数理解析研究所講究録
第687巻1989年109-123

未定係数法を用いたクリーネ代数の有限モデルの導出

明治大学情報科学センター　二宮智子（Tomoko Ninomiya）
明治大学工学部　向殿政男（Masao Mukaidono）

1．はじめに

論理方程式における未定係数法とは、与えられた幾つかの論理式を恒真式――そこに含まれる変数にいかなる値を代入しても成立している式――であるとして、それらを連立論理方程式とみなして解を求めるものである。この場合、論理式に現れる論理記号が未知関数となり、結果としてそれらの論理記号が満たすべき真理値表を見出すことになる。計算機を用いて未定係数法で解を求めるためには、各変数のとる値を2値とか3値とかある有限の値に仮定し、未知関数の係数を未定に設定する。そして、論理記号によって結合されている各変数の全ての値の組み合わせについて論理式が真となるようように未定係数を決める。未定係数法は、論理記号の意味を調べるうえで非常に役に立つが、本質的にはしらみつぶし法であり、いかに効率良く解を求めるかが、特に次元が高くなる程問題となる。うまく工夫しないと、意味のある時間内に

は、解が求まらなくなる

論理方程式における未定係数法を最初に提案したのは、後藤[1]〜[5]であった。そこでは、主として3値論理の推論法則(Modus Pones)を前提とした公理系を対象としていた。一方、著者らは[6]、未定係数法を代数の公理系を満足する有限モデルの導出に応用できることを、クリーネ代数を例にとり示し、そのアルゴリズムの性質を明らかにした。代数系を満たす有限モデルを導出することは、その代数系の性質を知るうえで大変有効であり、未定係数法によりクリーネ代数の7元までの全ての有限モデルを見出すことができた。そこでの方法は、広さ優先の方法であった。一方、有限の解を探索するアルゴリズムには、もう一つ深さ優先の方法がある。今回この深さ優先のアルゴリズムを用いて未定係数法を処理するための方法を開発し、両者のアルゴリズムの特徴を明らかにする。これにより、従来物理的制限により処理できなかったクリーネ代数の元の数が8である全てのモデルを始めて発見できたので報告する。

2. クリーネ代数

クリーネ(Kleene)代数は、ファジイ集合が満たす代数系として最近注目を浴びている。二値論理に対応するブール(

Boole)代数において成立している相補律の代わりに、それよりも弱い条件であるクリーネ律で置き換えて得られる代数系である。クリーネ代数は、ファジイ論理に対応しており、あいまいさを扱うのに適した代数系である。

クリーネ代数は、Ｆを空でない集合、Ｘ，Ｙ，ＺをＦの要素をとる変数として、Ｆ上で定義される三つの演算子∪，∩，～が次の表１．(1)～(10)の恒等式を満足する代数系＜Ｆ，∪，∩，～，１，０＞として定義されている。

表 1

(1)	交換律	$X \cup Y = Y \cup X$ $X \cap Y = Y \cap X$
(2)	結合律	$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$ $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$
(3)	吸収律	$X \cup (X \cap Y) = X$ $X \cap (X \cup Y) = X$
(4)	分配律	$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
(5)	巾等律	$X \cup X = X$ $X \cap X = X$
(6)	ド・モルガン律	$\sim (X \cup Y) = \sim X \cap \sim Y$ $\sim (X \cap Y) = \sim X \cup \sim Y$
(7)	復帰律	$\sim (\sim X) = X$
(8)	最小元の存在	$0 \cup X = X$ $0 \cap X = 0$
(9)	最大元の存在	$1 \cup X = 1$ $1 \cap X = X$
(10)	クリーネ律	$(X \cap \sim X) \cup (Y \cup \sim Y) = Y \cup \sim Y$ $(X \cap \sim X) \cap (Y \cup \sim Y) = X \cap \sim X$

これらの恒等式－－クリーネ代数の公理系－－を満足する有

限モデルを見出すことを考える。なお、(1)～(10)は互いに独立であるとは限らない。表2.(1)～(6)の恒等式は、互いに独立で完全(即ち、これらから表1.(1)～(10)の全ての恒等式が導ける)なクリーネ代数の公理系の一つであることは、すでに証明されている[7]ので、理論的には、この6つの恒等式を満足するモデルを見出せば良いことになる。しかし実際には、表1の他の恒等式を用いた方が、より高速に処理できることを、後で述べている。

表2

(1)	交換律	$X \cup Y = Y \cup X$
(2)	分配律	$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
(6)	ド・モルガン律	$\sim(X \cup Y) = \sim X \cap \sim Y$
(7)	復帰律	$\sim(\sim X) = X$
(8)	最小元の存在	$0 \cup X = X$
(10)	クリーネ律	$(X \cap \sim X) \cup (Y \cup \sim Y) = Y \cup \sim Y$

表1の演算子は、∪,∩,～の三つであるが、クリーネ代数では、

$$X \cap Y = \sim(\sim X \cup \sim Y)$$

が成立しているので、これを用いると、～と∪の2つを考えれば良いことになる(表3.但し、ド・モルガン律については、恒等式の条件を調べる必要がなくなったので省略してある)。

さらに、演算子～は、一対一対応の論理演算子であり、

$\sim X=X$ なる元は、もし存在すれば、唯一つであることが知られているので、～に関しては表4のように仮定しても一般性を失わない。従って、演算子は∪のみとなる。

表 3

(1)	交換律	$X \cup Y = Y \cup X$
(2)	分配律	$\sim(\sim X \cup \sim(Y \cup Z)) = \sim(\sim X \cup \sim Y) \cup (\sim X \cup \sim Z)$
(3)	復帰律	$\sim(\sim X) = X$
(4)	最小元の存在	$0 \cup X = X$
(5)	クリーネ律	$\sim(\sim X \cup X) \cup (Y \cup \sim Y) = Y \cup \sim Y$

表 4

Xの値	1	2	3	・・・	n_0
～Xの値	n_0	n_0-1	n_0-2	・・・	1

3. 未定係数法による公理系の表現

未定係数法の詳細については、他の文献[(1)〜(6)]を参照されたい。ここでは、演算子∪を未定義演算記号として、未定係数 S^{l}_{mn} は、0又は1の値をとるものとして、

$$(A \cup B)^{l} = \bigvee_{m=1}^{n_0} \bigvee_{n=1}^{n_0} S^{l}_{mn} \cdot A^{m} \cdot B^{n} \qquad --- \quad (3.1)$$

とおく。ここで、l, m, n は各々 $A \cup B$, A, Bがとる真理値であり、n_0は真理値の数であり、1（最大元），2，・・・，n_0-1，n_0（最小元）でその真理値を表す。前述の表3に、

さらに～については、表4を仮定して(3.1)を代入し、任意の変項X,Y,Z について恒等式が成立するための条件を考えると、表5のような未定係数Sについての連立論理方程式が得られる(復帰律については、仮定より恒等式を満足しているので省略してある)。これらを解くことで、最終的には∪の真理値表が得られる。

表 5

(1)	交換律より	$\bigwedge_{x,y=1}^{n_0} \bigvee_{j=1}^{n_0} S_{xy}^{j} \cdot S_{yx}^{j} \equiv 1$
(2)	分配律より	$\bigwedge_{x,y,z=1}^{n_0} \bigvee_{j,k,l,m=1}^{n_0} S_{n_0-x+1,k}^{n_0-j+1} \cdot S_{yz}^{n_0-k+1} \cdot S_{lm}^{j} \cdot S_{n_0-x+1,n_0-y+1}^{n_0-l+1} \cdot S_{n_0-x+1,n_0-z+1}^{n_0-m+1} \equiv 1$
(3)	最小元の存在より	$\bigwedge_{x=1}^{n_0} S_{n_0 x}^{x} \equiv 1$
(4)	クリーネ律より	$\bigwedge_{x,y=1}^{n_0} \bigvee_{j,k=1}^{n_0} S_{kj}^{j} \cdot S_{n_0-x+1,x}^{n_0-k+1} \cdot S_{y,n_0-y+1}^{j} \equiv 1$

さらに、後述するように、独立でない他の公理についても、(3.1)を代入すると、表6の論理方程式が得られるので、これも実際の処理において用いることにする。

表 6

(5)	最大元の存在より	$\bigwedge_{x=1}^{n_0} S_{1x}^{1} \equiv 1$
(6)	巾等律より	$\bigwedge_{x=1}^{n_0} S_{xx}^{x} \equiv 1$
(7)	吸収律より	$\bigwedge_{x,y=1}^{n_0} \bigvee_{j=1}^{n_0} S_{xj}^{x} \cdot S_{n_0-x+1,n_0-y+1}^{n_0-j+1} \equiv 1$
(8)	結合律より	$\bigwedge_{x,y,z=1}^{n_0} \bigvee_{j,k,l=1}^{n_0} S_{xk}^{j} \cdot S_{yz}^{k} \cdot S_{lz}^{j} \cdot S_{xy}^{l} \equiv 1$

4．プログラム

従来、未定係数法を用いて論理方程式を解き、公理系を満足する真理値表を求めるために使用していた広さ優先の方法によるプログラムは、主として3値論理を中心としたものであった。これを多値の代数公理系を扱えるよう、ビット処理、ディスク・ファイル入出力、同形排除等の処理の追加をした。さらに、今回新しく深さ優先の方法によるプログラムを作成したので、その処理について述べる。全体のフローチャートは、図1のようになる。

まず、交換律が成立することにより真理値表は、対称行列となるので、プログラム上、真理値表の下三角部分を求めることにする。これにより、表5（1）の交換律による方程式は除くことができる。初期値設定においては、各変数の値を初期化すると同時に、唯一つの未定係数を用いて表される最小元の存在、最大元の存在、巾等律については、方程式より、

$$S^{1}_{n_0 1} = S^{2}_{n_0 2} = \cdot \cdot \cdot = S^{n_0}_{n_0 n_0} = 1$$

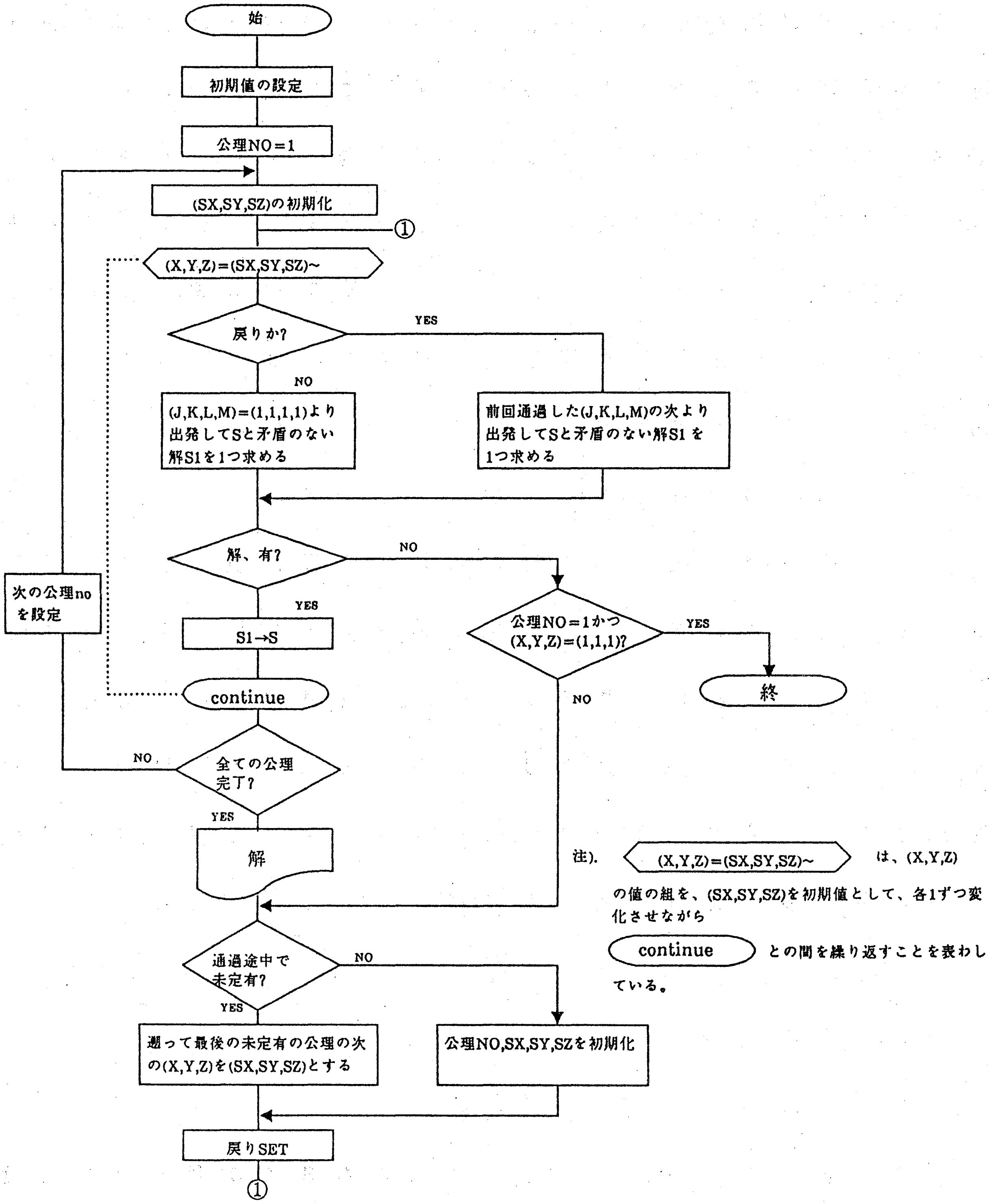
$$S^{1}_{1 1} = S^{1}_{2 1} = \cdot \cdot \cdot = S^{1}_{n_0 1} = 1$$

$$S^{1}_{1 1} = S^{2}_{2 2} = \cdot \cdot \cdot = S^{n_0}_{n_0 n_0} = 1$$

であることはすぐ分かるので、これらもSの初期値として設定する。

次に、全ての公理の全ての(x,y,z) の組について連立論理

図.1　深さ優先のアルゴリズムによるフローチャート



方程式を満足する解を最終的には全部求めるわけであるが、ここでは、先ず最初に一組だけ求める。そのための処理は2

ステップより成る。第1のステップでは、最初の公理の最初の(x,y,z)の組(1,1,1)について、補助変数(j,k,l,m)を(1,1,1,1)から逐次値を1ずつ変化させながら繰り返してその方程式を満足し、且つ初期値Sと矛盾しない最初の解S1を先ず一組だけ求める。未定係数の値としては、

0,1 ・・通常の2値論理，2未定，Φ矛盾

と表現し、Sと矛盾しない解S1は、広さ優先の方法と同様に、次の特殊4値論理の乗法演算を使用して求める。

Φ・Φ=Φ・0=Φ・1=Φ・2=Φ，0・0=0，0・1=Φ，0・2=0

1・1=1，1・2=1，2・2=2

この演算において、Φとなる係数が1つでも生じた場合には、解とはならないので、補助変数を次の値にして、同様の演算を行い、Φとならない解を求める。広さ優先の方法では、補助変数の全ての値についての解S1がp組あるとして、それら全部を求めてから次のステップに進むのであるが、深さ優先の方法では、1組だけ求められたところで、次のステップに進む。

第2のステップでは、ステップ1で求めた解S1を新しい解Sとし、次の(x,y,z)についてSと矛盾しない解を同様に求める。この第2のステップを繰り返して、全ての公理の全ての(x,y,z)について矛盾しない解S1を1組だけ求める。最終

的にS1は、最初の特殊解Sとなる。但し、途中で、ある公理のある(x,y,z)において、全ての補助変数の値を用いても、Φとはならない解S1が見つからなかった場合には、それまで通過してきた解は、特殊解とはならないので、解として棄却する。そこで、別の解S1を求めるために、公理と(x,y,z)を遡りながら、解が確定する前、即ち未定係数2を含むSを見つけ、そのSをもとに、以下前に求めたS1とは異なる解S1を第2のステップを同じように繰り返して求める。ここでも異なる解が求められなかった場合には、さらに一つ前の(x,y,z)の解Sをもとにして、同様の処理をする。最初の特殊解が一組求められた後は、公理と(x,y,z)を遡って、解が途中で矛盾により棄却された場合と同様に、解が確定する前のSをもとに、前とは異なる新しいS1を求める。後は、それが新しい特殊解となるか、同様の方法で調べる。

最終的に、遡る公理と(x,y,z)が無くなった時、もはや新しい特殊解は存在しないので、処理を終了する。

5．演算結果

表5の連立論理方程式を満足する解が一般解となり、Uの真理値表を決定する。しかし、広さ優先の方法と深さ優先の方法がどのような性質を持っているかを明らかにするため、

表6のその他の論理方程式も含めて解を求めてみる。なお、表5、6以外の交換律、ド・モルガン律、復帰律については、前述したように省略してある。

以下、表7に演算結果を、表8，図2に今回始めて得られた8元の真理値表及びそのハッセ図を掲載する。

表.7　深さ優先による演算結果

()内は広さ優先の場合の演算時間

	初期値	公理	4値の演算結果	5値の演算結果	6値の演算結果	7値の演算結果	備考
1	①	②③	0: 0:22	長時間かかる (9:00:00)			広さ優先でのみ処理可能
2	①	③②	0: 8:33	19:32:00 (処理不能)			深さ優先でのみ処理可能
3	①⑥	②③	0: 0:08	0:16 :19			最大元よりべき等律の方がより有効
4	①④	"	0: 0:08	0:32 :33			
5	①④⑥	"	0: 0:02	0: 0:53			べき等律,最大元共に有効
6	①	②⑥③	0: 0:02	0: 0:16	0:14:56	3:49:17	吸収律有効
7	①④	"	"	"	0:14:51	3:51:47	吸収律が入ると最大元はあまり有効でない
8	①⑥	"	"	" (0: 0:50)	0:14:50 (0: 3: 2)	2:49:04 (0:16:51)	べき等律有効
9	①④⑥	"	"	"	0:15:14	2:58:53	
10	①	②⑥⑦③	0	0: 0:13	0: 9:32	1: 48:04	吸収律,結合律有効 (広さ優先の場合には、結合律を入れても余り有効でない。)
11	①④	"	"	"	0: 9:29	1: 47:55	
● 12	①⑥	"	"	"	0: 9: 8	0: 51:20	
● 13	①④⑥	"	"	" (0: 1: 7)	0: 9:14 (0: 4:24)	0:51:45 (0:18:07)	

● 印が最も早い

表.8 X∪Yの8値の真理値表

①

X＼Y	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	1	2						
3	1	2	3					
4	1	2	3	4				
5	1	2	3	4	5			
6	1	2	3	4	5	6		
7	1	2	3	4	5	6	7	
8	1	2	3	4	5	6	7	8

②

X＼Y	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	1	2						
3	1	2	3					
4	1	2	3	4				
5	1	2	3	3	5			
6	1	2	3	4	5	6		
7	1	2	3	4	5	6	7	
8	1	2	3	4	5	6	7	8

③

X＼Y	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	1	2						
3	1	2	3					
4	1	2	2	4				
5	1	2	3	2	5			
6	1	2	3	4	3	6		
7	1	2	3	4	5	6	7	
8	1	2	3	4	5	6	7	8

④

X＼Y	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	1	2						
3	1	1	3					
4	1	2	3	4				
5	1	2	3	4	5			
6	1	2	3	4	5	6		
7	1	2	3	4	5	5	7	
8	1	2	3	4	5	6	7	8

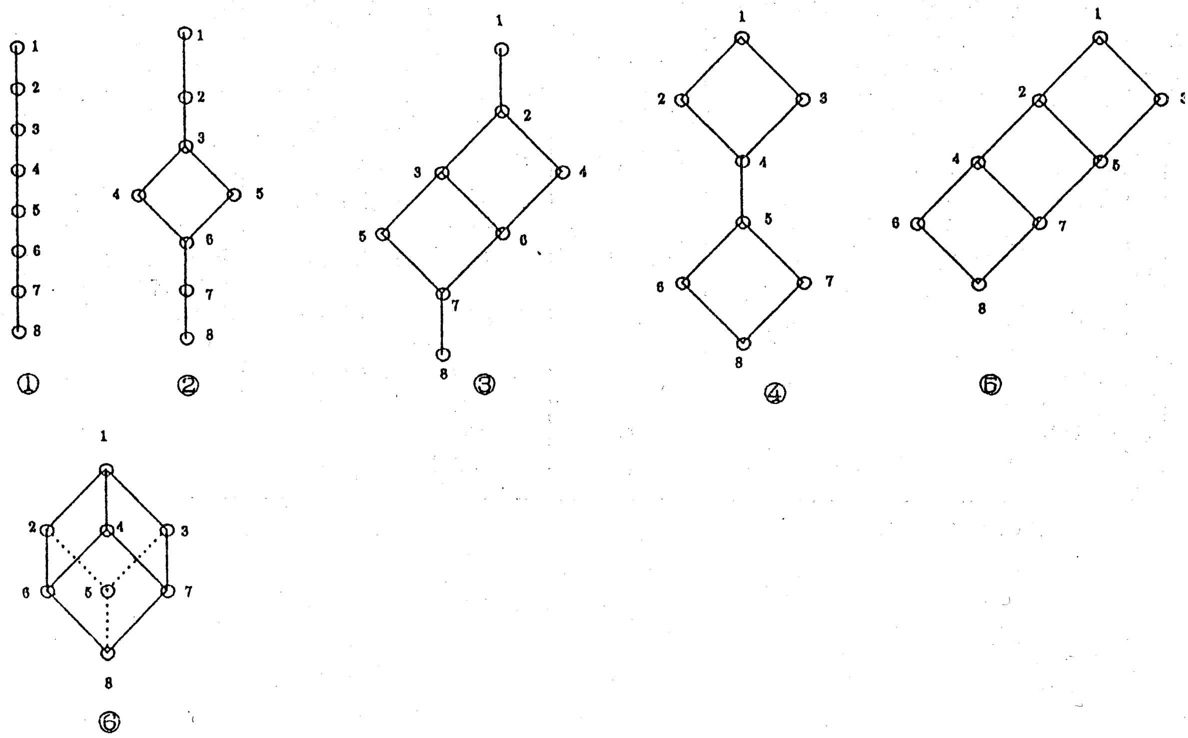
⑤

X＼Y	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	1	2						
3	1	1	3					
4	1	2	1	4				
5	1	2	3	2	5			
6	1	2	1	4	2	6		
7	1	2	3	4	5	4	7	
8	1	2	3	4	5	6	7	8

⑥

X＼Y	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	1	2						
3	1	1	3					
4	1	1	1	4				
5	1	2	3	1	5			
6	1	2	1	4	2	6		
7	1	1	3	4	3	4	7	
8	1	2	3	4	5	6	7	8

図. 2 8-元 ハッセ図



6．広さ優先のアルゴリズムと深さ優先のアルゴリズムによる処理の比較

未定係数法による広さ優先のアルゴリズムと深さ優先のアルゴリズムを用いての処理において、両者を比較しながら各々の特徴で明らかになった点について述べる。

①広さ優先においては、多値になると急激に途中の暫定解の数が増える。それをできるだけ抑えるためには、独立な公理以外の公理も含めて解の決定力の強い公理を、早めに演算し、未定を早く少なくすることが必要である。それでも計算機のメモリ容量により処理できなくなる場合がある。深さ優先においては、一つずつ解を求めているので、メモリ容量を多く必要とすることはない。

② CPUの演算時間については、多値になる程、一般的には、深さ優先の方が長くなる。しかし、広さ優先の場合に、暫定解が増えたことによっての外部ファイル・アクセスの時間を考えると、全体の処理時間は、必ずしもどちらが長いか言えなくなる。8元の場合には、深さ優先の処理時間の方が短くなった。

③広さ優先の場合には、途中での暫定解を全て求めているので、各公理が解の決定にどのような影響をもつかわかる。特に、独立な公理の発見と従属な公理の候補を選ぶには役立つ

。深さ優先の方は、公理毎の性質は調べにくい。

④最初に一つだけでも方程式を満足する解を求めたい時には、深さ優先の方が早く見つかり、発見できる可能性が高い。

7．あとがき

未定係数法は、今まで論理の公理系に含まれる未定義演算記号を決定するのに用いられてきたが、同アルゴリズムを代数の公理系を満たす有限モデルの導出に適用できることが、クリーネ代数を例にして明らかにされている。本論文では、深さ優先のアルゴリズムを用いることで、今までの広さ優先では求められなかった8元の全モデルを始めて発見できた。今後、両アルゴリズムの得失を考えながら、両者をうまく選択し、各種公理系の論理記号の意味を調べることが可能である。今後の課題としては、さらに演算時間を短縮する方法を見出し、より多値でも処理できるようにしたい。

日頃より御指導頂いている後藤以紀明治大学名誉教授及び加王森治教授には、深く感謝致します。

参考文献

1) 加王,後藤,"公理中の無定義演算記号の真理値表を未定係数法で決定する方法について",電気学会論文誌A,Vol.95,NO.5,1975

2) M.Goto,S.Kao,T.Ninomiya,"Determination of many-valued truth tables for undefined operators in axioms by a computer abd their applications",Proceedings of the Seventh International Symposium on Multiple-Valued Logic ,IEEE ,May,1977

3)M.Goto,S.Kao,T.Ninomiya,"Axiomaization of Kleene's three-valued logic by a computer",Proceedings of the ninth International Symposium on Multiple-Valued Logic ,IEEE ,May,1979

4) M.Goto,S.Kao,T.Ninomiya,"Axiomaization of Bochvar's three-valued logic by a computer",Proceedings of the 11th International Symposium on Multiple-Valued Logic ,IEEE ,May,1981

5) M.Goto,S.Kao,T.Ninomiya,"Synthesis of axiom systems for the three-valued predicate logic by means of the special four-logic"Proceedings of the 13th International Symposium on Multiple-Valued Logic , ,IEEE ,May,1984

6) 二宮,向殿,"代数の公理系を満す有限モデルの導出アルゴリズムとその性質",明治大学科学技術研究所紀要 第26 NO.7,1987

7) M.Mukaidono,"A set of independent and complete axioms for a fuzzy algebra(Kleene algebra)",Proceedings of the 11th International Symposium on Multiple-Valued Logic ,IEEE ,May,1981