数理解析研究所講究録
第688巻 1989年 56-63


# エルゴード変換と指数理論

九大教養　浜地敏弘　(Toshihiro Hamachi)

III型のAF因子環の分類は、

III型AF因子環 M

1対1　　　1対1

III型エルゴード非特異変換Tの軌道同型類 $\xleftrightarrow{1対1}$ Flowの同型類 $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$

によって、完全に決定されることが知られている。

では部分因子環 $N\subset M$ の分類について、flowレベルとorbit equivalenceのレベルでは、各々何が起きるだろうか？

$N \subset M$

?　　　　?

(orbit equivalence)　　　(flow)

flowレベルについては、幸崎氏の報告を見て貰うことにして、ここではorbit equivalenceのレベルについて報告する。なおこれは、幸崎氏との共同の仕事で論文は現在タイプ中である。

## §1 Orbital factor map.

異なる測度空間に作用しているエルゴード非特異可算変換群の対に対して、一方から他方への埋め込みなるものを旨く定義することにより、factor M, subfactor $N \subset M$ を作ることが出来る。

定義を述べる前に例を知っておいた方が、理解の手助けになるので2つ例を紹介する。

Ex.1 $0 < \lambda < 1$ 。

$$(X, \mathbb{B}_X, \mu_X) = \prod_{i=1}^{\infty} (\{0,1\}, \mathbb{B}(\{0,1\}), m_\lambda)$$

$$(Y, \mathbb{B}_Y, \mu_Y) = \prod_{i=2}^{\infty} (\{0,1\}, \mathbb{B}(\{0,1\}), m_\lambda)$$

$$m_\lambda(0) = 1/(1+\lambda), \quad m_\lambda(1) = \lambda/(1+\lambda)$$

$$\pi : (\omega_1, \omega_2, \cdots) \in X \longmapsto (\omega_2, \omega_3, \cdots) \in Y$$

$$\mathbb{F} = \pi^{-1}(\mathbb{B}_Y)$$

とおく。

$$g_{i,j}(\omega_1, \cdots, \omega_i, \cdots, \omega_j, \cdots) = (\omega_1, \cdots \omega_j, \cdots \omega_i, \cdots) \quad i, j \geq 1$$

$$h_{i,j}(\omega_2, \cdots, \omega_i, \cdots, \omega_j, \cdots) = (\omega_2, \cdots \omega_j, \cdots \omega_i, \cdots) \quad i, j \geq 2$$

とする。

・$G_X = g_{i,j}$, $i, j \geq 1$, より生成される群.

$\mathcal{G} = g_{i,j}$ , $i, j \geqq 2$ , より生成される群

$G_Y = h_{i,j}$ , $i, j \geqq 2$ , より生成される群.

Ex. 2. $0 < \lambda < 1$ 。

$$(Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y) = \prod_{i=1}^{\infty} (\{0,1\}, \mathcal{B}(\{0,1\}), m_\lambda)$$

$$(X, \mathcal{B}_X, \mu_X) = (Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y) \times (\{0,1\}, \mathcal{B}(\{0,1\}), m)$$

$$m(0) = m(1) = 1/2 .$$

$$m_\lambda(0) = 1/(1+\lambda) , \quad m_\lambda(1) = \lambda/(1+\lambda)$$

$$T(y_1, y_2, \cdots) = (y_1, y_2 \cdots) + (1, 0, 0, \cdots)$$ (右へ繰り上がり)

$$\forall (y_1, y_2, \cdots) \in Y.$$

$$\hat{T}(y, \varepsilon) = (Ty, \ \varepsilon + n(T, y) \pmod 2)$$

$$, \forall (y, \varepsilon) \in X,$$

ここで $\dfrac{d\mu_Y T}{d\mu_Y}(y) = \lambda^{n(T,y)}$

$$\pi(y, \varepsilon) = y$$

$$\mathbb{F} = \pi^{-1}(\mathcal{B}_Y)$$

$$G_X = \mathcal{G} = \{\hat{T}^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

$$G_Y = \{T^n ; n \in \mathbb{Z}\} 。$$

さて、以上の例を念頭に置いて、今 $G_X$, $G_Y$ をルベーグ空間 $(X, \mathcal{B}_X, \mu_X)$, $(Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y)$ に作用する可算エルゴード非特異変換群とする。

定義　有限対1の可測写像 $\pi : X \longmapsto Y$ に対して次の5条件を満たす部分群 $\mathcal{G} \subset [G_X]$ （$G_X$の充足群）が存在する時、$\pi$ を orbital factor map と言う。

(a)　$Orb_{\mathcal{G}}(x) \cap \pi^{-1}(\pi(x)) = \{x\}$，　$\forall x \in X$

(b)　$\mu_X(\pi^{-1}(E)) = \mu_Y(E)$，　$\forall E \in \mathcal{B}_Y$

(c)　$g(\pi^{-1}(\mathcal{B}_Y)) = \pi^{-1}(\mathcal{B}_Y)$，　$\forall g \in \mathcal{G}$

(d)　$\pi^{-1}(\mathcal{B}_Y)$ によって $X$ の quotient space $X_\zeta$ を作り、$\mathcal{G}$ の $X_\zeta$ への作用を $\mathcal{G}_\zeta$ と書くと、$\mathcal{G}_\zeta$ は $G_Y$ と $\pi$ の下で orbit equivalent になる。

(e)　$\dfrac{d\mu_X g}{d\mu_X}$ は $\pi^{-1}(\mathcal{B}_Y)$－可測，$\forall g \in \mathcal{G}$。

EX.1，2の例がこれらの条件を満たしていることを check されたい。

なお条件（e）は、条件付確率の言葉で次のように言い換えることが出来る。（$P_y(\cdot))_{y \in Y}$ を測度の標準系，即ち、

$$\mu_X(E \cap \pi^{-1}(F)) = \int_F P_y(E)\, d\mu_Y(y),$$
$$\forall E \in \mathcal{B}_X,\ \forall F \in \mathcal{B}_Y$$

とすると、条件（e）は条件

(e)′　$P_{\pi(x)}(u) = P_{\pi(g^{-1}x)}(g^{-1}u)$，　a.e. $x \in \underbrace{X,\ \forall g \in \mathcal{G}}^{\forall u : \pi(u) = \pi(x)}$

と同値である。

## §2 orbital factor maps と Krieger factor

$\mathcal{R}_X$ を同値関係.

$$u \overset{\mathcal{R}_X}{\sim} v \rightleftarrows u \in Orb_{G_X}(v)$$

とする。同様に $\mathcal{R}_Y$ を $G_Y$ から走する同値関係とする。

$\mathcal{R}_X$ の部分同値関係 $\mathcal{S}_X$ を

$$u \overset{\mathcal{S}_X}{\sim} v \rightleftarrows u \in Orb_{\mathcal{G}}(v)$$

と定める。

粗く言って、$\mathcal{R}_X$ から作られる Krieger factor $W^*(\mathcal{R}_X)$ は、左測度

$$d(\mu_X)_\ell(u,v) = d\mu_X(v), \quad \forall(u,v) \in \mathcal{R}_X$$

による $L^2(\mathcal{R}_X, (\mu_X)_\ell)$ の上に作用する convolution op. $L_f$、但し $f \in L^\infty(\mathcal{R}_X)$ はある"良い条件"を満たす関数,

$$L_f\xi(u,v) = \sum_{w \underset{\mathcal{R}_X}{\sim} v} f(u,w)\,\xi(w,v)$$

から生成される factor のことであった。詳しくは J. Feldmann and C. Moore Trans. A.M.S. 234 (1977), 234 (1977) を見られたい

$M = W^*(\mathcal{R}_X)$ とおく。subfactor $N \subset M$ を次のように定める;

$$N = \{ L_f \in M ;\ \mathrm{supp}\, f \subset \mathcal{S}_X,\ \exists \tilde{f} \in L^\infty(\mathcal{R}_Y)\ s.t.\ f(u,v) = \tilde{f}(\pi(u), \pi(v)) \}.$$

$M$ 上の state $\psi$ を

$$\psi(\cdot) = (\cdot\, \chi_D \mid \chi_D)$$

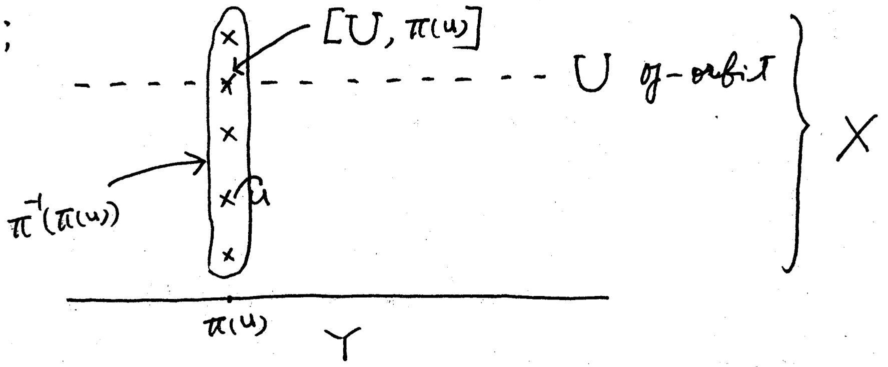
とする。ここで $D=\{(u,u)\,;\,u\in X\}\subset\mathcal{R}_X$。

$\psi$ を preserve する $M$ から $N$ への条件付期待値 $E_N$ が存在することが分かり、実際それは次で与えられる；

$$E_N(L_f) = L_g\ ,\quad \forall L_f\in M$$

$$g(u,v) = \chi_{\Delta_X}(u,v)\sum_{\substack{U\\ \pi(u)\in\pi(U)}} P(U)\, f([U,\pi(u)],[U,\pi(v)])。$$

ここで $U$ は $\mathcal{G}$-orbit を表わし、$P(U)$ は $\pi$-fibre と $U$ の交点 $z$ の条件付確率の値 $P_{\pi(z)}(z)$ を表わし、これは $z$ のとり方に依らない。$[U,\pi(u)]$ は次の図中の点を表わす；




従がって Jones projection $e_N$ は、

$$(e_N\xi)(u,v) = \chi_{\Delta_X}(u,v)\sum_{\substack{U\\ \pi(u)\in\pi(U)}} P(U)\,\xi([U,\pi(u)],[U,\pi(v)])$$

$$,\ \forall\xi\in L^2(\mathcal{R}_X,(\mu_X)_\ell)$$

以上の準備の下に、条件付期待値 $E_N$ に依存する幸崎等の指数 Index $E_N$ 理論を発展させ、エルゴード理論のデータを用いて詳しく記述することが期待される。

§3 主要な結果。

指数公式、基本拡大 $\langle M, e_N \rangle$ をエルゴード理論のデータを用いて、非常に具体的に書き下すことが出来る。

$$X_1 = \{ (u, U) : u \in X, \ U \text{ は } \mathcal{G}\text{-orbit で } U \subset Orb_{G_X}(u) \}$$

$$d\mu_{X_1}(u, U) = \frac{1}{P(U)} \, d\mu_X(u)$$

とおく。$X_1$ の新しい同値関係を

$$(u, U) \underset{R_{X_1}}{\sim} (v, V) \rightleftarrows \pi(U) = \pi(V)$$

$$(u, U) \underset{S_{X_1}}{\sim} (v, V) \rightleftarrows U = V$$

とする。

$$\pi_1 ; (u, U) \in X_1 \longmapsto u \in X$$

とおく。

$L^2(R_{X_1}, (\mu_{X_1})_\ell)$ の上の convolution op. を特に $L^1_F$ と書こう。$L^1_F \in W^*(R_{X_1})$ に対し

$$(\rho_F \xi)(u, s) = \sum_{(v, V) \underset{R_{X_1}}{\sim} (u, U_s)} \sqrt{\frac{P(V)}{P(U_s)}} \, F((u, U_s), (v, V)) \, \xi(v, [V, \pi(V)])$$

$$, \ \forall \xi \in L^2(R_X, (\mu_X)_\ell)$$

おく。ここで $U_s$ は $s$ を含む $\mathcal{G}$-orbit。

定理 (1) $\langle M, e_N \rangle = \{ \rho_F ; L^1_F \in W^*(R_{X_1}) \}$，かつ

$$\rho_F \in \langle M, e_N \rangle \longmapsto L^1_F \in W^*(R_{X_1})$$

は $\langle M, e_N \rangle$ の standard representation を与えている。

(2) $\mathrm{Index}\, E_N = \sum_{i=1}^{\ell} K_i L_i / \mu_x(F_i)$

ここで $\{F_i ; 1 \le i \le \ell\}$ は $\mathcal{G}$-ergodic components で、

$K_i$ は、$\pi : F_i \longmapsto Y$ が $K_i$ 対 1 を意味し、$L_i$ は $u \in F_i$

に対し $F_i \cap \mathrm{Orb}_{G_x}(u)$ の中の $\mathcal{G}$-orbits の個数を表わす。

(3) $E_0 : M \to N$ を minimum index を attain する場合の

conditional expectation とすると、

$$\mathrm{Index}\, E_0 = \Big( \sum_{j=1}^{\ell} \sqrt{K_i L_i} \Big)^2$$

注、(3) で実際に非積数の index $E_0$ を実現出来る。