数理解析研究所講究録
第688巻 1989年 25-33

Property T for C^*-algebras

都立大 理 松本健吾 (Kengo Matsumoto)

§1. 序論

以下の結果は，高井博司氏(都立大.理)との共同研究によるものである。

離散群の中で，Amenability と相反する概念であるKazhdanの性質Tを，作用素環に最初に持ち込んだのは，Connes-Jones [2] である。彼らは，II_1-factor(さらには一般のvon Neumann環)に，この離散群のKazhdanの性質Tを自然に一般化した。そして，彼らの意味で性質TをもったII_1-factorがhyperfinite型と極端な差異があることを示し，II_1-factorの構造理論に大きく貢献している([1],[2]etc)。また，最近，G. Skandalisは[4]でKazhdanの性質Tをもったある離散群のreduced群C^*-環がKK-理論的にNuclearにならないことを示して，強い意味のConnes-Kasparov予想に反例を与えている。従って，Kazhdanの性質TというK-理論的に病理的でかつ重要な振る舞いをする性質を，C^*環のレベルで捉えることは，C^*環のK-理論を考

える上で，非常に大切なことと思われる。また，そのことは，上記の Connes-Jones 達の結果から見ても，C^*環の構造論の発展に大きく寄与すると思われる。もともと Kazhdan の性質Tは，その表現論で完全に決定される性質であるから，それをC^*環に導入することは極めて自然である。そこで，我々はC^*環に，この離散群の Kazhdan の性質Tを一般化し，その構造論に迫って行きたい。

§2. 離散群の性質TとAmenability

いきなり，C^*環に性質Tを定義する前に，この§では，離散群の性質を復習しておく。以下Γは可算離散群とする。

まず，Γを amenable とする。有限群，可換群やS_∞（可算無限個の要素の有限置換全体）さらには，これらを building block としてもつ群がその例である。Γが amenable ということと，その（full, reduced）群C^*環が Nuclear になることとは同値である。従って，Nuclear 環というのは離散 amenable 群環の一般化として捉えることができる。

一方，Γが Kazhdan の性質Tをもつとする。すなわち[5]，

(※) 有限個の$\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in \Gamma$と$\varepsilon > 0$が存在して，任意の$\Gamma$の unitary 表現$(\pi, \mathcal{H})$に対して，単位 vector $\xi \in \mathcal{H}$が，$\|\pi(\gamma_i)\xi - \xi\| < \varepsilon$, $1 \leq i \leq n$を満たせば，$0 \neq \eta \in \mathcal{H}$が

し存在して，　$\pi(\gamma)\xi=\xi\quad \forall\gamma\in\Gamma$　を満たす。
有限群，　$SL(n,\mathbb{Z}),\ n\geq 3$，　$PSL(n,\mathbb{Z})\ n\geq 4$，　$Sp(n,1)$，　$\mathbb{Z}_n\rtimes SL(n,\mathbb{Z})$
等が良く知られている例である。

amenable でかつ Kazhdan の性質 T をもった離散群は有限群に限る。従って，Kazhdan の性質 T をもった離散群の群 C^*環で Nuclear であるものは有限次元環に限ることに注意しておく。

§3. C^*環の性質 T の定義

Kazhdan の性質 T が，先に書いた様に，完全に表現論で定義されるので，それを full 群環 $C^*(\Gamma)$ の言葉で言い換えることは可能である。その時 $\mathcal{H}$ の中での fixed vector $\xi\in\mathcal{H}$ があるというのは，$C^*(\Gamma)$ の言葉で言うと，

$a\in \ell^1(\Gamma)\subset C^*(\Gamma)$　に対して，　$a=\sum_{\gamma\in\Gamma}a(\gamma)\gamma$　と表わしておくとき

$$\pi(a)\xi=\sum_{\gamma}a(\gamma)\pi(\gamma)\xi=\sum_{\gamma}a(\gamma)\xi=\xi\sum_{\gamma}a(\gamma)=\xi\cdot t(a)$$

但し，ここで $t(\cdot)$ は $C^*(\Gamma)$ の 1 次元 trivial 表現を表す。
従って，unitary 表現 π の fixed vector は，その表現に対応する $C^*(\Gamma)$ の左からの表現と（右からの）trivial 表現との可換な vector，すなわち central vector，として捉えることが出来る。逆に，$C^*(\Gamma)$ の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ への左右からの表現 π_ℓ と π_r が与えられたとき，Γ の unitary 表現 $\tilde{\pi}$ を

$$\tilde{\pi}(\gamma)\xi = \pi_\ell(\gamma)\xi\pi_r(\gamma)^*, \quad \xi\in\mathcal{H},\ \gamma\in\Gamma$$

で定義すると、$\eta\in\mathcal{H}$ が $\tilde{\pi}(\gamma)\eta=\eta$ $\forall\gamma\in\Gamma$ ということと、$\pi_\ell(a)\eta=\eta\pi_r(a)$ $\forall a\in C^*(\Gamma)$ ということとが同値になる。つまり、Hilbert空間への群のunitary表現のfixed vectorは群環のその Hilbert 空間への左右からの表現の central vector として、見なすことが出来る。このことを頭において、C^*環に対する性質Tを次で定義する。以下、C^*環はすべて可分とする。

<u>定義</u> 単位元をもったC^*環Aが性質Tをもつとは、有限個の $a_1,\cdots,a_n\in A$ と $\varepsilon>0$ と $K>0$ が存在して、任意の対応（Aが非退化に両側から作用するHilbert空間）$\mathcal{H}$ に対して、単位vector $\xi\in\mathcal{H}$ が $\|a_i\xi-\xi a_i\|<\delta<\varepsilon$, $1\le i\le n$ を満たせば、$0\neq\eta\in\mathcal{H}$ が存在して、$a\eta=\eta a$ $\forall a\in A$ かつ $\|\eta-\xi\|<K\delta$ を満たす。

最初の $\xi\in\mathcal{H}$ と、central vector $\eta\in\mathcal{H}$ が満たすべき条件 $\|\eta-\xi\|<K\delta$ は、講演では触れなかったが、technical な面で必要なものである。

単位元のないC^*環に対しては、その単位添加したC^*環が、性質Tをもつことで定義しておく。

§4. 性質TをもつC^*環の基本的性質

我々が定義したC^*環の性質Tが，Kazhdanの性質Tをもつ離散群の自然な一般化であることは，次の定理から分る。

<u>定理1</u>. Γを可算離散群とする。このとき，次の3つは同値である。

(i) ΓはKazhdanの性質Tをもつ。

(ii) reduced群C^*環 $C^*_r(\Gamma)$が性質Tをもつ。

(iii) full群C^*環 $C^*(\Gamma)$が性質Tをもつ。

講演では，(ii)⇒(i)の際に，Γに少し条件が付くと言ったが，無条件で示せる。

また，C^*環の性質Tは，剰余，直和，tensor積，接合積や短完全列等の代数操作で閉じている。例えば，次のような命題が成り立つ。

<u>命題2</u> AとBが性質Tをもつことと直和$A\oplus B$が性質Tをもつこととは同値。

<u>命題3</u> AとBが性質Tをもてば，tensor積$A\otimes B$も性質Tをもつ。但し，C^*tensor normは何でも良い。

命題4. Aを性質TをもつC^*環，ΓをKazhdanの性質Tをもつ離散群とすると，(full, reduced共に)その接合積 $A \rtimes \Gamma$ は性質Tをもつ。

命題5. C^*環の短完全列 $0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$ において，IとA/Iが性質Tをもてば，Aも性質Tをもつ。

一般に群のKazhdanの性質Tが正規部分群に遺伝しないのと同様に，C^*環の性質Tもidealに遺伝しない例がある。しかし，次の場合は，命題5の逆が成り立つ。

命題6. IをAのidealでA/Iが有限次元とする。このとき，Aが性質Tをもてば，Iも性質Tをもつ。

§5. 性質TをもつC^*環の構造

我々が定義したC^*環の性質Tは，Kazhdanの性質Tをもつ離散群のC^*版である(定理1)。Ammableでかつ Kazhdanの性質Tをもつ離散群は有限群しかないので，性質TをもつNuclear C^*環は順当なら有限次元環に限ることが予想される。またNuclearでない性質TをもつC^*環は，Kazhdanの性質Tをもつ離散群の群C^*環に構造が近いと思われる。

そこで，まず性質Tをもつ Nuclear C^*環を考えてみる。
$\mathbb{K}(H)$で Hilbert 空間 H 上の compact 作用素の成す C^*環を表わすとする。

<u>補題7</u>. $\mathbb{K}(H)$が性質Tをもつことと $\dim H < \infty$ は同値である。

従って，行列環 M_n ($\forall n \in \mathbb{N}$) は性質Tをもつので，命題2と合わせて

<u>系8</u>. 有限次元 C^*環は性質Tをもつ。

また可換 C^*環については

<u>補題9</u>. 可換 C^*環が性質Tをもてば，有限次元である。

これらの補題と§4で述べた命題を基礎にして，次の定理が証明できる。

<u>定理10</u>. 性質Tをもつ Nuclear C^*環において，次が示せる。

$$\begin{array}{ccc} \text{Type I } C^*\text{環} & \Rightarrow & \text{AF環} \\ \Uparrow & & \Downarrow \\ \text{有限次元 } C^*\text{環} & \Leftarrow & \text{忠実な tracial state がある } C^*\text{環} \end{array}$$
。

つまり，I型環かAF環，もしくは忠実なtracial stateがあるNuclear環は性質Tをもてば，有限次元になる。

また，C^*環Aに忠実な下半連続trace τで $n_\tau=\{x\in A \mid \tau(x^*x)<\infty\}$ がAでdenseなものがあるとき，Aを半有限と呼ぶことにすると，次が示せる。

<u>定理11</u>．半有限なNuclear C^*環が性質Tをもてば有限次元である。

特に，連結Lie群の群環は，群の性質によらず，どのような群でもNuclear環で半有限であるので，性質Tをもたない。

I型環，AF環，半有限環は単位元をもてば，いずれもtracial stateをもつ。そこで，単位元をもち，tracial stateをもたないC^*環において，性質Tを考えると，その場合は，Nuclearでない場合も含めて，次を得る．

<u>定理12</u>．単位元をもち，tracial stateをもたないC^*環は性質Tをもつ。例としては，Cuntz環やCuntz環⊗(unital C^*環)。

tracial stateをもたないC^*環は，本来なら tracial stateから作れる"良い"対応が存在しない。そう言う意味では離散群の群

環とは掛け離れた位置にある。 定理12は，このような群環とは全く異質のC^*環においては，有限次元環を除き，Nuclearityと正反対の性質であるはずの，性質Tに病理的な現象が生じていることを示している。

最後に，Nuclear環はdual Banach bimoduleへのderivationがinnerであることによっても特徴づけることが出来る。 性質TをもつC^*環においても，これに対応する結果を得ることが出来ることを付記しておく。

References

[1] A. Connes: A factor of type II_1 with countable fundamental group, J. Operator Theory, 4(1980), 151-153.

[2] A. Connes and V. Jones: Property T for von Neumann algebras, Bull. London Math. Soc., 17(1985), 57-62.

[3] D. Kazhdan: Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups, Funct. Anal. Appl., 1(1967), 63-65.

[4] G. Skandalis: Une Notion de Nucléarité en K-Théorie, K-Theory 1(1988), 549-574.

[5] P. S. Wang: On isolated points in the dual space of locally compact groups, Math. Ann., 218(1975), 19-34.