数理解析研究所講究録
第 688 巻 1989 年 45-55

スペクトル写像定理と作用素分解

山形大・工　髙橋眞映　(Sin-Ei Takahasi)

1。序論。我々の目的は Banach モジュール上の分解可能な(有界線形)作用素と、ある種のスペクトル写像定理を満たす作用素を調査する事である。測度代数上のある種の Banach モジュールに関して A. Connes [4], D'Antonio-Longo-Zsido [1] 等はある種のスペクトル写像定理を満たす作用素を調査した。またこの結果を用いて、J. Eschmeier [7] はその上の分解可能な作用素の族を調べた。我々は彼らとは全く違った観点から作用素の分解可能性とスペクトル写像定理を独立に考察する。特に J. Eschmeier の得た分解可能な作用素の族よりもっと広い族を与える。またコンパクト可換群に限れば D'Antonio-Longo-Zido の得たスペクトル写像定理を満たす作用素の族以外にもそれを満たすもののある事を示す。

2。スペクトル写像定理。A を半単純可換 Banach 代数とし、そのキャリア空間を Φ_A とする。M(A) を A の乗作用素代数、$\Phi_{M(A)}$ をそのキャリア空間、X をユニタル Banach M(A)-モジュール、対応する M(A) の表現を π とする。この時 A は次のモジュール積で Banach A-モジュールとなる:

$$ax = \lambda_a x \quad (a \in A,\ x \in X).$$

ここで λ_a は a による積作用素を表す。π_A を対応する A の表現とする。次に W. Arveson [3] に習って次の様なスペクトルを導入する:

$$sp(\pi_A) = hul(Ker\,\pi_A)$$
$$sp_{\pi_A}(x) = hul(ker\ x),\ \text{where}\ x \in X\ \text{and}\ ker\ x = \{a \in A : ax = 0\}.$$

次の事に注意しておこう。A の閉イデアル $Ker\,\pi_A$ と M(A) の閉イデアル $Ker\,\pi$ に関して、$M(A)/Ker\,\pi$ から $M(A/Ker\,\pi_A)$ への自然な写像 T_π が存在する。

この時、T_π が単射である事と「$\pi(\mu)|AX = \{0\} \Rightarrow \pi(\mu) = 0$」と同値である。従って X が Banach A-モジュールとして本質的であれば T_π は単射となる。更に「$\pi(\mu)|AX = \{0\} \Rightarrow \pi(\mu) = 0$」は X が順序を持たない(without order) A-モジュールである事にも同値である。また T_π が全射である事と $A/\mathrm{Ker}\,\pi_A$ 上の乗作用素は全て A 上のある乗作用素に持ち上げる事が出来る事とは同値である。特に T_π の全射性については次の様な結果を持つ(BSE代数については[10][11]参照)。

命題1。もし A が離散キャリア空間を持つBSE代数であれば、任意の閉イデアル I に対して、その商代数 A/I 上のすべての乗作用素は A まで持ち上げる事が出来る。

さて $\mu \in M(A)$ の Gelfand 変換を $\mu^\vee$ で表し、その Φ_A への制限を $\mu^\wedge$ とする。この時次の様なスペクトル写像定理を得る。

定理2。μ を M(A) の元で、μ を含む M(A) の正則な閉部分代数が存在すると仮定する。この時、もし T_π が全単射であれば、次のスペクトル写像定理が成り立つ:

$$\sigma(\pi(\mu)) = \overline{\mu^\wedge(sp(\pi_A))}\ .$$

具体的な代数で上の定理を考察してみる。

(1)H をヒルベルト空間、T をその上の任意の正規作用素、A を T の生成する可換C*ー代数とする。X を $\{a\xi : a \in A,\ \xi \in H\}$ の生成する H の閉部分空間とする。任意の $\mu \in M(A)$ に対して、

$$\pi(\mu) = \text{weak-lim}\ \mu(e_n)$$

と定義する。ここで $\{e_n\}$ は A の有界近似単位元であり、上の極限に関しては、必要なら部分ネットをとる。この定義は well-defined であり、π は M(A) の X 上への表現になっている事に注意する。特に $\pi_A(a) = a\ (a \in A)$ となっている。さて A と $C_0(\sigma_{B(X)}(T)\setminus\{0\})$, M(A) と $C^b(\sigma_{B(X)}(T)\setminus\{0\})$ をそれぞれ同一視する。$\mu \in M(A)$ に対応する $C^b(\sigma_{B(X)}(T)\setminus\{0\})$ の函数を f で表し、$\pi(\mu)$ を f(T) で表す事にする。M(A) は勿論正則であり、T_π は全単射である。(一般に $C_0(\Omega)$ (Ω : locally compact Hausdorff space) の任意の商代数のど

んな乗作用素も $C_0(\Omega)$ まで持ち上げられる事と Ω が正規である事と同値である事に注意して置く。）従って、この例では上の定理のすべての仮定を満たすので同定理から

$$\sigma(\pi(\mu)) = \overline{\mu\hat{\ }(sp(\pi_A))}$$

である。しかしこれは上の言葉で表せば、

$$\sigma(f(T)) = \overline{f(\sigma_{B(X)}(T)\setminus\{0\})}$$

となる。ところで $\sigma(T)\setminus\{0\} = \sigma_{B(X)}(T)\setminus\{0\}$ に注意すれば結局定理は

$$\sigma(f(T)) = \overline{f(\sigma(T)\setminus\{0\})}$$

を述べている事になり、通常のスペクトル写像定理を述べている事になる。

（２）今 G を局所コンパクト可換群とし、その上の群代数 $L^1(G)$ を考えると、その乗作用素代数は G の測度代数 $M(G)$ となっている。U を Banach 空間 X 上に作用する G の等距離型弱連続表現、つまり次の条件を満たす G から $B(X)$ への写像とする：

(i) $U(s+t) = U(s)U(t)$ for all $s, t \in G$, $U(0) = I$,

(ii) $\|U(t)x\| = \|x\|$ for $t \in G$, $x \in X$,

(iii) $G \to X$; $t \to U(t)x$ is weakly continuous for each $x \in X$.

ここで $B(X)$ は X 上の有界線形作用素全体の為す Banach 代数を表す。この時連続な代数同型

$$\pi : M(G) \to B(X)\ ;\ \pi(\mu) = \int_G U(t)d\mu(t)$$

を得る（［１］,［７］参照）。$\pi(\mu)$ は μ による一般合成積作用素と呼ばれる。また π によって X はユニタル Banach $M(G)$-モジュールをつくる。特に X は順序を持たない A-モジュールとなっている。また U の（Arveson）スペクトラムは次の様に定義される。

$$sp(U) = \cap\{zero(f\hat{\ }) : f \in Ker(\pi|L^1(G))\}$$

この時、$sp(U) = sp(\pi_A)$, $A = L^1(G)$ である事に注意する。

次に $T(G)$ を G 上の局所コンパクト群位相でオリジナル位相かそれより強い

もの全体とする。各 $\tau \in T(G)$ に対して、$M(G,\tau)$ を $M(G)$ の閉部分代数と同一視する事が出来（［8］参照）、従って $\widetilde{L^1}(G,\tau)$ を測度代数 $M(G,\tau)$ の中の $L^1(G,\tau)$ の kernel-hull とすれば、これは $M(G)$ の閉部分代数と見る事が出来る。もし G がコンパクト群であれば、$L^1(G)$ は離散双対群を持つＢＳＥ代数であり、上の $\widetilde{L^1}(G,\tau)$ は常に正則であるから、次の結果を得る。

系３。G がコンパクト群であれば、任意の $\mu \in \widetilde{L^1}(G,\tau)$, $\tau \in T(G)$ に対して、

$$\sigma(\pi(\mu)) = \overline{\hat{\mu}(\mathrm{sp}\ U)}$$

が成り立つ。

特に μ が離散測度かまたは $L^1(G)$ に属せば、上式が成り立つ。

しかしながら今の所、$L^1(G) + M_d(G)$ が正則かどうか不明の為、それに属する測度がスペクトル写像定理つまり上式を満たす事（D'Antonio-Longo-Zido の結果）をこの方法で確認する事が出来ない。ここで $M_d(G)$ は G 上の離散測度全体を表す。 更に一般の局所コンパクト群についても、上の T_π の全射性が不明の為、D'Antonio-Longo-Zido のスペクトル写像定理［１］：

$$\sigma(\pi(\mu)) = \overline{\hat{\mu}(\mathrm{sp}\ U)} \quad \text{for all } \mu \in L^1(G) + M_d(G)$$

の拡張にまで至る事が出来ない。

定理２の略証。先ず次の補題を置く。

補題４。A を単位元を持つ正則な半単純可換 Banach 代数、B を単位元を持つ可換 Banach 代数、τ を単位元を単位元に移す A から B の中への代数同型写像とすると、その双対写像 τ^* に対して、$\tau^*(\Phi_B) = \Phi_A$ である。

これは［13, Theorem 3.7.5］の単位元を持つ場合に対する結果であり、証明はそれに習う。これから直ちに次の系を得る。

系５。A を単位元を持つ正則な半単純可換 Banach 代数、B を単位元を持つ Banach 代数、τ を単位元を単位元に移す A から B の中への代数同型写像とする。この時、全ての $a \in A$ に対して、$\sigma_A(a) = \sigma_B(\tau a)$ である。

ここで $\sigma_A(a)$ は a の代数 A でのスペクトラムを表す。さて $\mu \in M(A)$ とし、μ を含む M(A) の正則な部分代数 R が存在するとしよう。この時 R は M(A) の単位元を含むとしても一般性を失わない。従って系5から

$$\sigma(\pi(\mu)) = \sigma_{R/(R \cap \mathrm{Ker}\pi)}(\mu + R \cap \mathrm{Ker}\pi)$$
$$= \sigma_{M(A)/\mathrm{Ker}\pi}(\mu + \mathrm{Ker}\pi)$$
$$= \{\mu^\vee(\varphi) : \varphi \in \Phi_{M(A)},\ \mathrm{Ker}\pi \subset \mathrm{Ker}\,\varphi\}$$

が成り立つ。一方

$$\mu\hat{\ }(\mathrm{sp}\pi_A) = \{\mu^\vee(\varphi) : \varphi \in \Phi_{M(A)},\ \varphi\cdot\lambda \neq 0,\ \mathrm{Ker}\pi \subset \mathrm{Ker}\,\varphi\}$$

注意すれば、$\sigma(\pi(\mu)) \supset \overline{\mu\hat{\ }(\mathrm{sp}(\pi_A))}$ を得る。

今記号の便利さの為、任意の代数 A に対して、$\lambda_A(a)b = ab$ $(b \in A)$ と書く事にする。従って λ_A は A から M(A) への準同形写像となっている。

さて、$\sigma(\pi(\mu)) \subset \overline{\mu\hat{\ }(\mathrm{sp}(\pi_A))}$ を示す為、$\alpha \in \sigma(\pi(\mu))$ を任意に選ぶ。従って上式より、

$$\exists \varphi \in \Phi_{M(A)} : \alpha = \mu^\vee(\varphi),\quad \mathrm{Ker}\pi \subset \mathrm{Ker}\varphi$$

である。従って、

$$\varphi'(\nu + \mathrm{Ker}\pi) = \varphi(\nu) \quad (\nu \in M(A))$$

と定義して、$\varphi' \in \Phi_{M(A)/\mathrm{Ker}\pi}$ となっている。そこで仮定 $T_\pi : M(A)/\mathrm{Ker}\pi \to M(A/\mathrm{Ker}\pi_A)$ が全単射であると言う事から、

$$\exists \phi \in \Phi_{M(A/\mathrm{Ker}\pi_A)} : \varphi' = (T_\pi)^*\phi$$

である。ここで $(T_\pi)^*$ は T_π の双対写像を表す。従って次の様な性質を持つ $\Phi_{M(A/\mathrm{Ker}\pi_A)}$ の中のネット $\{\phi_\gamma\}$ が存在する：

$$\phi_\gamma\cdot\lambda_{A/\mathrm{Ker}\pi_A} \neq 0\ (\forall\gamma),\ \lim \phi_\gamma = \phi \text{ in the hull-kernel topology.}$$

従って、$\phi_\gamma\cdot\lambda_{A/\mathrm{Ker}\pi_A} \in \Phi_{A/\mathrm{Ker}\pi_A}$ であるから、$\xi_\gamma \in \Phi_A$ が存在して $\mathrm{Ker}\pi_A \subset \mathrm{Ker}\xi_\gamma$, $\xi_\gamma' = \phi_\gamma\cdot\lambda_{A/\mathrm{Ker}\pi_A}$ である。ここで $\xi_\gamma'(a + \mathrm{Ker}\pi_A) = \xi_\gamma(a)$ $(a \in A)$ を表す。従って、$\varphi_\gamma\cdot\lambda_A = \xi_\gamma$ となる $\varphi_\gamma \in \Phi_{M(A)}$ が存在する。この時 $\varphi_\gamma' = (T_\pi)^*\phi_\gamma$ である。実際 $\nu \in M(A)$ とする。今

$$\phi_\gamma\cdot\lambda_{A/\mathrm{Ker}\,\pi_A}(a_\gamma+\mathrm{Ker}\,\pi_A)=1$$

なる $a_\gamma\in A$ を一つ選ぶ。従って

$$\begin{aligned}((T_\pi)^*\phi_\gamma)(\nu+\mathrm{Ker}\,\pi) &= \phi_\gamma(\lambda_{A/\mathrm{Ker}\,\pi_A}(\nu a_\gamma+\mathrm{Ker}\,\pi_A))\\ &= \xi_\gamma'(\nu a_\gamma+\mathrm{Ker}\,\pi_A))\\ &= \xi_\gamma(\nu a_\gamma)\\ &= \varphi_\gamma\cdot\lambda_A(\nu a_\gamma)\\ &= \varphi_\gamma(\nu)(\varphi_\gamma\cdot\lambda_A)(a_\gamma)\\ &= \varphi_\gamma(\nu)\xi_\gamma(a_\gamma)\\ &= \varphi_\gamma(\nu)\xi_\gamma'(a_\gamma+\mathrm{Ker}\,\pi_A)\\ &= \varphi_\gamma(\nu)(\phi_\gamma\cdot\lambda_{A/\mathrm{Ker}\,\pi_A})(a_\gamma+\mathrm{Ker}\,\pi_A)\\ &= \varphi_\gamma(\nu)\\ &= \varphi_\gamma'(\nu+\mathrm{Ker}\,\pi_A)\end{aligned}$$

であるから $\varphi_\gamma'=(T_\pi)^*\phi_\gamma$ が示された。勿論 $(T_\pi)^*|\Phi_{M(A/\mathrm{Ker}\,\pi_A)}$ は hull-kernel 位相で連続であるから、

$$\text{hk-lim}\ \varphi_\gamma'=\text{hk-lim}\ (T_\pi)^*\phi_\gamma=(T_\pi)^*\phi=\varphi'$$

それ故、hk-lim $\varphi_\gamma=\varphi$ となる。ここで hk-lim は hull-kernel 位相での極限を表す。従って $\mu^\vee$ の hull-kernel 連続性から

$$\lim\ \mu^\vee(\varphi_\gamma)=\mu^\vee(\varphi)=\alpha$$

を得る。しかし勿論 $\varphi_\gamma\cdot\lambda_A\neq 0$ でかつ $\mathrm{Ker}\,\pi_A\subset\mathrm{Ker}\,\xi_\gamma=\mathrm{Ker}(\varphi_\gamma\cdot\lambda_A)$ であるから $\varphi_\gamma\cdot\lambda_A$ と φ_γ を同一視して、$\varphi_\gamma\in sp(\pi_A)$, $\mu^\wedge(\varphi_\gamma)=\mu^\vee(\varphi_\gamma)$ と考えているから、$\alpha\in\overline{\mu^\wedge(sp(\pi_A))}$ が導かれる。

3。作用素分解。X を Banach 空間とする時、 X 上の有界線形作用素 T が次の条件を満たす時、分解可能であると言う：$\sigma(T)$ の有限開被覆 $\{G_1,\ldots,G_n\}$ に対して、常に T のスペクトル極大空間の系 $\{X_1,\ldots,X_n\}$ が存在して、$X=X_1+\ldots+X_n$, $\sigma(T|X_i)\subset G_i$ $(i=1,\ldots,n)$ である。また T をそのどんなスペクトル極大空間に制限しても分解可能である時、T は強分解可能であると言う。

この節では X が Banach モジュールである時、そのモジュール積作用素の分解可能性について調査する。その為に２節での記号と概念を保存しよう。この節での主定理は次の様なものである。

定理 6。＃「$sp_{\pi_A}(x) = \phi \Rightarrow x = 0$」を仮定する。この時、$\mu^{\vee}$ が hull-kernel 位相で連続である様な任意の $\mu \in M(A)$ に対して、$\pi(\mu)$ は強分解可能である。

具体的な例について上の定理を考察して見よう。以下の例については勿論定理の仮定が満たされている事に注意する。

（１）X をＣ*－代数、 Prim X をその原始イデアル空間、A を Prim X 上の有界複素数値連続函数のつくる可換Ｃ*－代数とすると、Dauns-Hofmann の定理［６］から X は自然な Banach A-モジュールをつくる。この時主定理から全てのモジュール積作用素は強分解可能である。

（２）H をヒルベルト空間、 T をその上の任意の正規作用素、A を T と恒等作用素で生成される可換Ｃ*－代数とすると H はユニタル Banach A-モジュールと考える事が出来る。従って主定理から、T は H 上の強分解可能な作用素となる。

（３）X をＣ*－代数、a を X の正規元、A を a の生成する可換Ｃ*－代数に単位元を添加したものとすると、X は自然に ユニタル Banach A-モジュールとなる為、主定理から、a による左右の積作用素は強分解可能である。

（４）G を局所コンパクト可換群、 T(G) を G 上の局所コンパクト群位相でオリジナル位相かそれより強いもの全体とする。各 $\tau \in T(G)$ に対して、２節で述べた様に、$M(G,\tau)$ を $M(G)$ の閉部分代数と同一視する事が出来ので、$\widetilde{L^1}(G,\tau)$ を $M(G,\tau)$ の中の $L^1(G,\tau)$ の kernel-hull とし、$\widetilde{L^*}(G)$ を $\{\widetilde{L^1}(G,\tau) : \tau \in T(G)\}$ によって生成された $M(G)$ の閉部分代数とする。この時［12, Lemma 8］から、任意の $\mu \in \widetilde{L^*}(G)$ に対して、$\mu^{\vee}$ が hull-kernel 位相で連続であるから、μ による一般合成積作用素 $\pi(\mu)$ は強分解可能である。特に、その連続部分が絶対連続である様な測度による一般合成積作用素は強分解

可能であると言う J. Eschmeier［7］の結果はこの特別な場合となる。

定理6の略証。 $\mu \in M(A)$ とする。複素数体を $\mathbb{C}$ によって表し、その任意の閉部分集合 F に対して、

$$X_\mu(F) = \{ x \in X : sp_{\pi_A}(x) \subset (\mu\hat{\ })^{-1}(F)\}$$

と定義する。この時 $X_\mu(F)$ は X の M(A)-サブモジュールとなる。次に補題を用意する。

補題7。 $\nu \in M(A)$, $x \in X$ に対して、 $sp_{\pi_A}(\nu x) \subset supp(\nu\hat{\ }) \cap sp_{\pi_A}(x)$ である。但し、$supp(\nu\hat{\ })$ は $\{\varphi \in \Phi_A : \nu\hat{\ }(\varphi) \neq 0\}$ の hull-kernel 閉包を表す。

補題8。条件#を仮定する。$x \in X$, $\nu \in M(A)$ とする。もし $sp_{\pi_A}(x)$ のある hull-kernel 開近傍 U に対して、$\nu\hat{\ }|U = 0$ であれば、$\nu x = 0$ である。

$\mu\hat{\ }$ の Φ_A 上での hull-kernel 連続性と補題7と条件#を用いると、$X_\mu(F)$ の閉性を示す事が出来、従って $X_\mu(F)$ は X の Banach M(A)-サブモジュールとなる。勿論 X の Banach A-サブモジュールでもある。そこで π の部分表現 $\pi|X_\mu(F)$ を考えると、

$$(\pi|X_\mu(F))_A = \pi_A|X_\mu(F)$$

である為、$sp(\pi_A|X_\mu(F))$ が上と同様に定義される。この時

（イ） $sp(\pi_A|X_\mu(F)) \subset \mu\hat{\ }^{-1}(F)$ for all F closed in $\mathbb{C}$.

実際、$\varphi \in sp(\pi_A|X_\mu(F))$ とする。今 $\varphi \in \mu\hat{\ }^{-1}(\mathbb{C}\setminus F)$ と仮定すると、$\mu\hat{\ }(\varphi) \in G \subset G^- \subset \mathbb{C}\setminus F$ なる$\mathbb{C}$の開集合 G を選んでくる事が出来る。従って、$a \in A$ が存在して、$a\hat{\ }(\varphi) \neq 0$, $a\hat{\ }|\mu\hat{\ }^{-1}(\mathbb{C}\setminus G) = 0$ である。この時補題7から $supp(a\hat{\ }) \cap \mu\hat{\ }^{-1}(F) = \phi$ を示す事が出来る。従って、任意の $x \in X_\mu(F)$ に対して、$sp_{\pi_A}(ax) = \phi$、それ故#より $ax = 0$. この事は $a \in Ker(\pi_A|X_\mu(F))$ を意味するから、$Ker(\pi_A|X_\mu(F)) \subset Ker\ \varphi$ である事を考えれば、$a\hat{\ }(\varphi) = 0$ となり、矛盾を生じる。

（ロ） $\sigma(\pi(\mu)|X_\mu(F)) \subset \overline{\mu\hat{\ }(sp(\pi_A|X_\mu(F)))}$ for all F closed in $\mathbb{C}$.

実際、$\alpha \in \mathbb{C}\setminus \overline{\mu\hat{\ }(sp(\pi_A|X_\mu(F)))}$ とする。今

$$\delta = \inf\{|\alpha - \mu^{\wedge}(\varphi)| : \varphi \in sp(\pi_A|X_\mu(F))\}$$

と置くと、$\delta > 0$ となる。そこで、

$$K = \{\varphi \in \Phi_{M(A)} : |\alpha - \mu^{\vee}(\varphi)| \geq \delta / 2\}$$

と置くと、K は hull-kernel 位相で閉となる。更に $\Phi_A \cap K$ は $sp(\pi_A|X_\mu(F))$ の hull-kernel 位相での近傍である事に注意する。さて [13, Theorem 3.6.15] より $(\alpha - \mu^{\vee})\nu^{\vee}|K = 1$ となる $\nu \in M(A)$ が存在する。そこで $y \in X_\mu(F)$ を任意に固定する。この時 $sp_{\pi_A}(y) \subset sp(\pi_A|X_\mu(F))$ であるから、$sp_{\pi_A}(y) \subset \Phi_A \cap K$ となりしかも、$((\alpha I - \mu)\nu - I)^{\wedge}|\Phi_A \cap K = 1$ (I : identity of M(A)) であるから、補題8より $((\alpha - \mu)\nu - I)y = 0$. 従って、

$$((\alpha I - \pi(\mu))\pi(\nu)|X_\mu(F) = I|X_\mu(F)$$

となり、これは α が $\sigma(\pi(\mu)|X_\mu(F))$ に属さない事を示している。

（ハ）　$\sigma(\pi(\mu)|X_\mu(F)) \subset F$ for all F closed in $\mathbb{C}$.

実際、（イ）と（ロ）から直ちに導かれる。

さてこの（ハ）から $\pi(\mu)$ が先ず分解可能である事を示そう。$G^- \subset H$ となる $\mathbb{C}$ の開円盤 G, H を任意に選んで固定しよう。次に $G^- \subset U \subset U^- \subset H$ なる開円盤 U をとる。従って $\mu^{\vee}$ の hull-kernel 連続性から $\mu^{\vee-1}(G^-)$, $\mu^{\vee-1}(U)$ は互いに素な $\Phi_{M(A)}$ の hull であるから [13, Corollary 3.6.10] より

$$\exists \nu \in M(A) : \nu^{\vee}|\mu^{\vee-1}(G^-) = 1,\ \nu^{\vee}|\mu^{\vee-1}(\mathbb{C}\setminus U) = 0$$

である。そこで

$$F_1 = \overline{\mu^{\vee}(\mu^{\vee-1}(\mathbb{C}\setminus G^-))},\quad F_2 = \overline{\mu^{\vee}(\Phi_{M(A)}\setminus zero(\nu^{\vee}))}$$

と置く。但し $zero(\nu^{\vee}) = \{\varphi \in \Phi_{M(A)} : \nu^{\vee}(\varphi) = 0\}$. この時　$F_1 \subset \mathbb{C}\setminus G$, $F_2 \subset H$ に注意する。そこで $X_G = X_\mu(F_1)$, $X_H = X_\mu(F_2)$ と置くと、（ハ）より

$$\sigma(\pi(\mu)|X_G) \subset \mathbb{C}\setminus G,\quad \sigma(\pi(\mu)|X_H) \subset H$$

を得る。従って、もし $X = X_G + X_H$ が示されれば、勿論 X_G, X_H は X の閉 $\pi(\mu)$-不変部分空間であるから、[9, Theorem 2.3] から $\pi(\mu)$ の分解可能性が導かれる。そこで $X = X_G + X_H$ を示す為、$x \in X$ としよう。

$$x_G = x - \nu x,\quad x_H = \nu x$$

と置けば、勿論 $x = x_G + x_H$ である。そこで先ず、$x_G \in X_G$ を示す。その為に $b \in \ker(\mu^{\wedge-1}(F_1))$ を任意に選ぼう。F_1 の定義から　$\mu^{\wedge-1}(\mathbb{C}\setminus G^-) \subset$

$\mu^{\wedge-1}(F_1)$ であるから $(b-\nu b)^{\wedge}|\mu^{\wedge-1}(\mathbb{C}\setminus G^{-})=0$ を得る。一方、$(b-\nu b)^{\wedge}|\mu^{\wedge-1}(G^{-})=0$ に注意して、$(b-\nu b)^{\wedge}=0$, つまり $b=\nu b$ を得る。従って、$b\in\ker(x_G)$ となり、 $\ker(\mu^{\wedge-1}(F_1))\subset\ker(x_G)$ を得る。両辺の hul をとって、$\mathrm{sp}_{\pi_A}(x_G)\subset\mu^{\wedge-1}(F_1)$, つまり $x_G\in X_G$ である。次に $x_H\in X_H$ を示す。その為に $c\in\ker(\mu^{\wedge-1}(F_2))$ を任意に選ぼう。従って $(\nu c)^{\wedge}|\mu^{\wedge-1}(F_2)=0$ である。一方 F_2 の定義から $\mu^{\vee-1}(\mathbb{C}\setminus F_2)\subset\mathrm{zero}(\nu^{\vee})$ であるから $(\nu c)^{\wedge}|\mu^{\wedge-1}(\mathbb{C}\setminus F_2)=0$、従って $(\nu c)^{\wedge}=0$, つまり $\nu c=0$ を得る。従って、$c\in\ker(x_H)$ となり、$\ker(\mu^{\wedge-1}(F_2))\subset\ker(x_H)$ を得る。両辺の hul をとって、$\mathrm{sp}_{\pi_A}(x_H)\subset\mu^{\wedge-1}(F_2)$, つまり $x_H\in X_H$ である。

最後に $\pi(\mu)$ が強分解可能である事を示す。Y を $\pi(\mu)$ スペクトル極大空間とする。この時、Y は [5, Proposition 1.3.2] から超不変であるから、X の Banach M(A)-サブモジュールとなっている。そこで π の代わりに、その部分表現 $\pi|Y$ を上の議論に適用して、$\pi(\mu)|Y$ がまた分解可能となる。それ故 [2, Theorem 1.7] から $\pi(\mu)$ の強分解可能性が導かれる。

参考文献

1. C. D'Antoni, R. Longo and L. Zsido, A spectral mapping theorem for locally compact groups of operators, Pacific J. Math., 103(1981), 17-24
2. C. Apostol, Restrictions and quotients of decomposable operators in a Banach space, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 13(1968), 147-150.
3. W. Arveson, On groups of automorphisms of operator algebras, J. Functional Analysis, 15(1974), 217-243.
4. A. Connes, Une classification des facteurs de tipe Ⅲ, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 6(1973), 133.
5. I. Colojoara and C. Foias, Theory of generalized spectral operators, Gordon and Breach, New York, 1968.
6. J. Dauns and K. H. Hofmann, Representations of rings by section, Mem. Amer. Math. Soc., 83(1968).

7. J. Eschmeier, Operator decomposability and weakly contionus representations of locally compact abelian groups, J. Operator Theory, 7(1982), 201-208.

8. J. Inoue, Some closed subalgebras of measure algebras and a generalization of P. J. Cohen's theorem, J. Math. Soc. Japan, 23(1971), 278-294

9. R. Lange and S. Wang, New criteria for a decomposable operator, Illinois J. Math., 31(1987), 438-445.

10. S.-E. Takahasi and O. Hatori, Commutative Banach algebras which satisfy Bochner-Schoenberg-Eberlein type theorem, preprint.

11. 髙橋眞映、バナッハモジュール上の乗作用素のＢＳＥ型特徴付け、数理解析研究所講究録、674(1988), 1-9.

12. S.-E. Takahasi, Decomposability of multipliers on Banach algebras, 数理解析研究所講究録、近刊。

13. C. E. Rickart, General Theory of Banach Algebras, D. Van Nostrand, Princeton, N. J., 1960.