数理解析研究所講究録
第 688 巻 1989 年 64-76

III型 factor の指数理論

九大 教養 幸崎秀樹 (Hideki Kosaki)

一般の factor に対する index の定義についてまず簡単に説明する。この方面の様々の仕事の中で、III型構造理論 (Connes, Takesaki 等) に直接からんだものとしては次の3つがある。

- P. H. Loi の学位論文, 1988,
- R. Longo の仕事
- 講演者と泉地氏の共同研究

これらについて説明する。第一番目及び三番目の仕事は過去2~3年の間にほぼ同時に又独立に行われた。一方 Longo の preprint はまだ受け取ったばかりで詳しくは読んでいない。従ってもし何か誤解があったとしてもお許し願いたい。

$M \supseteq N$ を一般の (III型の場合が重要であるが) factor, subfactor とする。Pimsner-Popa の論文でも見られるように (trace より決まる $M \to N$ への) normal conditional expectation が II_1 型理論でも大切である。M から N への normal conditional expectation E が与えられているとしよう。Index は pair $M \supseteq N$ に対してではなく、E に対して定義される。II_1 型の時は、いつも trace

より決まる conditional expectation が存在し、それから以下の意味で定義される Index E が Jones index $[M:N]$ と一致する。

Factor が trace を持つとは限らないので以前のように coupling constant 理論は使えない。Trace なしの場合の coupling constant 理論とでも言うべき Connes の spatial theory がその代りとなる。N 上の faithful な $\varphi \in N_*^+$ を固定して M の $\varphi\circ E \in M_*^+$ に関する GNS 表現を考える。従って $M \supseteq N$ は $L^2(M) = L^2(M; \varphi\circ E)$ へ作用している。次に M' 上の faithful な $\psi' \in (M')_*^+$ を決めると、spatial derivative 理論により $N' \to M'$ の operator valued weight F $(= E^{-1})$ が

$$\frac{d\varphi}{d\psi'\circ F} = \frac{d\varphi\circ E}{d\psi'} \quad \left(= \Delta_{\varphi\circ E,\, \psi'(J \cdot J)^-}\right)$$

という条件で自動的に決まる。Operator valued weight の一般論は Haagerup により作られたが、今の場合には（M が factor なので）operator valued weight とは positive scalar $(\in [0,\infty])$ × normal conditional expectation だと思い込んでも差しつかえないので詳しい定義等は書かない事にする。先の F の定義では、F が φ 及び ψ' の choice に依存しているかのように見えるが、実は依存しない事がすぐわかる。（従って F は E により canonical に定まる。）この F を以後 E^{-1} と書く事にする。明らかに $E^{-1}(1) \in M'_+$（又は "$+\infty$"）であるが、E^{-1} の bimodule property により M' の任意の unitary u' に対して

$$u' E^{-1}(1) u'^* = E^{-1}(u' 1 u'^*) = E^{-1}(1)$$

となり実は $E^{-1}(1)$ は M の center に入る。我々の場合 M が factor なので $E^{-1}(1)$ は positive scalar 又は $+\infty$ となる。この scalar を Index E と定義する。

II_1-factor の index 理論の多くの部分が一般の factor に対しても成立する。(cf: J. Funct. Anal., Vol. 66 (1986), 123-140)
たとえば Pimsner - Popa 不等式も成立する。

$$E(x) \geqq (\mathrm{Index}\, E)^{-1} x, \quad x \in M_+ .$$

実際これが Index E の characterization となる事も示せる。($M \supseteq N$ が有限次元以外の時) II_1 の時と同じく $E(x) \geqq \varepsilon x$, $\varepsilon > 0$ からまず Index $E < +\infty$ を出す所がかなり technical である。

我々の index はもちろん E の取り方に depend する。($M \cap N' \neq \mathbb{C}1$ の場合に) expectation を取り代ると index の値も変化する。subfactor を分類するという立場からすると、この事は少々不都合である。ところが index の値を最小化する conditional expectation E が一意的に決まる事が日合氏により証明された。(更にこの E の characterization も得られている。) この事については日合氏の講演で説明されるはずなので、これ以上述べない事にする。

1. P. H. Loi の学位論文

Factor, subfactor の type の stability に関してまず次の事が示されている。

Index $E < +\infty$ の時.

$$M \text{ type } \mathrm{III}_1 \Longleftrightarrow N \text{ type } \mathrm{III}_1,$$

$$M \text{ type } \mathrm{III}_0 \Longleftrightarrow N \text{ type } \mathrm{III}_0,$$

$$M \text{ type } \mathrm{III}_\lambda,\ N \text{ type } \mathrm{III}_\mu \quad (0<\lambda,\mu<1) \text{ の時 } \frac{\log\lambda}{\log\mu} \in \mathbb{Q}.$$

彼の学位論文の主要定理は次の通りである。

<u>Theorem</u> Index $E < +\infty$ で M, N を各々 type III_λ, $\mathrm{III}_{\lambda^{m/n}}$ ($0<\lambda<1$, $(m,n)=1$) とする。もし $\dim \mathfrak{Z}((M\cap N')_E) = 1$ ならば type III_{λ^m} の subfactor $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ で $M \supseteq \mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{B} \supseteq N$ となり次の条件を満たすものが取れる。

(i) $\mathfrak{A}$ は M の $\mathbb{Z}_m$ outer action の不動点環、

(ii) $\mathfrak{B}$ は N の $\mathbb{Z}_n$ outer action の接合積、

(iii) conditional expectation E は $M \xrightarrow{F} \mathfrak{A} \xrightarrow{G} \mathfrak{B} \xrightarrow{H} N$ と分解する、

(iv) $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{B}$ は共通の discrete 分解 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \rtimes_{\theta_0} \mathbb{Z} \supseteq \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \rtimes_{\theta_0} \mathbb{Z}$ ($\theta_0 \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}_0$, $\theta_0(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}$, $\tau\circ\theta_0 = \lambda^m \tau$) をもつ。

(iv) により $\mathfrak{A}_0 = (\mathrm{II}_1\text{-factor}) \otimes B(H) \supseteq \mathfrak{B}_0 = (\mathrm{II}_1\text{-subfactor}) \otimes B(H)$ と書いた時、II_1 - factor 間の Jones index が丁度 Index G に等しい。

この定理の証明を詳しく見ると次の事もわかる。

Corollary　M を AFD type III_λ $(0<\lambda<1)$ factor とする。M の subfactor N で次の二条件を満たすものは（up to conj で）1つしかない。

(i)　Index $E = n$

(ii)　N が type III_{λ^n}

(ii) で type $\mathrm{III}_{\lambda^{1/n}}$ としても同じ結果が出る。

従って III_λ $(0<\lambda<1)$ に対する index 理論は（少くとも原理的には）II_1-factor の index 理論に帰着する事になる。

2. R. Longo の仕事

彼は以前の論文で $M \supseteq N$ が properly infinite の時、共通の cyclic and separating vector ξ_0 を利用してできる $J_{\xi_0,N}$, $J_{\xi_0,M}$ を使い canonical endomorphism $\gamma\,(=\gamma_{\xi_0}) = \mathrm{Ad}(J_{\xi_0,N}\,J_{\xi_0,M}) : M \to N$ を考えた。N の inner automorphism の分を除いて γ は ξ_0 の choice に depend しないという意味で γ は canonical である。この γ を使いすばらしい結果を次々と出したのは周知の事と思う。彼の今度の仕事の出発点は次の V. Jones による observation である。:

$M \supseteq N$ が II_1 factor の時、もちろん $M \otimes B(H) \supseteq N \otimes B(H)$

は II_∞-factor であるがこの間の canonical endomorphism γ および $M\otimes B(H)$ の trace tr を考える。trace の (up to scalar での) 一意性より $tr\circ\gamma$ は tr の scalar 倍となる。この時実は $tr\circ\gamma = [M:N]\, tr$ が成立する。

さて $E: M\to N$ が与えられたとする。N 上の faithful state $\varphi\in N_*^+$ を取り σ_t^{φ}, $\sigma_t^{\varphi\circ E}$ を使い II_∞-von Neumann algebra の inclusion

$$\tilde{M} = M \rtimes_{\sigma^{\varphi\circ E}} \mathbb{R} \supseteq \tilde{N} = N \rtimes_{\sigma^{\varphi}} \mathbb{R}$$

が考えられる。この時 tr, dual action θ_s ($tr\circ\theta_s = e^{-s}\, tr$) は $\tilde{M}$, $\tilde{N}$ で compatible になっている事はすぐわかる。今かりに M が type III_1 (従って $\tilde{M}$ は II_∞-factor) とすると上の同じ議論で scalar が取り出せる。一般の場合でも dual action が center 上で ergodic である事より $tr\circ\gamma$ は tr の scalar 倍となる事を示すのはやさしい。ここで γ は $\tilde{M}$ から $\tilde{N}$ への canonical endomorphism である。

<u>Theorem</u> $tr\circ\gamma = (\mathrm{Index}\, E)\, tr$ が成立する。

彼はこれを index の定義として出発し、canonical endomorphism の手法で index 理論を展開した。一般的結果としてはたとえば次の事が示されている。

<u>Theorem</u> $\alpha : G \to \mathrm{Aut}\, M$ を compact group G の action とし、$\alpha_g(N) = N$, $E \circ \alpha_g = \alpha_g \circ E$ を仮定する。従って $E_0 = E|_{M^\alpha}$: $M^\alpha \to N^\alpha$ は不動点環の間の normal conditional expectation を与える。もし $\alpha|_N$ が dominant ならば $\mathrm{Index}\, E = \mathrm{Index}\, E_0$.

Quasi-local algebra の localized endomorphism ρ を使用する事により type III_1-factor の inclusion が構成されるが、この時の index の平方根が ρ の statistical dimension となる事が示されている。Loi 及び次の3の手法では III_1-factor は扱いにくい。この意味でも Longo の approach 及び quantum field theory からの実例の作り方には大きな期待が持てる。

3. 浜地氏との共同研究

$E : M \to N$ で $\mathrm{Index}\, E < +\infty$ の場合、M と N は"似ている"はずなので M の flow of weights (X_M, F_t^M) と N の flow of weights (X_N, F_t^N) も似ているはずである。この事に対しては次の定理が答を与えてくれる。

<u>Theorem</u> (ergodic とは限らない) flow (X, F_t) で次の性質を持つものが取れる:

(i) m 対 1 map $\pi_M : (X, F_t) \to (X_M, F_t^M)$ があり

$$F_t^M \circ \pi_M = \pi_M \circ F_t \text{ 且つ } m \leqq \operatorname{Index} E.$$

(ii) n 対 1 map $\pi_N : (X, F_t) \to (X_N, F_t^N)$ があり

$$F_t^N \circ \pi_N = \pi_N \circ F_t \text{ 且つ } n \leqq \operatorname{Index} E.$$

このように2つの flow of weights は共通の有限対1の extension を持つという性質で互いに拘束を受けている。この事より1で述べたような M と N の type に関する stability が出て来る事を見るのは容易である。この結果に関する注をいくつか書く。

(i) 共通の extension (X, F_t) は一般に ergodic ではないが、ergodic components の個数は $\dim \mathfrak{Z}(M \cap N')$ である。

(ii) ある条件のもとでは（III_λ, $0<\lambda<1$, の時は必ず成立するが III_0 の時は必ずしも成立しない条件）上の定理より強い評価 $mn \leqq \operatorname{Index} E$ が出る。

(iii) 定理の (X, F_t) はある自然な abelian algebra から出て来るが逆構成も可能である。つまり3つの flows で定理の条件を満たすものが与えられると逆に index 有限な $E : M \to N$ が構成でき、これに定理を利用して得られる (X, F_t) は丁度始めに与えられた物に一致する。

上の (iii) は $\operatorname{Index} E < \infty$ のもとでの flow of weights 間の拘

束条件としては上の定理が best possible である事を示している。しかし $M \supseteq N$ から出発し共通の extension を構成し逆に逆構成を行ってももとの $M \supseteq N$ が recover する事はできない。我々の逆構成のやり方が次の定理の意味での II 型的部分を ignore するからである。

上の定理の共通の extension に対応して M と N の間に何か algebra が入っていて、この algebra の flow of weights として (X, F_t) が表われていると想像するのは自然である。実際次の分解定理はその事を示している。

<u>Theorem</u>　$E : M \to N$ (Index $E < \infty$) が Hiai の意味での minimum index を与えているとする。この時 von Neumann algebra $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ で $M \supseteq \mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{B} \supseteq N$ となり次の条件を満たすものが取れる。

(i)　E は $M \xrightarrow{F} \mathfrak{A} \xrightarrow{G} \mathfrak{B} \xrightarrow{H} N$ と分解する。

(ii)　$\mathfrak{Z}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{Z}(M \cap N')$ となり $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ の flow of weights は一致していて丁度前定理の (X, F_t) に等しい。

(iii)　$\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{B}$ は共通の continuous (discrete でもよい) decomposition $\mathfrak{A} = \hat{\mathfrak{A}} \rtimes_\theta \mathbb{R} \supseteq \mathfrak{B} = \hat{\mathfrak{B}} \rtimes_\theta \mathbb{R}$ を持つ。

$\hat{\mathfrak{A}} \supseteq \hat{\mathfrak{B}}$ は II_∞-von Neumann algebra で共通の center を持つので

$$\widetilde{\mathfrak{A}} = \int_X^{\oplus} \widetilde{\mathfrak{A}}(\omega)d\omega \supseteq \widetilde{\mathfrak{B}} = \int_X^{\oplus} \widetilde{\mathfrak{B}}(\omega)d\omega$$

と同時に central decomposition を持つが、II_∞-factor の inclusion $\widetilde{\mathfrak{A}}(\omega) \supseteq \widetilde{\mathfrak{B}}(\omega)$ よりいつものように II_1-factor の inclusion の family が出るので、Jones index が X 上の関数として出て来る。この関数は X のエルゴード成分上で constant である。

上の分解に表われる中段 $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{B}$ の解析は（原理的には）II_1-factor の index 理論に帰着される。flow of weight も共通なのでこの inclusion は"II型的"である。残りの $M \supseteq \mathfrak{A}$ 及び $\mathfrak{B} \supseteq N$ であるが、これらは互いに他の"dual"の関係にあるので以下 $\mathfrak{B} \supseteq N$ についてのみ説明する事にする。（$M \supseteq \mathfrak{A}$ に対する結果は以下の結果を"dualize"する事により得られる。）$\mathfrak{B} \supseteq N$ から最初の定理の共通の extension を取ると π_M が1対1となり factor flow $\pi : (X_M, F_t^M) \to (X_N, F_t^N)$ の構造が出てくる。Inclusion の効果が本当に flow of weights の level に反映して来るという意味に"真にIII型的"な inclusion である。

今話を単純にする為 $M = \mathfrak{A} = \mathfrak{B} \supseteq N$ と仮定しよう。（$\mathfrak{Z}(M \cap N')$ の minimum projection p で cut する事により、いつでもこの情況に帰着させる事ができる。）この時、$M \cap N' = \mathbb{C}1$ 及び $\mathrm{Index}\, E = n$ （π が n 対1）は直接に証明でき

る。

<u>Theorem</u>　Factor が AFD で type III_λ，$0 \leqq \lambda < 1$ と仮定する。Inclusion $N \subseteqq M$ (up to conjugacy) の完全不変量が上の factor flow (up to isomorphism) である。

従って factor flow の分類と、この場合の subfactor の分類が同値となる。エルゴード理論に於ける様々な example とこの定理を組み合わせる事により、色々な subfactor の実例が構成できる事は言うまでもないが、詳しい説明は別の機会に譲る事にする。つまり AFD type III_λ，$0 \leqq \lambda < 1$，の subfactor の分類問題は（原理的には）

(dual action も考慮に入れた) II_1-factor の場合の分類

＋

Factor flow の分類

という事になる。

さて一般の場合に話をもどす。

<u>Theorem</u>　$M = \mathcal{O} = \mathcal{B} \supseteqq N$ の時 次の条件は互いに同値である。(Index $E = n$)

(i)　(Ocneanu の意味での) depth $= 2$.

(ii) 位数 n の有限群とその M への outer action があり $N=M_G$ (不動点環) となる。

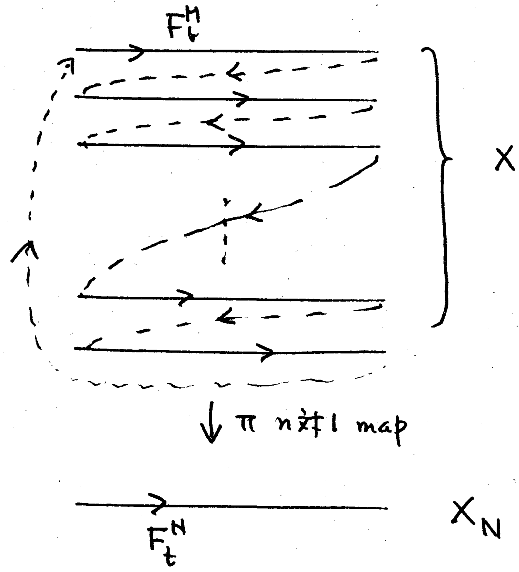
(iii) 同じく N への coaction があり $M=N\rtimes\hat{G}$ (coaction による接合積) となる。

(iv) $F_t^M\otimes_{X_N}F_t^M$ が丁度 n 個のエルゴード成分を持つ。

最後の $F_t^M\otimes_{X_N}F_t^M$ について説明する。$X_M\cong X_N\times\{1,2,\cdots,n\}$ なので、F_t^M は $F_t^M(x,i)=(F_t^N(x),\varphi_{x,t}(i))$ と skew の形に書ける。従って $X_N\times\{1,2,\cdots,n\}^2$ 上に $(x,i,j)\to(F_t^N(x),\varphi_{x,t}(i),\varphi_{x,t}(j))$ が定まる。これを $F_t^M\otimes_{X_N}F_t^M$ と書いた。このエルゴード分解の仕方を見る事により上の(ii)の有限群 G の形が求まる。又、もし $M=N\rtimes\Gamma$ (Γ は位数 n の群) ならば、明らかに depth $=2$ なので、(iii)により Γ は abel 群である事がわかる。II_1-factor の index 理論では depth $=2$ より Hopf algebra が出て来るが、今の場合 $M=\mathfrak{A}=\mathfrak{B}\supsetneqq N$ と形が制約を受けている為、Hopf algebra が cocommutative になっている。逆に dual の場合 $M\supsetneqq\mathfrak{A}=\mathfrak{B}=N$ には、depth $=2$ より出る Hopf algebra が commutative となる。

type III_0 の場合 depth は 2 であったりそれ以上になったりする。(そのような example は構成できる。) 更に depth 2 の場合でもあらゆる有限群 G が出て来る。ここが type

III_λ, $0<\lambda<1$, に対する index 理論と type III_0 に対する index 理論の大きな相違点である。 type III_λ $(0<\lambda<1)$ の場合、MとNの flow of weights がともに periodic な為、先の factor flow は (up to isom.) でいつでも次の形となる。



従って $N \subseteq M$ の inclusion は unique であり、depth は必ず2でしかも前定理の群Gは常に $\mathbb{Z}_n$ となる。これが丁度 Loi の結果に対応する部分である。