}(\alpha) = \{x \in E^n \mid a^R_{j(1-\alpha)} x \leqq b^L_{j(1-\alpha)}, j=1,\ldots,m;$

$x \geqq 0\}$ (22)

■

ここで、

$$a^L_{j\alpha} = [a^L_{j1\alpha}, \ldots, a^L_{jn\alpha}], \quad j=1,\ldots,m \qquad (23)$$

$$a^R_{j\alpha} = [a^R_{j1\alpha}, \ldots, a^R_{jn\alpha}], \quad j=1,\ldots,m \qquad (24)$$

で、$a^L_{j\ell\alpha}$, $a^R_{j\ell\alpha}$および $b^L_{j\alpha}$, $b^R_{j\alpha}$は、それぞれ、ファジィ数 $\tilde{a}_{j\ell}$と$\tilde{b}_j$のαレベル集合の左右の端点を表す。

定義2から、直ちに次の性質が成立する。

【性質1】

$0 \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq 1$のとき、次の関係が成立する。

(Ⅰ) $X_{UWF}(\alpha_1) \supset X_{UWF}(\alpha_2)$

(Ⅱ) $X_{MWF}(\alpha_1) \supset X_{MWF}(\alpha_2)$

(Ⅲ) $X_{MSF}(\alpha_1) \supset X_{MSF}(\alpha_2)$

(Ⅳ) $X_{USF}(\alpha_1) \supset X_{USF}(\alpha_2)$

3. 2 γパレート最適性

ファジィパラメータを含む多目的線形分数計画問題(10)に対するパレート最適性を考える前に、ここでは、まず、目的関数にのみファジィパラメータを含む多目的線形分数計画問題

$$
\begin{aligned}
&\min \quad (\tilde{c}_1 x+\tilde{c}_{1,n+1})/(\tilde{d}_1 x+\tilde{d}_{1,n+1}) \\
&\qquad \cdots\cdots\cdots \qquad\qquad (25)\\
&\min \quad (\tilde{c}_k x+\tilde{c}_{k,n+1})/(\tilde{d}_k x+\tilde{d}_{k,n+1}) \\
&\text{subject to} \quad x \in X \\
&\qquad = \{x \in E^n \mid a_j x \leq b_j,\ j=1,\ldots,m\ ;\ x \geqq 0\}
\end{aligned}
$$

に対して、4種類の指標に基づくパレート最適性について考察する。

【定義3】 (γ パレート最適性)

(I) 問題(25)に対して、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Pos}\,\{&(\tilde{c}_i x+\tilde{c}_{i,n+1})/(\tilde{d}_i x+\tilde{d}_{i,n+1}) \geqq \\
&(\tilde{c}_i x^*+\tilde{c}_{i,n+1})/(\tilde{d}_i x^*+\tilde{d}_{i,n+1})\} \leq \gamma,\quad i=1,\ldots,k \qquad (26)
\end{aligned}
$$

を満たす $x \in X$ が存在しないとき、$x^* \in X$ を γ -Very Weak Pareto optimal (γ -VWP)であるという。

(II) 問題(25)に対して、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Pos}\,\{&(\tilde{c}_i x+\tilde{c}_{i,n+1})/(\tilde{d}_i x+\tilde{d}_{i,n+1}) > \\
&(\tilde{c}_i x^*+\tilde{c}_{i,n+1})/(\tilde{d}_i x^*+\tilde{d}_{i,n+1})\} \leq \gamma,\quad i=1,\ldots,k \qquad (27)
\end{aligned}
$$

を満たす $x \in X$ が存在しないとき、$x^* \in X$ を γ -Medium Weak Pareto optimal (γ -MWP)であるという。

(III) 問題(25)に対して、

$$
\mathrm{Nes}\,\{(\tilde{c}_i x+\tilde{c}_{i,n+1})/(\tilde{d}_i x+\tilde{d}_{i,n+1}) \geqq
$$

$$(\tilde{c}_i x^* + \tilde{c}_{i,n+1})/(\tilde{d}_i x^* + \tilde{d}_{i,n+1})\} \leq \gamma,\quad i=1,\ldots,k \qquad (28)$$

を満たす$x \in X$が存在しないとき、$x^* \in X$をγ-Medium Strong Pareto optimal (γ-MSP)であるという。

(Ⅳ)　問題(25)に対して、

$$\mathrm{Nes}\{(\tilde{c}_i x + \tilde{c}_{i,n+1})/(\tilde{d}_i x + \tilde{d}_{i,n+1}) >$$

$$(\tilde{c}_i x^* + \tilde{c}_{i,n+1})/(\tilde{d}_i x^* + \tilde{d}_{i,n+1})\} \leq \gamma,\quad i=1,\ldots,k \qquad (29)$$

を満たす$x \in X$が存在しないとき、$x^* \in X$をγ-Very Strong Pareto optimal (γ-VSP)であるという。■

ここで、例えば、γ-VWPは、『ファジィパラメータを含む線形分数関数$(\tilde{c}_i x + \tilde{c}_{i,n+1})/(\tilde{d}_i x + \tilde{d}_{i,n+1})$が、$(\tilde{c}_i x^* + \tilde{c}_{i,n+1})/(\tilde{d}_i x^* + \tilde{d}_{i,n+1})$以上である可能性の度合いが$\gamma$以下であるような$x \in X$が存在しないような$x^* \in X$』として定義されている。

ところで、現在のところ、ファジィ数間の除算により生ずるファジィ数のメンバーシップ関数は陽に求めることはできないので、ファジィパラメータを含む線形分数関数$(\tilde{c}_i x + \tilde{c}_{i,n+1})/(\tilde{d}_i x + \tilde{d}_{i,n+1})$も、そのままでは対応するメンバーシップ関数の形状を知ることはできない。しかし、系1から、拡張原理に基づくファジィ数間の2項演算により生ずるファジィ数のγレベル集合は容易に求められることから、直ちに次の定理が得られる。ここで、$X_{UWP}(\gamma)$, $X_{MWP}(\gamma)$, $X_{MSP}(\gamma)$, $X_{USP}(\gamma)$はそれぞれ4種類のγパレート最適解の集合を表す。

【定理3】

(Ⅰ) $x^* \in X_{UWP}(\gamma)$ であるための必要十分条件は

$$(c^R_{i\gamma}x+c^R_{i,n+1,\gamma})/(d^L_{i\gamma}x+d^L_{i,n+1,\gamma})$$

$$\le\ (c^L_{i\gamma}x^*+c^L_{i,n+1,\gamma})/(d^R_{i\gamma}x^*+d^R_{i,n+1,\gamma}),\quad i=1,\dots,k \qquad (30)$$

を満たす $x \in X$ が存在しないことである。

(Ⅱ) $x^* \in X_{MWP}(\gamma)$ であるための必要十分条件は

$$(c^R_{i\gamma}x+c^R_{i,n+1,\gamma})/(d^L_{i\gamma}x+d^L_{i,n+1,\gamma})$$

$$\le\ (c^R_{i,1-\gamma}x^*+c^R_{i,n+1,1-\gamma})/(d^L_{i,1-\gamma}x^*+d^L_{i,n+1,1-\gamma}),$$

$$i=1,\dots,k \qquad (31)$$

を満たす $x \in X$ が存在しないことである。

(Ⅲ) $x^* \in X_{MSP}(\gamma)$ であるための必要十分条件は

$$(c^L_{i,1-\gamma}x+c^L_{i,n+1,1-\gamma})/(d^R_{i,1-\gamma}x+d^R_{i,n+1,1-\gamma})$$

$$\le\ (c^L_{i\gamma}x^*+c^L_{i,n+1,\gamma})/(d^R_{i\gamma}x^*+d^R_{i,n+1,\gamma}),\quad i=1,\dots,k \qquad (32)$$

を満たす $x \in X$ が存在しないことである。

(Ⅳ) $x^* \in X_{USP}(\gamma)$ であるための必要十分条件は

$$(c^L_{i,1-\gamma}x+c^L_{i,n+1,1-\gamma})/(d^R_{i,1-\gamma}x+d^R_{i,n+1,1-\gamma})$$

$$\le\ (c^R_{i,1-\gamma}x^*+c^R_{i,n+1,1-\gamma})/(d^L_{i,1-\gamma}x^*+d^L_{i,n+1,1-\gamma}),$$

$$i=1,\dots,k \qquad (33)$$

を満たす $x \in X$ が存在しないことである。■

ここで、

$$c^L_{i\gamma} = [\ c^L_{i1\gamma},\ \dots,\ c^L_{in\gamma}\ ],\quad i=1,\dots,k \qquad (34)$$

$$c^R_{i\gamma} = [\ c^R_{i1\gamma},\ \ldots,\ c^R_{in\gamma}\ ],\ i=1,\ldots,k \tag{35}$$

$$d^L_{i\gamma} = [\ d^L_{i1\gamma},\ \ldots,\ d^L_{in\gamma}\ ],\ i=1,\ldots,k \tag{36}$$

$$d^R_{i\gamma} = [\ d^R_{i1\gamma},\ \ldots,\ d^R_{in\gamma}\ ],\ i=1,\ldots,k \tag{37}$$

で、$c^L_{i\ell\gamma}$, $c^R_{i\ell\gamma}$, $d^L_{i\ell\gamma}$, $d^R_{i\ell\gamma}$は、それぞれ、ファジィ数 $\tilde{c}_{i\ell}$, $\tilde{d}_{i\ell}$のγレベル集合の左右の端点を表す。

定義3から、直ちに次の性質が成り立つ。

【性質2】

$0 \leqq \gamma_1 \leqq \gamma_2 \leqq 1$のとき、次の関係が成立する。

(Ⅰ) $X_{UWP}(\gamma_1) \supset X_{UWP}(\gamma_2)$

(Ⅱ) $X_{MWP}(\gamma_1) \supset X_{MWP}(\gamma_2)$

(Ⅲ) $X_{MSP}(\gamma_1) \supset X_{MSP}(\gamma_2)$

(Ⅳ) $X_{USP}(\gamma_1) \supset X_{USP}(\gamma_2)$

4. γパレート最適性とパレート最適性

第3節では、Duboisらの提案した可能性・必然性の概念に基づく4種類の指標に対してしきい値α, γを設定することによって、α実行可能性とγパレート最適性の概念をそれぞれ導入した。性質1, 2から、α, γは、それぞれ、実行可能性の度合い、パレート最適性の度合いとして解釈することができる。一方、4種類のα実行可能性は、定理2から、すべて通常の線形不等式の集合に帰着できることから、しきい値αに依存した制約集合

として、直感的に理解することができる。これに対して、4種類のγパレート最適性は、定理3によれば、不等式の左辺と右辺の係数ベクトルが異なっているので、通常のパレート最適性の概念との関連が明らかでない。

そこで、本節では、4種類のγパレート最適性と従来のパレート最適性の概念との関係を明らかにすると同時に、γパレート最適性の性質について詳しく検討する。

まず、次の系が成立する(7)。

【系2】

4つの$k\times(n+1)$行列 $\underline{P}$, $\bar{P}$, $\underline{Q}$, $\bar{Q}$ の任意の(i,j)要素 $\underline{p}_{ij}$, $\bar{p}_{ij}$, $\underline{q}_{ij}$, $\bar{q}_{ij}$ が次の関係を満たしているとする。

$$\underline{p}_{ij} \leqq \bar{p}_{ij},\quad i=1,\ldots,k,\quad j=1,\ldots,n+1 \tag{38}$$

$$\underline{q}_{ij} \leqq \bar{q}_{ij},\quad i=1,\ldots,k,\quad j=1,\ldots,n+1 \tag{39}$$

これら4つの$k\times(n+1)$行列に対して、次の3種類の集合を定義する。

$$X_1 = \{x^* \in X \mid \bar{P}x/\underline{Q}x \leq \underline{P}x^*/\bar{Q}x^* \text{ なる } x \in X \text{ が存在しない}\} \tag{40}$$

$$X_2 = \{x^* \in X \mid \underline{P}x/\bar{Q}x \leq \bar{P}x^*/\underline{Q}x^* \text{ なる } x \in X \text{ が存在しない}\} \tag{41}$$

ここで $\bar{P}x/\underline{Q}x$, $\underline{P}x/\bar{Q}x$ はそれぞれ次式を第i要素とするk次縦ベクトルを表す。

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \bar{p}_{ij} x_j + \bar{p}_{i,n+1}\right) \Big/ \left(\sum_{j=1}^{n} \underline{q}_{ij} x_j + \underline{q}_{i,n+1}\right) \tag{42}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \underline{p}_{ij} x_j + \underline{p}_{i,n+1}\right) \Big/ \left(\sum_{j=1}^{n} \bar{q}_{ij} x_j + \bar{q}_{i,n+1}\right) \tag{43}$$

また、Xは問題(25)の制約集合である。さらに、

$$p_{ij} \in [\underline{p}_{ij},\ \bar{p}_{ij}],\quad i=1,\ldots,k,\quad j=1,\ldots,n+1 \tag{44}$$

$$q_{ij} \in [\underline{q}_{ij},\ \bar{q}_{ij}],\quad i=1,\ldots,k,\quad j=1,\ldots,n+1 \tag{45}$$

を(i,j)要素とする$k \times (n+1)$行列P, Qに対して、

$$X_3(P/Q) = \{x^* \in X \mid Px/Qx \leq Px^*/Qx^* \text{ なる } x \in X \text{ が存在しない}\} \tag{46}$$

とおく(以下では、簡単のため、式(44),(45)を満たす任意の行列をそれぞれ$P \in [\underline{P}, \bar{P}]$, $Q \in [\underline{Q}, \bar{Q}]$で表す)。さらに、行列$Q \in [\underline{Q}, \bar{Q}]$の任意の要素$q_{ij} \geq 0$かつ$Qx > 0$と仮定する。このとき、次の関係が成立する。

$$(\mathrm{I})\quad X_1 \supset \bigcup_{P \in [\underline{P},\ \bar{P}]} \ \bigcup_{Q \in [\underline{Q},\ \bar{Q}]} X_3(P/Q) \tag{47}$$

$$(\mathrm{II})\quad X_2 \subset \bigcap_{P \in [\underline{P},\ \bar{P}]} \ \bigcap_{Q \in [\underline{Q},\ \bar{Q}]} X_3(P/Q) \tag{48}$$

〔証明〕

(I) $x^* \notin X_1$とすれば、X_1の定義より$\bar{P}x/\underline{Q}x \leq \underline{P}x^*/\bar{Q}x^*$なる$x \in X$

が存在する。このとき、式(38),(39)と $x \geqq 0$, $x^* \geqq 0$ および

$Q \in [\underline{Q}, \overline{Q}]$ に対して $Qx > 0$ であることから、任意の $P \in [\underline{P}, \overline{P}]$,

$Q \in [\underline{Q}, \overline{Q}]$ に対して、

$$Px/Qx \leqq \overline{P}x/\underline{Q}x \leq \underline{P}x^*/\overline{Q}x^* \leqq Px^*/Qx^*$$

であることから $x^* \notin \bigcup_{P \in [\underline{P}, \overline{P}]} \bigcup_{Q \in [\underline{Q}, \overline{Q}]} X_3(P/Q)$.

(Ⅱ) ある行列 $P \in [\underline{P}, \overline{P}]$, $Q \in [\underline{Q}, \overline{Q}]$ に対して、$x^* \notin$

$X_3(P/Q)$ であるとする。

(即ち、$x^* \notin \bigcap_{P \in [\underline{P}, \overline{P}]} \bigcap_{Q \in [\underline{Q}, \overline{Q}]} X_3(P/Q)$).

この時、$X_3(P/Q)$ の定義より、$Px/Qx \leq Px^*/Qx^*$ なる $x \in X$ が存在する。よって、式(38),(39)と x, $x^* \geqq 0$ および、$Q \in [\underline{Q}, \overline{Q}]$

に対して $Qx > 0$ であることから、

$$\underline{P}x/\overline{Q}x \leqq Px/Qx \leq Px^*/Qx^* \leqq \overline{P}x^*/\underline{Q}x^*$$

なる $x \in X$ が存在する。従って、$x^* \notin X_2$。■

この系によれば、定理3において、それぞれ

(Ⅰ) $c^L_{i\gamma} \leqq c^R_{i\gamma}$, $d^L_{i\gamma} \leqq d^R_{i\gamma}$ (49)

(Ⅱ) $c^R_{i(1-\gamma)} \leqq c^R_{i\gamma}$, $d^L_{i(1-\gamma)} \geqq d^L_{i\gamma}$ $(0 \leqq \gamma \leqq 0.5)$ (50)

$c^R_{i(1-\gamma)} \geqq c^R_{i\gamma}$, $d^L_{i(1-\gamma)} \leqq d^L_{i\gamma}$ $(0.5 \leqq \gamma \leqq 1)$ (51)

(Ⅲ) $c_{i\gamma}^{L} \leqq c_{i(1-\gamma)}^{L}$, $d_{i\gamma}^{R} \geqq d_{i(1-\gamma)}^{R}$ $(0 \leqq \gamma \leqq 0.5)$ (52)

$c_{i\gamma}^{L} \geqq c_{i(1-\gamma)}^{L}$, $d_{i\gamma}^{R} \leqq d_{i(1-\gamma)}^{R}$ $(0.5 \leqq \gamma \leqq 1)$ (53)

(Ⅳ) $c_{i(1-\gamma)}^{L} \leqq c_{i(1-\gamma)}^{R}$, $d_{i(1-\gamma)}^{L} \leqq d_{i(1-\gamma)}^{R}$ (54)

が成立しているので、これらの関係式と系2から、問題(25)に対するγパレート最適性と通常の多目的計画問題に対するパレート最適性の間には、次の関係が成立する。

【定理4】

(Ⅰ) $$X_{UWP}(\gamma) \supset \bigcup_{(P,Q)\in M_{UW}(\gamma)} X^{P}(P/Q)$$ (55)

(Ⅱ) $$X_{MWP}(\gamma) \supset \bigcup_{(P,Q)\in M_{MW}(\gamma)} X^{P}(P/Q) \quad (0 \leqq \gamma \leqq 0.5)$$ (56)

$$X_{MWP}(\gamma) \subset \bigcap_{(P,Q)\in M_{MW}(\gamma)} X^{P}(P/Q) \quad (0.5 \leqq \gamma \leqq 1)$$ (57)

(Ⅲ) $$X_{MSP}(\gamma) \supset \bigcup_{(P,Q)\in M_{MS}(\gamma)} X^{P}(P/Q) \quad (0 \leqq \gamma \leqq 0.5)$$ (58)

$$X_{MSP}(\gamma) \subset \bigcap_{(P,Q)\in M_{MS}(\gamma)} X^{P}(P/Q) \quad (0.5 \leqq \gamma \leqq 1)$$ (59)

(Ⅳ) $$X_{USP}(\gamma) \subset \bigcap_{(P,Q)\in M_{US}(\gamma)} X^{P}(P/Q)$$ (60)

ただし、$M_{UW}(\gamma)$, $M_{MW}(\gamma)$, $M_{MS}(\gamma)$, $M_{US}(\gamma)$は、(i,j)要素がそれぞれ次式で定義される2つの$k\times(n+1)$行列P, Qの集合の全体を表す。

(Ⅰ) 行列 $(P,Q)\in M_{UW}(\gamma)$の(i,j)要素 :

$$p_{ij} \in [\, c_{ij\gamma}^{L},\ c_{ij\gamma}^{R} \,],\quad q_{ij} \in [\, d_{ij\gamma}^{L},\ d_{ij\gamma}^{R} \,]$$ (61)

(Ⅱ) 行列 $(P,Q)\in M_{MW}(\gamma)$の(i,j)要素 :

$$p_{ij} \in [\, c^{R}_{ij(1-\gamma)},\ c^{R}_{ij\gamma} \,] \qquad (0 \leqq \gamma \leqq 0.5) \tag{62}$$

$$q_{ij} \in [\, d^{L}_{ij\gamma},\ d^{L}_{ij(1-\gamma)} \,] \qquad (0 \leqq \gamma \leqq 0.5)$$

$$p_{ij} \in [\, c^{R}_{ij\gamma},\ c^{R}_{ij(1-\gamma)} \,] \qquad (0.5 \leqq \gamma \leqq 1) \tag{63}$$

$$q_{ij} \in [\, d^{L}_{ij(1-\gamma)},\ d^{L}_{ij\gamma} \,] \qquad (0.5 \leqq \gamma \leqq 1)$$

(Ⅲ)　行列　$Q \in M_{MS}(\gamma)$の(i,j)要素　：

$$p_{ij} \in [\, c^{L}_{ij\gamma},\ c^{L}_{ij(1-\gamma)} \,] \qquad (0 \leqq \gamma \leqq 0.5) \tag{64}$$

$$q_{ij} \in [\, d^{R}_{ij(1-\gamma)},\ d^{R}_{ij\gamma} \,] \qquad (0 \leqq \gamma \leqq 0.5)$$

$$p_{ij} \in [\, c^{L}_{ij(1-\gamma)},\ c^{L}_{ij\gamma} \,] \qquad (0.5 \leqq \gamma \leqq 1) \tag{65}$$

$$q_{ij} \in [\, d^{R}_{ij\gamma},\ d^{R}_{ij(1-\gamma)} \,] \qquad (0.5 \leqq \gamma \leqq 1)$$

(Ⅳ)　行列　$Q \in M_{US}(\gamma)$の(i,j)要素　：

$$p_{ij} \in [\, c^{L}_{ij(1-\gamma)},\ c^{R}_{ij(1-\gamma)} \,] \tag{66}$$

$$q_{ij} \in [\, d^{L}_{ij(1-\gamma)},\ d^{R}_{ij(1-\gamma)} \,]$$

また、$X^{P}(P/Q)$は、$k \times (n+1)$行列P, Qを線形分数目的関数の係数とする多目的線形分数計画問題

$$\min\ Px/Qx \quad \text{subject to} \quad x \in X \tag{67}$$

に対するパレート最適解の集合を表す。■

定理4において、式(55)から、$X_{UWP}(\gamma)$は、パレート最適解の集合$X^{P}(P/Q)$の行列$(P, Q) \in M_{UW}(\gamma)$に関する和集合を含んでいるので、少なくとも$X_{UWP}(\gamma)$の部分集合は、パレート最適解の

集合$X^P(P/Q)$から容易に求めることができる。

また、$X_{MWP}(\gamma)$あるいは$X_{MSP}(\gamma)$は、γの値が0.5以下か以上かで状況が全く異なっている（式(56)-(59)参照）という難点がある。しかも、$X_{MWP}(\gamma)$と$X_{MSP}(\gamma)$はともに$0.5 \leqq \gamma \leqq 1$のとき、パレート最適解の集合$X^P(P/Q)$の共通集合に含まれているので、それらの要素を、数値計算上、直接取り出すことは困難である。

さらに、$X_{USP}(\gamma)$は、パレート最適解の集合$X^P(P/Q)$の行列$(P,Q) \in M_{US}(\gamma)$に関する共通集合に含まれているので、直接$X_{USP}(\gamma)$の要素を求めることは困難である。

以上の議論から、4種類のγパレート最適解の中では、その部分集合を容易に求めることができるという意味において、γ-VWPが最も好ましい性質を持っているといえる。

5. （α, γ）-パレート最適解

ここでは、ファジィパラメータを含む多目的線形分数計画問題に対して、パレート最適性に対しては、4節で考察したように、最も好ましい性質を持つと考えられるγ-VWPを採用し、それに対応して実行可能性もα-VWFを採用することにより、次のような(α, γ)-VWPの概念を定義する。

【定義4】

ファジィパラメータを含む多目的線形分数計画問題(10)に対する制約集合

$X_{UWF}(\alpha) = \{x \geqq 0 \mid Pos(\tilde{a}_j x \leqq \tilde{b}_j) \geqq \alpha, j=1, \cdots, m\}$ 上で

$Pos\{(\tilde{c}_i x + \tilde{c}_{i,n+1})/(\tilde{d}_i x + \tilde{d}_{i,n+1}) \geqq$

$(\tilde{c}_i x^* + \tilde{c}_{i,n+1})/(\tilde{d}_i x^* + \tilde{d}_{i,n+1})\} \leqq \gamma, \quad i=1, \ldots, k$

なる $x \in X_{UWF}(\alpha)$ が存在しないとき $x^* \in X_{UWF}(\alpha)$ を (α, γ) -Very Weak Pareto optimal ((α, γ)- VWP)であるという。■

一般に、(α, γ)-VWP の集合 $X_{UW}(\alpha, \gamma)$は無限個存在する。

Fig.1において, $C^L_\gamma x/D^R_\gamma x$, $C^R_\gamma x/D^L_\gamma x$はそれぞれk個の線形分数関数

$(c^L_{i\gamma} x + c^L_{i,n+1,\gamma})/(d^R_{i,\gamma} x + d^R_{i,n+1,\gamma}), \quad i=1, \ldots, k$

$(c^R_{i\gamma} x + c^R_{i,n+1,\gamma})/(d^L_{i,\gamma} x + d^L_{i,n+1,\gamma}), \quad i=1, \ldots, k$

のベクトルを表す。また、斜線部分の集合は決定変数空間における(α, γ)-VWPの集合を線形分数関数$C^L_\gamma x/D^R_\gamma x$ により目的関数空間に写像させた領域を表す。

定理４の(I)からわかるように (α, γ)- VWP の集合 $X_{UW}(\alpha, \gamma)$ は

<u>問題 1</u>

$$\begin{aligned} \min \quad & (c^L_{1\gamma} x + c^L_{1,n+1,\gamma})/(d^R_{1,\gamma} x + d^R_{1,n+1,\gamma}) \\ & \cdots\cdots\cdots \qquad (68) \\ \min \quad & (c^L_{k\gamma} x + c^L_{k,n+1,\gamma})/(d^R_{k,\gamma} x + d^R_{k,n+1,\gamma}) \\ & \text{subject to} \quad x \in X_{UWF}(\alpha) \end{aligned}$$

のパレート最適解の集合 $X^P_\alpha(C^L_\gamma/D^R_\gamma)$および

問題2

$$\min\ (c^R_{1\gamma}x+c^R_{1,n+1,\gamma})/(d^L_{1,\gamma}x+d^L_{1,n+1,\gamma})$$

$$\cdots\cdots \qquad (69)$$

$$\min\ (c^R_{k\gamma}x+c^R_{k,n+1,\gamma})/(d^L_{k,\gamma}x+d^L_{k,n+1,\gamma})$$

$$\text{subject to}\quad x\in X_{UWF}(\alpha)$$

のパレート最適解の集合 $X^P_\alpha(C^R_\gamma/D^L_\gamma)$ を含んでいる(Fig.1参照)。ここで、問題1,2は、通常の多目的線形分数計画問題なので、CharnesとCooper[1]の変数変換法を用いれば、線形計画問題に帰着できることに注意しよう。また、Fig.1から明らかなように、$X^P_\alpha(C^L_\gamma/D^R_\gamma)$あるいは$X^P_\alpha(C^R_\gamma/D^L_\gamma)$は、それぞれ、$X_{UW}(\alpha,\gamma)$の中で最も楽観的に考えた場合の解集合あるいは最も悲観的に考えた場合の解集合であると解釈できる。

また、ファジィパラメータを含む多目的線形分数計画問題(10)に対して、坂和・矢野[5]により提案されたα-パレート最適解はすべて、$\gamma=\alpha$と設定した場合の問題1のパレート最適解として求められることから、α-パレート最適解の集合を$X_S(\alpha)$で表すと、次の関係が成立することがわかる。

$$X_S(\alpha)\subset X_{UW}(\alpha,\alpha) \qquad (70)$$

即ち、α-パレート最適解は、『$X_{UWF}(\alpha)$上のγ-VWPの集合の中でも、最も楽観的に考えた場合の解集合』であると解釈できる。

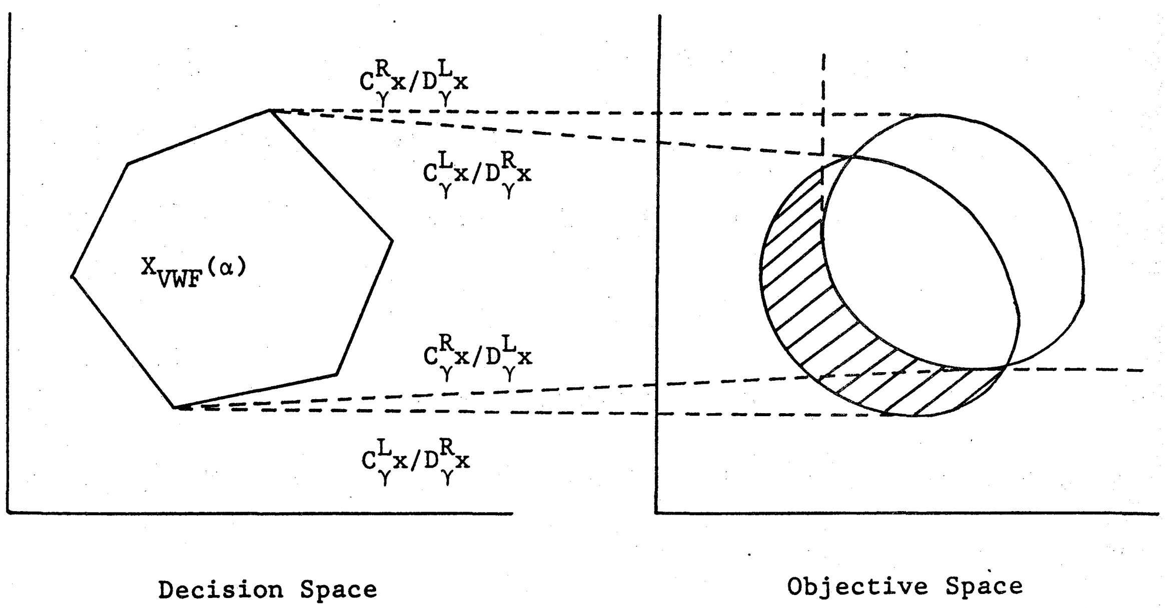

Fig. 1 (α,γ)-Very Weak Pareto Optimal Solution Set : $X_{VW}(\alpha,\gamma)$

6. おわりに

本論文では、ファジィパラメータを含む多目的線形分数計画問題に対して、Duboisら[2,3]により提案された可能性・必然性の概念に基づく4種類の指標に対応して、しきい値α，γに依存したそれぞれ4種類のα実行可能性とγパレート最適性を定義した。ここで、α実行可能性とγパレート最適性の直感的な理解を容易にするため、レベル集合を用いて通常の制約集合、パレート最適性の概念との関連も明らかにした。さらに、α実行可能性とγパレート最適性を同時に考慮した(α，γ)パレート最適解の概念を導入し、(α，γ)パレート最適解の集合の中で、最も楽観的および悲観的に考えた場合の解集合が、線形計画法に基づいて求められることを示した。今後は、提案された(α，γ)パレート最適解の概念を、多目的線形分数計画問題として記述される、あいまい状況下における現実の意思決定問題に対していかに適用するかについて検討する必要がある。

文　献

(1) A.Chanes and W.W.Cooper : "Programming with linear fractional functions", Naval Research Logistics Quarterly, 9, pp.181-186 (1962).

(2) D.Dubois : "Linear Programming with Fuzzy Data", Analysis of Fuzzy Information, Volume 3, (Ed. by J.C.Bezdek) CRC Press, Florida, pp.241-263 (1987).

(3) D.Dubois and H.Prade : "Ranking Fuzzy Numbers in the Setting of Possibility Theory", Information Science, 30, pp.183-224 (1983).

(4) J.S.H.Kornbluth and R.E.Steuer : "Multiple objective linear fractional programming", Management Science, 27, 9, pp.1024-1039 (1981).

(5) M.Sakawa and H.Yano : "Interactive Decision Making for Multiobjective Linear Fractional Programming Problems with Fuzzy Parameters" Cybernetics and Systems : An International Journal, Vol.16, pp.377-394 (1985).

(6) 坂和、矢野：”ファジィパラメータを含む多目的線形計画問題に対する統一的アプローチ”、電子情報通信学会論文誌、J71-A, 8, pp.1569-1575 (昭63-08).

(7) 坂和、矢野：”ファジィパラメータを含む多目的線形計画問題に対する拡張パレート最適性の概念とその性質”，電子情報通信学会論文誌(印刷中)

(8) 坂和、矢野、湯峯：”多目的線形分数計画問題に対する対話型ファジィ満足化手法”、電子情報通信学会論文誌、Vol.J69-A, 1, pp.32-41 (昭61-01).

(9) L.A.Zadeh : "The concept of a linguistic variables and its application to approximate reasoning-1", Information Science, 8, pp.199-249 (1975).