数理解析研究所講究録
第688巻 1989年 98-109


# $C^*$-環の指数理論

大阪教育大　綿谷安男　(Yasuo Watatani)

## 0 はじめに

factor Mとそのsub factor Nに関する指数理論全体は(文献も含めて)幸崎さんによって説明されるので,ここでは$C^*$環の指数理論について,なぜ,そういう風に定義するかに中心をおいてかいてみる.

$C^*$-環に対する指数の定義は次の3つのことをぼんやりと念頭におかれてつくられている:

① Pimsner-Popa basis

② Kosakiの定義: $\mathrm{Index}\, E = E^{-1}(1)$

③ 半単純リー環のCasimir元

そこで以上の①,②,③をざっと復習してみよう

## 1 Pimsner-Popa basis

Mを$\mathrm{II}_1$-factor, Nをそのsub factorとする.今Jonesのindex $[M:N] < +\infty$と仮定しよう。

この時 Pimsner–Popa は次のような orthonormal basis $\{m_j \mid j=1,\cdots,n+1\} \subset M$ の存在を示した：

㋐ $E_N(m_j^* m_k)=0 \quad j \neq k$

㋑ $E_N(m_j^* m_j)=1 \quad 1\leq j\leq n$

㋒ $E_N(m_{n+1}^* m_{n+1})$ is a projection of trace $[M:N]-n$.

㋓ $n$ は $[M:N]$ の整数部分

㋔ $m_j e_N$ は partial isometries $(1\leq j\leq n+1)$

㋕ $\sum_{j=1}^{n+1} m_j e_N m_j^* = 1$

㋖ $\sum_{j=1}^{n+1} m_j m_j^* = [M:N]$

㋗ $\forall m \in N$ は $m=\sum_{j=1}^{n+1} m_j y_j$ $\left(\begin{array}{l} y_j \in N \\ y_{n+1} \in E_N(m_{n+1}^* m_{n+1})N \end{array}\right)$
と一意的に分解できる。

㋕はいいかえると

㋕′ $\forall x \in M \quad \sum_{j=1}^{n+1} m_j E_N(m_j^* x) = x$

となる。$C^*$-部分環の指数の有限性を定義するのにこの㋕′の性質のみを使うことにする。なぜなら $C^*$ 環では projection が一般には存在しないため，orthonormality は少し強すぎる気がするから。また分解の一意性も $C^*$-環でははずすことにする.

## 2 Kosakiの Index

$M \supset N$ をある Hilbert 空間 $H$ 上の ($\sigma$-finite) factor とする。$E : M \longrightarrow N$ を faithful normal conditional expectation とする。$M$から$N$への normal faithful semifinite operator valued weights 全体を $P(M, N)$ とおく。$P(M, N)$ と $P(N', M')$ の間には次の Connes の spatial derivative の等式を通じて全単射 $E \leftrightarrow E^{-1}$ がある：

$$\frac{d(\phi \cdot E)}{d\psi} = \frac{d\phi}{d(\psi \cdot E^{-1})}$$

ここで $\phi$は $M$上の（$\psi$は $M'$上の）任意の normal faithful semifinites weights を動く。

$\boxed{\text{Definition}}$ (Kosaki)

$$\text{Index}\, E = E^{-1}(1)$$

さて Kosaki の index $E < +\infty$ の時も Pimsner–Popa 型の basis $\{m_1, m_2, \cdots m_n\} \subset M$ がとれる：

$$\forall x \in M \qquad x = \sum_i m_i E(m_i^* x)$$

この basis $\{m_1, \cdots, m_n\}$ と $E^{-1}$は次の関係がある.

$\boxed{\text{Lemma 1}}$

$$\forall x \in N' \qquad E^{-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i x m_i^*$$

特に $\qquad \mathrm{Index}\, E = E^{-1}(1) = \sum_{i=1}^{n} m_i m_i^*$

以上により，Index の理論はある種の basis の存在を仮定してそこを出発点にしてもかなりの所がおおえそうな気になるでしょう。(たとえそれが論点先取であるというゴマカシに近い側面をもっているにしてもですが。)

$\boxed{3}$ 半単純リー環の Casimir 元

L を $\mathbb{C}$ 上の半単純リー環とする。A, B ∈ L に対して

$$K(A, B) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}A, \mathrm{ad}B)$$

で定義して，この $K : L \times L \to \mathbb{C}$ のことを killing form という。

$X_1, \cdots, X_n$ を L の basis とし，K に関する dual basis を $Y_1, \cdots, Y_n$ とする；つまり

$$K(X_i, Y_j) = \delta_{ij}$$

となるようとっておく。$\mathcal{U}(L)$ を L の universal enveloping algebra とする。リー環 L の casimir 元 C は $\mathcal{U}(L)$ の元として次で定義される：

$$C = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Y_i \quad \in \mathcal{U}(L)$$

このCasimir元 $C$ は $\mathcal{U}(L)$ の center に含まれる。ここで $\mathrm{Index}\,E = \sum m_i m_i^*$ と比較してみると，どうもある種の basis（とその dual basis）の積の和をとって得られているという共通点に気がつく。そこで $C^*$ 環において Index を定義するに当たっても ある種の basis（とその dual basis）の積の和という形で Index を定義することにする。すると casimir 元と同じように その $C^*$ 環の center の元になっていることがわかる。

以上の 1 ～ 3 を念頭において $C^*$ 環の Index を定義する。が他分野との関連を明示する説明のつごう上，一般の多元環に対して定義をおこなう。

$\boxed{4}$ Indexの定義

$k$ を可換環で単位元1をもつものとする。$k = \mathbb{Z}$ か $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ 位を描いてくれて十分です。$k$ 上の代数 $B$ とその部分代数 $A$ の組 $B \supset A$ を考える。$B$ と $A$ は 1 を共有すると仮定する

$\boxed{\text{Definition}}$ $E: B \longrightarrow A$ が conditional expectation

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $E$は $A$-$A$-bimodule map で $E(1) = 1$

特に $E^2 = E$ となる. $B \supset A$ が $C^*$-環の時は positivityも仮定するので $E$は必然的に projection of norm one になる.

$\boxed{\text{Definition}}$ a finite family $\{(u_1, v_1), \cdots, (u_n, v_n)\} \subset B \times B$ が quasi-basis for $E$

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in B$

$$(\#) \quad x = \sum_{i=1}^{n} u_i E(v_i x) = \sum_{i=1}^{n} E(x u_i) v_i$$

$\boxed{\text{Definition}}$ $E: B \longrightarrow A$ を conditional expectation とする

$E$ が of index-finite type

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \{(u_1, v_1), \cdots, (u_n, v_n)\} \subset B \times B$ : quasi-basis for $E$

この時

$$\operatorname{Index} E \underset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \in B$$

(ただし $C^*$-環の時は $v_i = u_i^*$ と, とり直せるので $\operatorname{Index} E = \sum u_i u_i^*$)

$\boxed{\text{Remark}}$ ① $\operatorname{Index} E$は quasi-basis のとり方には依存しない. ただし $E$には依存するので $B \supset A$ というpair

に対する不変量でない所に少し異る点がある.

② 実は Index E は Center B の元であることがいえる.
これは casimir 元 C が Center $\mathcal{U}(\mathcal{B})$ の元であることと似ている.

③ $B \otimes_A B$ 上に次で積を入れる,(E に依存して).

$$(*) \quad (x \otimes y) \cdot (z \otimes w) \underset{\text{def}}{=} x E(yz) \otimes w$$

すると $\{(u_1, v_1), \cdots, (u_n, v_n)\}$ が quasi-basis であるという条件(いささか形がよくない)

$$(\#) \quad \forall x \in B \qquad x = \sum_{i=1}^{n} u_i E(v_i x) = \sum_{i=1}^{n} E(x u_i) v_i$$

がみた目にもっと自然な形

$$(\#\#) \quad \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes v_i \text{ は } B \otimes_A B \text{ の単位元である}$$

(ただし $B \otimes_A B$ 上の積は上の (*) で入れたもの.)
にかき直すことができる.

④ もちろん $\mathrm{II}_1$-factors $M \supset N$ の時に trace からきまる conditional expectation $E: M \to N$ をとれば

$$\text{Index} E = [M : N]$$

だし,一般の factors $M \supset N$ については幸崎さんの定義と一致する.

$\boxed{例1}$ $Y$, $X$: compact $T_2$-spaces, $\pi: Y \longrightarrow X$: covering map とする. $\pi^*: C(X) \hookrightarrow C(Y)$ が誘導される。

$B = C(Y)$

$A = \pi^*(C(X))$

$d_x = \#\pi^{-1}(x)$ を $x \in X$ 上の fiber の数

$\begin{cases} X \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ x \longmapsto d_x \end{cases}$ が bounded を仮定する

$w: Y \longrightarrow ]0,1[$ : 連続関数で

$$\sum_{z \in \pi^{-1}(x)} w(z) = 1 \qquad \text{for all } x \in X$$

この時 $E_w: B \longrightarrow A$ という conditional expectation を

$$E_w(f)(y) = \sum_{z \in \pi^{-1}\pi(y)} w(z) f(z)$$

for $f \in B$.

で定義する.

$$\Longrightarrow \operatorname{Index} E_w = \frac{1}{w} \in B$$

特に covering sheets の枚数 $d_x = n$ (constant)

$w(y) = \frac{1}{n}$ $\forall y \in Y$ ときめると

$$\operatorname{Index} E = n = (\text{被覆度})$$

$\boxed{\text{例2}}$ $e_1, e_2, e_3, \cdots$ を Jones projection とする.
つまり $\tau^{-1} \in \{4\cos^2 \pi/n \mid n = 3, 4, 5, \cdots\} \cup (4, \infty)$ として

$$\begin{cases} e_i e_{i+1} e_i = \tau e_i \\ e_i e_j = e_j e_i \qquad (|i-j| \geq 2) \end{cases}$$

をみたすとする.

$$B_\tau = C^*(1, e_1, e_2, e_3, \cdots)$$

$$A_\tau = C^*(1, e_2, e_3, \cdots)$$

とおく. $\exists E : B_\tau \longrightarrow A_\tau$ : conditional expectation
s.t. $\quad E(x e_1 y) = \tau x y$

この時

① $\tau^{-1} \in 4\cos^2 \pi/n$ の場合
　E は of index-finite type で
　$\mathrm{Index}\, E = 4\cos^2 \pi/n$

② $\tau^{-1} \in (4, \infty)$ の場合
　E は index-finite type では<u>ない</u>

もっと一般に Wenzl が構成した subfactors の方法で weakly closure の代わりに norm closure をとってつくった simple な AF-algebras でもよい。

例3 M : finite von Neuman alg with a faithful normal trace τ. N ⊂ M : von Neuman subalgebra. $E: M \to N$ を trace τ から決まる normal conditional expectation とする。次の Index E = I(M|N) の公式は河上さんに依るものです。さらに次の状況を仮定する

$Z(M)$ の minimal projection を $\langle e_i \mid i \in I \rangle$、
$Z(N)$ の 〃 を $\langle f_j \mid j \in I \rangle$、

として E : of index finite type となっている

$$\Rightarrow \ \mathrm{Index}\, E = I(M|N) = \sum_i \sum_j \frac{[M_{ij} : N_{ij}]}{\tau(e_i f_j)} \tau(f_j) e_i$$

$$\left( \text{ここで } \begin{aligned} M_{ij} &= M_{e_i f_j} \\ N_{ij} &= N_{e_i f_j} \end{aligned} \right)$$

(注) 実は $E^{-1}(1) \in M$ であることと quasi-basis が有限つでとれることは一般の von Neuman algebra では一致しないことを河上さんに教えてもらいました。上の公式は $E^{-1}(1) \in M$ でもよいそうです。くわしいことは直接河上さんにきいてもらうほうがまちがいがなくてよいでしょう

例4 離散群 G ⊃ H に対しては $E: C_r^*(G) \to C_r^*(H)$ の Index E = [G : H] で群の指数と一致する。

Pair $B \supset A$ に対して $E : B \to A$ の Index $E$ を上のように代数的に定義したため，Co algebra の概念の拡張である coring 構造をもつことが示せる。さらに体の分離拡大の概念を環にまで拡張したものも分離拡大ということにすると，$B \supset A$ が $C^*$-環で $E$ が of index-finite type なら，$B \supset A$ はその意味での分離拡大になっていることも示せる。

$\boxed{5}$ Index の性質

$C^*$-環の index についてわかっていることはまだ少ない。

**Theorem 2** $B \supset A$ : $C^*$-algebras. $E : B \to A$ : conditional expectation of index-finite type. If Index $E \in A$

$$\Longrightarrow (\text{Spectrum of Index} E) \subset \{4\cos^2 \pi/n \mid n = 3, 4, 5, \ldots\} \cup [4, \infty).$$

これ以外に K-theory における transfer との関連などもあるが，どれもまだ初等的な結果ばかりである。もう少し研究して構造論的に何かいえることがわかればよいと思っているがなかなかである。その原因は $C^*$-環に対して Index を定義するのに意味があるかどうか疑わしいことにあると思っています。

最後に Pimsner-Popa 不等式については Sekine により私の元の評価が次のように改良されたことを記します.

$\boxed{\text{Proposition 3}}$ $B \supset A$ : $C^*$-algebras で $E : B \to A$ が a conditional expectation of index-finite type とする

$$\Longrightarrow \quad E(x) \geqq \|\mathrm{Index}\, E\|^{-1} x \qquad \text{for } x \in B_+$$