数理解析研究所講究録
第689巻 1989年 25-37

Selberg zeta 関数とその応用

神戸大・自然科学　秋山茂樹
(Shigeki Akiyama)

§0. 序

「目を閉じたままで鳴っている太鼓の形を知る事ができるか？」(Can one hear the shape of a drum ?)

M. Kac は、Amer. Math. Monthly 紙の論説でこう呼びかけた。最初のこの問題に対する美しい解答は、いわゆる Weyl の漸近公式である。（詳しくは [7] ）

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1 \sim \frac{vol(\Omega)}{2\pi} \lambda$$

ここで、λ_n は、ラプラシアンの固有値、$vol(\Omega)$ は太鼓 Ω の大きさである。この式は、「少なくとも太鼓の大きさはわかる」という式であろうか。

さて太鼓は、ここでは Euclid 空間の有界領域としていた。この小論の中では、特に太鼓をコンパクトなリーマン面としよう。$\mathbb{H}$ を複素上半平面とし、Γ を第一種フックス群とする。もし、Γ が torsion free で、parabolic element をもたないならば、$\Gamma\backslash\mathbb{H}$ は、はじめから compact で、Weyl の公式は問題なく太

룠$\Gamma\backslash\mathbb{H}$に適用される。$\Gamma$がparabolic elementをもつ時は、有限個の$\mathbb{R}\cup\{\infty\}$の点を付加する事で$\Gamma\backslash\mathbb{H}$はコンパクト化されるが、このような点（cusp）が存在する場合には、我々の問題はたいへん難しくなる。Selbergは、著名な跡公式を導入してこの問題に対し重要な前進を与えた。（§1. を見よ）

Selbergの跡公式は今日では、様々な設定の下で計算され、大きな役割を果たしている。特に、Hejhal [4], [5] は、$SL_2(\mathbb{R})$の場合の詳しい計算を実行したが、やり残した問題として、Γがparabolic elementを含む場合のModular対応の跡公式があった。これが、最近Akiyama－Tanigawa [3]で行なった計算である。従ってこの計算の応用として、上記のWeyl－Selberg型の漸近公式の類似を考える事ができる。これが、この小論の目的である。結果として、Hecke作用素の跡のある種の和に関する公式が得られる。（§2. を見よ）

§1. Weyl－Selbergの漸近公式

さてΓを$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$を含むものとし、$\chi$を$\Gamma$の$\nu$次ユニタリ表現、$m$を非負整数とする。$m$の偶奇に応じて$\chi(-1_2)=(-1_\nu)^m$が成立する事にしよう。$\mathcal{L}^2_\chi(\Gamma\backslash\mathbb{H}, m)$を、$\mathbb{H}$から$\mathbb{C}^\nu$への可測関数$f(z)$たちで次の2条件をみたすものからなる空間とする。

$$(1)\qquad \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} {}^t f(z)\,\overline{f(z)}\,dz < \infty \qquad ここで\ dz = y^{-2}dx\wedge dy$$

(2) 全ての $\gamma \in \Gamma$ に対して、$\gamma = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}$ の時、

$$f(\gamma \cdot z)\left(\frac{|cz+d|}{cz+d}\right)^m = \chi(\gamma) f(z)$$

さて、$\Delta_m = y^{-2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - imy\frac{\partial}{\partial x}$ とおけば、$\mathcal{L}^2_\chi(\Gamma \backslash \mathbb{H}, m)$ に作用し、この作用は Γ の作用と可換である。$\mathcal{L}^2_\chi(\Gamma \backslash \mathbb{H}, m)$ は次のようにスペクトル分解される。

$$\mathcal{L}^2_\chi(\Gamma \backslash \mathbb{H}, m) = \left(\bigoplus_\lambda \mathcal{L}^2_\chi(\Gamma \backslash \mathbb{H}, m, \lambda)\right) \oplus \mathcal{E}$$

ここで、$\mathcal{L}^2_\chi(\Gamma \backslash \mathbb{H}, m, \lambda)$ は、$\Delta_m f = \lambda f$ を満たす関数 f で各cuspに於いて exponential decay であるもののなす部分空間であり、$\mathcal{E}$ はその直交補空間である。$\mathcal{E}$ は更に residual spectra と、continuous spectra に分けられるが、ここでは立ち入らない。$m=0$ の場合に $\lambda \leqq -\frac{1}{4}$ が Selberg によって予想されているが、未解決問題である。λ たちは次のように重複をこめて順序づけられる。

$$\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2} - 1\right) \geqq \lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots$$

以後、$\lambda = -\frac{1}{4} - r^2$, $\rho = \frac{1}{2} + ir$ とパラメトライズする。λ_i, r_i, ρ_i も同様に定義する。

$$N_\Gamma(T) = \sum_{\substack{\mathrm{Im}\,\rho > 0 \\ |\rho| < T}} 1$$

と置く時、Weyl-Selberg の漸近公式は、次のように書く事ができる。

$$(3) \qquad N_\Gamma(T) - \frac{1}{4\pi}\int_{-T}^{T} \mathrm{tr}\left(\Phi'\left(\tfrac{1}{2}+ir\right)\Phi\left(\tfrac{1}{2}-ir\right)\right) dr$$

$$= \frac{\nu\,\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}{4\pi}T^2 + O(T\log T)$$

ここで $\Phi(s)$ は. Eisenstein 級数の定数項行列と呼ばれるもので. 次のように $\mathrm{Re}\, s>1$ では収束する Dirichlet 級数として定義される。 $\Phi(s) = (\varphi_{ij}(s))$ の時.

$$\varphi_{ij}(s) = i^m \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s+\frac{m}{2})\,\Gamma(s-\frac{m}{2})} \sum_{\substack{\tau\in\Gamma_i\backslash\sigma_i^{-1}\Gamma\sigma_j/\Gamma_j \\ \tau=\begin{pmatrix} * & * \\ c & d\end{pmatrix},\ c>0}} \frac{P_j\,\chi^{-1}(\sigma_i\tau\sigma_j^{-1})\,P_i}{c^{2s}}$$

ここでは. $\kappa_1,\cdots,\kappa_w$ を Γ の inequivalent cusps の代表として. Γ_i を. κ_i の stabilizer group, $P_i = \dfrac{1}{[\Gamma_i:\Gamma_i^0]}\displaystyle\sum_{\gamma\in\Gamma_i/\Gamma_i^0}\chi(\gamma)$ (但し $\Gamma_i^0 = \Gamma_i\cap\mathrm{Ker}\,\chi$) としている。

定義から $\Phi(s)$ は $(w\times\nu)\times(w\times\nu)$ 型の行列で、このような定義の仕方は Hejhal [5] のものとは異なる。これは、χ の固有値が 1 であるか否かで Hejhal は分類をして跡公式を計算したのに対し、我々は分類せずに計算したからである。(詳しくは[3]を参照)

さて、上式(3)における積分の部分を $M(T)$ と書こう。もしも $M(T)$ が早く増大しすぎると $N_\Gamma(T)$ の増大はあやしくなる。しかしながら Γ が合同部分群の場合にはこのような事はおこらない。すなわち

$$M(T) = O(T\log T)$$

が成立してくれるのである。（この事は，Selberg自身が気付いて，1954年のGöttingenの講義で述べたそうである。）一般の群Γに対しては，Selbergは次を予想した。

$$M(T) = O(T^{2-\varepsilon}) \quad \text{for } {}^{\exists}\varepsilon > 0$$

我々は$\mathcal{L}_{\chi}^{2}(\Gamma\backslash\mathbb{H}, m, \lambda)$に属する元をMaass cusp formと呼ぶが，この予想は"Maass cusp formは十分に多くあるだろう"という自然な希望を表わすものと言える。しかし，近年Phillips－Sarnakらの示した結果によれば，このSelbergの予想は正しくないかもしれない。というのは，P－Sは，一般リーマン予想（正確には特殊な形のRankin－Selberg zetaに関するLindelöf予想）と，ある種のスタンダードな仮定の下では，Selberg予想を満たさない群Γが無数にある事を示したのである。（[8]，[9]を見よ）

§2. Hecke作用素の跡の和の漸近公式

ここで，Weyl－Selbergの公式のHecke作用素の場合の類似を，述べる。$\alpha \in SL_2(\mathbb{R})$を，$\Gamma$と$\alpha\Gamma\alpha^{-1}$がcommensurableとなる元とするときdouble coset $\Gamma\alpha\Gamma$によって定まり，$\mathcal{L}_{\chi}^{2}(\Gamma\backslash\mathbb{H}, m)$に作用するHecke作用素$T(\Gamma\alpha\Gamma)$は次で定義される。

$$T(\Gamma\alpha\Gamma)f(z) = \sum_{\mu} \chi(\alpha_{\mu})\, f(\alpha_{\mu}^{-1}\cdot z)\left(\frac{|cz+d|}{cz+d}\right)^{m}$$

ここで，$\Gamma\alpha\Gamma = \bigcup_{\mu} \alpha_{\mu}\Gamma$（disjoint），$\alpha_{\mu}^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}$，$f \in \mathcal{L}_{\chi}^{2}(\Gamma\backslash\mathbb{H}, m)$としている。

以降では、$\alpha \neq \pm 1$ としよう。$T(\Gamma\alpha\Gamma, \lambda)$ を、$T(\Gamma\alpha\Gamma)$ の $\mathcal{L}^2_\chi(\Gamma\backslash\mathbb{H}, m, \lambda)$ への制限として

$$N_{\Gamma\alpha\Gamma}(T) = \sum_{\mathrm{Im}\rho>0,\ |\rho|<T} \mathrm{trace}\left(T(\Gamma\alpha\Gamma, \lambda)\right)$$

と置くとき、次が示される。

定理

$\Gamma\alpha\Gamma = \Gamma\alpha^{-1}\Gamma$ の時、

$$N_{\Gamma\alpha\Gamma}(T) - \frac{1}{4\pi}\int_{-T}^{T} \mathrm{tr}\left(W(\tfrac{1}{2}+ir)\,\Phi'(\tfrac{1}{2}+ir)\,\Phi(\tfrac{1}{2}-ir)\right) dr$$
$$= O(T\cdot\log T)$$

ここで、$W(s)$ は次で定義される。$W(s) = (W_{ij}(s))$ として

$$W_{ij}(s) = \sum_{\substack{\tau\in\Gamma_i\backslash\sigma_i^{-1}\Gamma\alpha^{-1}\Gamma\sigma_j,\ \tau=\begin{pmatrix}* & *\\ 0, & d\end{pmatrix} \\ d>0}} \frac{\chi^{-1}(\sigma_i\tau\sigma_j^{-1})}{d^{2s}} P_i$$

注意1. $W(s)$ は有限なディリクレ級数であり、任意の帯領域で、有界な整関数となる。最も大切な性質は

$$W(s)\,\Phi(s) = \Phi(s)\,W(1-s)$$

であるが、特に $\Gamma\alpha\Gamma = \Gamma\alpha^{-1}\Gamma$ の時には

$${}^t\overline{W(s)} = W(1-\bar{s})$$

という関係も容易にわかる。

特に $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$　$\Gamma\alpha\Gamma = \frac{1}{\sqrt{p}}\Gamma\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{pmatrix}\Gamma$ の場合には

$$W(s) = (p^{s-\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{2}-s})\cdot p^{\frac{1}{2}}$$

となっており、この場合には $N_{\Gamma\alpha\Gamma}(T) = O(T\log T)$ も示せる。

注意2. $\Gamma\alpha\Gamma = \Gamma\alpha^{-1}\Gamma$ という仮定は、$T(\Gamma\alpha\Gamma)$ が self-adjoint である事を意味する。従いこの時 trace $T(\Gamma\alpha\Gamma, \lambda)$ は実数である。この定理の右辺と、$N_\Gamma(T)$ の右辺を比較すれば、恐らくは、trace $T(\Gamma\alpha\Gamma, \lambda)$ が、多くの符号変化をもつだろうと思われる。

§3. Selberg zeta 関数 と Functional determinant

定理の証明の大筋に触れようと思うが、詳細は[2], [3]を見て頂く事にして、まず Selberg zeta 関数についていくつかまとめる事にする。Selberg zeta と比較対照される Riemann zeta は、①無限積表示, ② easy factor を掛ける事で整関数, ③関数等式, などの大切な性質があるが、群Γに対応する Selberg zeta は、次のような事情になっている。(Fisher [6] 参照)

(A1). Selberg zeta $Z_\Gamma(s, \chi)$ は、

$$Z_\Gamma(s, \chi) = \prod_{T:\mathrm{Prim.Hyp.}} \prod_{k=0}^{\infty} \det\left(1_V - \chi(T)N\{T\}^{-s-k}\right)$$

の形の無限積で定義され、$\mathrm{Re}\, s > 1$ では絶対収束する。ここで

Prim. Hyp. は. 原始双曲類の代表をわたる積である。

(A2) Γの単位類, 楕円類, 放物類に対応する関数$\Xi_{id}(s)$, $\Xi_{ell}(s)$, $\Xi_{par}(s)$と, Eisenstein級数から決まる関数$\Xi_{Eis}(s)$があって.

$$\Xi(s) = \Xi_{id}(s)\,\Xi_{ell}(s)\,\Xi_{par}(s)\,\Xi_{Eis}(s)\,Z_\Gamma(s,\chi)$$

は. 整関数となる。$\Xi_*(s)$は各々有理型である。

(A3) $\Xi(s) = \Xi(1-s)$という関数等式を満たす。

この(A2), (A3)は. 実はSelbergの跡公式の一つの表現である。少し説明しよう。良く知られているように跡公式は. 適当なtest function $h(r)$を選べば

$$\sum h(r) = \sum (\Gamma\text{の各共役類上の軌道積分})$$

という形をしている。以降、$h(r)$を古典的なSelberg kernelにとる。

$$h(r) = \frac{2s-1}{r^2+(s-\frac{1}{2})^2} - \frac{2s-1}{r^2+(\beta-\frac{1}{2})^2} \qquad (\beta \gg 0)$$

さすれば右辺の軌道積分のうち双曲類に対応する部分は.

$$\frac{d}{ds}\log Z_\Gamma(s,\chi) - \frac{2s-1}{2\beta-1}\frac{d}{d\beta}\log Z_\Gamma(\beta,\chi)$$

という形になる。また左辺は

$$\frac{2s-1}{r^2+(s-\frac{1}{2})^2} = \frac{2s-1}{-\lambda+s(s-1)} \qquad (\lambda = -\tfrac{1}{4}-r^2\text{に注意})$$

を考慮すれば、特異性に注目すると

$$\frac{d}{ds}\log\left\{\prod_{\lambda}(-\lambda+s(s-1))\right\}$$

という形の関数と本質的には見る事ができる。勿論ここで、$\prod(-\lambda+s(s-1))$ は発散するが、そのような積をこの Selberg の跡公式を通じて定義するのである。他の共役類上の積分についても同様に議論すれば (A2) の式が得られる。よって定数倍の違いを無視すれば（ここでは e^{As} を両辺に掛ける事も必要）

$$\det(-\Delta_m+s(s-1))=\Xi(s)$$

と $\Xi(s)$ は解釈される。従い (A3) は明らかである。$\det(-\Delta_m+s(s-1))$ の値は、このように Selberg の跡公式の立場からは定数倍の ambiguity をもつが、$\sum_{\lambda}\lambda^{-s}$ を解析接続する事で explicit に定める事も可能である。ここでは深くはたち入らない（[10], [12] を見よ。）

さて我々が必要とするのは、$\Gamma\alpha\Gamma$ に対応した Selberg zeta の場合である。

(B1) $$\zeta_{\Gamma\alpha\Gamma}(s,\chi)=\sum_{T:\mathrm{Hyp}^{(1)}}\frac{\operatorname{tr}\chi(T)\log N\{T_0\}}{N\{T\}^{\frac{1}{2}}-N\{T\}^{-\frac{1}{2}}}N\{T\}^{-(s-\frac{1}{2})}$$

と置く。ここで $\mathrm{Hyp}^{(1)}$ は $\Gamma\alpha\Gamma$ の双曲類で Γ の双曲点を固定するものの代表で、T_0 は T の Γ 内の中心化群の生成元、$N\{T\}$ は T の固有値の平方のうち1より大なるものとする。$T(\Gamma\alpha\Gamma)$ に対

するSelbergの跡公式は.

(4) $\sum$ $\mathrm{trace}(T(\Gamma\alpha\Gamma,\lambda))h(\lambda)=\sum$(軌道積分)

という型になる。$\zeta_{\Gamma\alpha\Gamma}(s,\chi)$ は $\mathrm{Re}\,s>1$ で絶対収束し.(4)の右辺の双曲類上の軌道積分は

$$\zeta_{\Gamma\alpha\Gamma}(s,\chi)-\frac{2s-1}{2\beta-1}\zeta_{\Gamma\alpha\Gamma}(\beta,\chi)$$

と書ける。しかし.$\zeta_{\Gamma\alpha\Gamma}$ は無限積の対数微分に表わす事はできない。というのは $\mathrm{Hyp}^{(1)}$ は積について閉じておらず原始的なものの巾に表現できないからである。

(B2) (A2)と同じように

$$\Xi(s)=\Xi_{\mathrm{ell}}(s)\,\Xi_{\mathrm{hyp}^{(1)}}(s)\,\Xi_{\mathrm{hyp}^{(2)}}(s)\,\Xi_{\mathrm{par}}(s)\,\Xi_{\mathrm{Eis}}(s)$$

という関数をつくる事はできる。ここで $\Xi_{\mathrm{hyp}^{(1)}}(s)$ は

$$\zeta_{\Gamma\alpha\Gamma}(s,\chi)=\frac{\Xi'_{\mathrm{hyp}^{(1)}}(s)}{\Xi_{\mathrm{hyp}^{(1)}}(s)}$$

が,$\mathrm{Re}\,s>1$ で成立するように定義する。同じように各共役類の積分は $\frac{d}{ds}\log\Xi_{*}(s)$ で与えられるように定める。しかし、この $\Xi(s)$ は $\mathrm{Re}\,s>\frac{1}{2}$ までは一価正則に接続できるが、$\mathrm{Re}(s)\leq\frac{1}{2}$ には一価には延長できない。($\frac{d}{ds}\log\Xi(s)$ の residue $\notin\mathbb{Z}$)

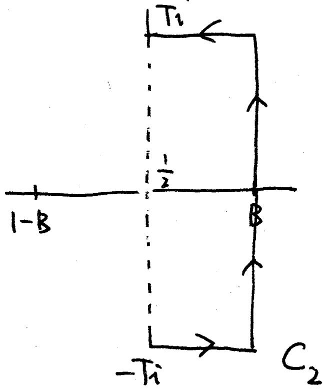
(B3) 関数等式は

$$(5)\qquad \frac{\Xi'(s)}{\Xi(s)}+\frac{\Xi'(1-s)}{\Xi(1-s)}=0$$

で与えられる。

§4. 証明の概略.

Bを十分に大きな正数とし、$1-B\pm iT$ と $B\pm iT$ の4点を頂点とする長方形の周囲をまわる path を C_1, 長方形の右半分をまわる path を C_2 とする。(direction は時計の回転の逆に定める。)
pole があれば T の値を少々変化させて、C_1 上に pole はないものとする。すると (4),(5) より



$$2N_{rar}(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{\Xi'(s)}{\Xi(s)}\, ds$$
$$= \frac{1}{\pi i}\int_{C_2} \frac{\Xi'(s)}{\Xi(s)}\, ds$$

がわかる。$\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ の近傍に於いて

$$\frac{\Xi'_{Eis}(s)}{\Xi_{Eis}(s)} + \frac{\Xi'_{Eis}(1-s)}{\Xi_{Eis}(1-s)} = \mathrm{tr}\left(W(s)\,\Phi'(s)\,\Phi(1-s)\right)$$

が成立する事などに注意すれば

$$2N_{rar}(T) = \frac{1}{\pi}\Big[\arg\ \Xi_{ell}\ \Xi^{(1)}_{hyp}\ \Xi^{(2)}_{hyp}\ \Xi_{par}(s)\Big]_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT}$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_{-T}^{T} \mathrm{tr}\left(W(\tfrac{1}{2}+ir)\ \Phi'(\tfrac{1}{2}+ir)\ \Phi(\tfrac{1}{2}-ir)\right) dr \ + O(1)$$

が得られる。Selberg の跡公式を解析接続し、Stirling の公式を使用する事によって

$$\arg\ \Xi_{ell}\left(\tfrac{1}{2}+iT\right) = O(\log T)$$

$$\arg \Xi_{hyp}^{(2)}\left(\tfrac{1}{2}+iT\right) = O(\log T)$$
$$\arg \Xi_{par}\left(\tfrac{1}{2}+iT\right) = O(T\log T)$$

は、直接的に計算する事ができる。難しいのは $\Xi_{hyp}^{(1)}\left(\frac{1}{2}+iT\right)$ の偏角の評価である。$\Xi_{hyp}^{(1)\prime}(s)/\Xi_{hyp}^{(1)}(s)$ の pole の位置は Selberg の跡公式を通じて知る事ができるが、特に Eisenstein term から生ずる pole の位置が難しく、これらが評価に重大な影響を与える。$\Xi_{Eis}'(s)/\Xi_{Eis}(s)$ の Mittag-Leffler 型の部分分数分解をおこない、実部と虚部は別扱いする事で必要な評価を得る事ができる。定理の直後の注意2により、最終的に両辺の実部をとる事で議論は完結し、

$$\arg \Xi_{hyp}^{(1)}\left(\tfrac{1}{2}+iT\right) = O(T)$$

が得られる。詳しい議論は[2]を見られたい。

参考文献

[1] S. Akiyama : Selberg trace formula for odd weight I, II, Proc. Japan Acad., 64, ser. A (1988), no. 9, 10

[2] S. Akiyama : On a certain sum of traces of Hecke operators (submitted. 日仏解析数論シンポジウムの Proceedings)

[3] S. Akiyama, Y. Tanigawa : Selberg trace formula for Modular correspondences (submitted to Nagoya Math. J.)

[4] D. A. Hejhal : The Selberg trace formula for PSL(2, $\mathbb{R}$), vol. 1,

Lecture Notes in Math., Springer, no. 548, (1976)
[5] D. A. Hejhal : The Selberg trace formula for $PSL(2,\mathbb{R})$, vol. 2, Lecture Notes in Math., Springer, no. 1001, (1983)
[6] J. Fisher : An approach to the Selberg trace formula via the Selberg zeta-function, Lecture Note in Math., Springer, no. 1253, (1987)
[7] M. Kac : Can one hear the shape of a drum?, Amer. Math. Monthly 73 (1966), 1~23
[8] R. S. Phillips, P. Sarnak : On cusp forms for co-finite subgroups of $PSL(2,\mathbb{R})$, Invent. Math., 80 (1985), 339 ~ 364
[9] R. S. Phillips, P. Sarnak : The Weyl theorem and the deformation of discrete groups, Comm. Pure Appl. Math., 38 (1985), 853~866
[10] P. Sarnak : Determinants of Laplacians, Comm. Math. Phys., 110, (1987), 113 ~120
[11] A. Selberg : Harmonic analysis and discontinuous groups on weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc., 20 (1956), 47~87
[12] A. Voros : Spectral functions, special functions and the Selberg zeta function, Comm. Math. Phys., 110 (1987), 439 ~465