数理解析研究所講究録
第689巻 1989年 64-71

Residual Eisenstein series of degree two

東北大. 理. 渡部隆夫
(Takao Watanabe)

序　$G = Sp_4$ を有限次代数体 F 上定義された次数2のシンプレクティック群とし, K をアデール群 $G(\mathbb{A})$ の中の標準的な極大コンパクト部分群とする。$G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K$ 上の L^2-関数のなす Hilbert 空間は直交分解

$$L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K) = L^2(G, K) \oplus L^2(B, K) \oplus L^2(P_1, K) \oplus L^2(P_2, K)$$

を持つことが知られている。但し B は Borel 部分群, P_1, P_2 は極大放物的部分群である。ここでは $L^2(B, K)$ の中の離散スペクトルの空間 $L^2_d(B, K)$ を調べる。

1. G のルート系

極大トーラス, Borel 部分群を

$$T = \{ t(a, b) = \mathrm{diag}(a, b, a^{-1}, b^{-1}) \}$$

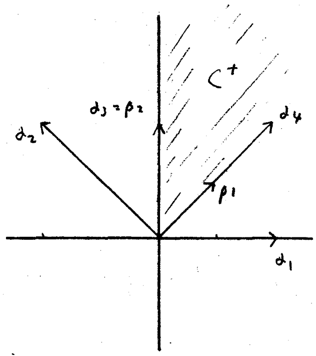
$$B = NT, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} A & S \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix} \middle| A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S = {}^tS \right\}$$

とする。$\beta_i : T \longrightarrow G_m$ $(i = 1, 2)$ を,

$\beta_1(t(a,b)) = a$, $\beta_2(t(a,b)) = ab$

で定義すれば、$\mathrm{Hom}(T, G_m) = \mathbb{Z}\beta_1 + \mathbb{Z}\beta_2$ で、G の (T,B) に関する単純ルートは $\alpha_1 = 2\beta_1 - \beta_2$, $\alpha_2 = 2(\beta_2 - \beta_1)$ と正ルートは α_1, α_2, $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_4 = 2\alpha_1 + \alpha_2$ となる。

α_i に対応するコルートを $\alpha_i^\vee$ とかく。



特に、$\alpha_1^\vee(a) = t(a, a^{-1})$, $\alpha_2^\vee(a) = t(1, a)$ である。$\mathfrak{a} = \mathbb{R}\beta_1 + \mathbb{R}\beta_2$, $\mathfrak{a}^* = \mathbb{R}\alpha_1^\vee + \mathbb{R}\alpha_2^\vee$ とし、ペアリング $\langle\ ,\ \rangle : \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ を $\langle \beta_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ で定める。$\mathbb{R}\beta_1$ $(\mathbb{R}\beta_2)$ に関する対称変換を σ (τ) とすれば、Weyl 群 W は σ, τ で生成される。$C^+ = \mathbb{R}_+\beta_1 + \mathbb{R}_+\beta_2$ は Weyl 部屋となる。

2. $T(\mathbb{A})$ の Langlands 分解

準同型 $H : T(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathfrak{a}^*$ を $H(t(a,b)) = \log|a|_{\mathbb{A}}\,\alpha_1^\vee + \log|ab|_{\mathbb{A}}\,\alpha_2^\vee$ (ここで、$|\ |_{\mathbb{A}}$ はイデールノルム) で定義し、$T^1 = \mathrm{Ker}\,H$ とおく。このとき、$T(F) \subset T^1$, $K_T := T(\mathbb{A}) \cap K \subset T^1$ で、$T(F)\backslash T^1 / K_T$ はコンパクト群となる。F の実素点(複素素点)の個数を r_1 (r_2) とする。対角的な埋め込み、$T(\mathbb{R})_+ := \{t(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}_+\} \hookrightarrow T(\mathbb{R})^{r_1} \times T(\mathbb{C})^{r_2}$ によって $T(\mathbb{R})_+$ を $T(\mathbb{A})$ の部分群とみるとき、直積分解

$T(\mathbb{A}) = T(\mathbb{R})_+ T^1$ をもつ。

$\Omega(T) := \mathrm{Hom}(T(F)\backslash T^1/K_T, \mathbb{C}^\times)$ とすれば、これは $(\mathbb{Z}^{r_1+r_2-1} \times \mathcal{U}(F)^\wedge)^{\oplus 2}$ に同型である。ここで、$\mathcal{U}(F)^\wedge$ は F のイデアル類群の双対群とする。$\chi \in \Omega(T)$ に対して、$G(\mathbb{A})$ 上の関数 Φ_χ を、合成 $G(\mathbb{A}) \longrightarrow N(\mathbb{A})T(\mathbb{R})_+T(F)\backslash G(\mathbb{A})/K = T(F)\backslash T^1/K_T \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}^\times$ で定義する。

3. Eisenstein 級数

$\delta = \rho_1 + \rho_2$ とおく。岩沢分解 $G(\mathbb{A}) = N(\mathbb{A})T(\mathbb{A})K$ により H を $G(\mathbb{A})$ 上の左 $N(\mathbb{A})T(F)$-不変、右 K-不変な写像に拡張する。

今、$\chi \in \Omega(T)$ と $\Lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C} := \mathfrak{a} \otimes \mathbb{C}$ に対して

$$E(g, \Phi_\chi, \Lambda) = \sum_{\gamma \in B(F)\backslash G(F)} e^{\langle \Lambda, H(\gamma g)\rangle} \Phi_\chi(\gamma g)$$

とすれば、右辺の和は $\mathrm{Re}\,\Lambda \in C^+ + \delta$ のとき、$G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ の任意のコンパクト集合上絶対一様収束し、更に $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ 上 Λ の有理関数に解析接続できることが知られている。

さて、$\mathcal{F}(C_c^\infty(\mathfrak{a}))$ を $C_c^\infty(\mathfrak{a})$ の Fourier 変換で得られる Paley - Wiener 型の関数の空間とする。このとき、$L^2(B, K)$ は

$$\hat{\varphi_\chi}(g) = \int_{\mathrm{Re}\,\Lambda = \Lambda_0} \varphi(\Lambda) E(g, \Phi_\chi, \Lambda)\, d\Lambda, \quad \varphi \in \mathcal{F}(C_c^\infty(\mathfrak{a})),\ \chi \in \Omega(T)$$

(Λ_0 は $C^+ + \rho$ の中の固定点) の張る空間 の $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K)$ の中での閉包として与えられる。

$E(g, \Phi_\chi, \Lambda)$ の特異点をみつけるために、その定数項を計算する。今の場合、これは

$$\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} E(ng, \Phi_\chi, \Lambda)\,dn = \sum_{w \in W} e^{\langle w\Lambda + \rho,\, H(g)\rangle} M(w, \Lambda, \chi)\, \Phi_{w\chi}(g)$$

となる。ここで

$$(3.1) \qquad M(w, \Lambda, \chi) = \sum_{\substack{1 \le i \le 4 \\ w(\alpha_i) < 0}} \frac{\xi(\langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle ;\ \chi \circ \alpha_i^\vee)}{\xi(\langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle + 1 ;\ \chi \circ \alpha_i^\vee)}$$

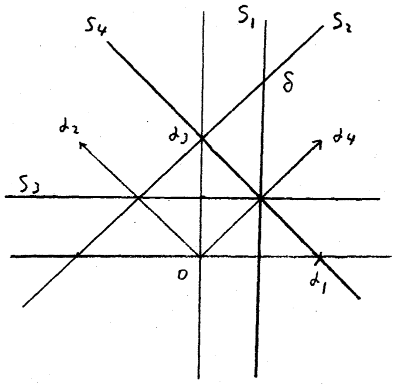
で、$\xi(s ; \chi \circ \alpha_i^\vee)$ は量指標 $\chi \circ \alpha_i^\vee$ に関する Γ-因子付きの Hecke L-関数である。一般に $E(g, \Phi_\chi, \Lambda)$ ($\chi \in \Omega(T)$) の特異点は $M(w, \Lambda, \chi)$ ($w \in W$, $\chi \in \Omega(T)$) の特異点に含まれることが知られており、(3.1) から $M(w, \Lambda, \chi)$ の特異点は $\langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle = c$ という形の $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ の中の超平面の和集合である。更に次の事実がある

(3.2) $L^2(B, K)$ のスペクトル分解に寄与する特異超平面は $\langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle = c$, c は正の実数 という形のものに限る。([5] Theorem 7.4, [6] Theorem 5.12)

従って、Hecke L-関数の性質から (3.2) に適合する特異超平面は $S_i = \{\Lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \mid \langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle = 1\}$, $1 \le i \le 4$ の4つだけである。

4. 剰余 Eisenstein 級数

各 S_i は $S_i = \mathbb{C}u_i + v_i$, $u_1 = \beta_2$, $u_2 = \beta_1$, $u_3 = \alpha_1$, $u_4 = \alpha_2$, $v_i = \alpha_i/2$, $1 \le i \le 4$ とかける。そこで



$$E^i(g, \Phi_\chi, \Lambda) := \int_C E(g, \Phi_\chi, \Lambda + z v_i)\, dz$$

(C は複素平面の原点のまわりの十分小さい円とする)

$\Lambda \in S_i$, $1 \le i \le 4$ を剰余 Eisenstein 級数と呼ぶ。(これは恒等的に 0 になることもある)。例えば、$F = \mathbb{Q}$ のとき、$E^1(g, \Phi_\chi, \Lambda)$ は本質的に

$$\tilde{E}(Z, s) = \sum_{\begin{pmatrix} * & * \\ C & D \end{pmatrix} \in P_1(\mathbb{Z}) \backslash G(\mathbb{Z})} \det(\mathrm{Im}(Z))^s \, |\det(CZ + D)|^{-2s}$$

$Z \in \mathfrak{H}_2$ = 次数 2 の Siegel 上半空間

$$P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_2 & B \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; A \in GL_2,\ B = {}^tB \right\}$$

と同じである。

一般論より、$E^i(g, \Phi_\chi, \Lambda)$ の間にも関数等式の成り立つことが知られている。例えば χ が自明な指標のとき $\Lambda = z u_1 + v_1 \in S_1$ に対して

$$E^1(g, \Phi_\chi, \tau\sigma\tau\Lambda) = \frac{\zeta(z+\frac{3}{2})\,\zeta(2z+1)}{\zeta(z-\frac{1}{2})\,\zeta(2z)} E^1(g, \Phi, \Lambda)$$

$$E^3(g, \Phi_\chi, \tau\Lambda) = \frac{\zeta(z+\frac{1}{2})}{\zeta(z-\frac{1}{2})} E^1(g, \Phi, \Lambda)$$

$$E^3(g, \Phi_\chi, \sigma\tau\Lambda) = \frac{\zeta(z+\frac{1}{2})\,\zeta(2z+1)}{\zeta(z-\frac{1}{2})\,\zeta(2z)} E^1(g, \Phi, \Lambda)$$

となる。但し、$\zeta(z)$ は F の Γ-因子付きの Dedekind ゼータ関数とする。$E^2(g, \Phi_\chi, *)$, $E^4(g, \Phi_\chi, *)$ の間にも同様な関数等式がある。

5. 剰余スペクトル

$1 \leq i \neq j \leq 4$ に対して Λ_{ij} を S_i と S_j の交叉点とする。そして $f^\chi_{ij}(g) = \mathrm{Res}_{\Lambda=\Lambda_{ij}} E^i(g, \Phi_\chi, \Lambda)$ とおく。このとき一般論より ([5] Theorem 7.4, [6] Chapter VI), $L^2_d(B, K)$ は $\{ f^\chi_{ij} \mid 1 \leq i \neq j \leq 4,\ \chi \in \Omega(T) \} \cap L^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / K)$ によって張られることがわかる。

今、$A(F) = \{ \mu \in \mathcal{C}(F)^\wedge \mid \mu^2 = \mu_0 \ (=\text{自明な指標}) \}$ とおき、$\mu \in A(F)$ に対して $\chi(\mu, \mu) \in \Omega(T)$ を $\chi(\mu,\mu)(t(a,b)) = \mu(ab)$ で定義する。このとき直接の計算で次が証明できる。

<u>定理 1</u>. 各 $\mu \in A(F)$ に対して

$$f_\mu = \begin{cases} f_{1,3}^{\chi(\mu,\mu)} & \text{if } \mu \neq \mu_0 \\ f_{1,2}^{\chi(\mu,\mu)} & \text{if } \mu = \mu_0 \end{cases}$$

とおけば, f_μ $(\mu \in A(F))$ は $L^2_d(B, K)$ の直交基である。

特に, $\dim L^2_d(B, K) = \#(A(F)) = [\mathcal{U}(F) : \mathcal{U}(F)^2]$

<u>定理 2</u> 各 $\mu \in A(F)$ に対して $\pi(\mu)$ を f_μ で生成された $G(\mathbb{A})$-加群とする。このとき任意の $\mu \in A(F)$ に対して $\pi(\mu)$ は既約 K-spherical nontempered な保型表現で, $\pi(\mu)$ と $\pi(\nu)$ が同値になるのは $\mu = \nu$ の時に限る。

実際には $\pi(\mu)$ を制限テンソル積分解したときの局所因子 $\pi_v(\mu)$ をすべての素点 v で完全に決定できる。従って $\pi(\mu)$ の standard L-関数を計算できる。

<u>定理 3</u> $\mu \neq \mu_0$ のとき $\pi(\mu)$ の standard L-関数は $\zeta_F(s)\, L(s, \mu)^2\, L(s+1, \mu)\, L(s-1, \mu)$ となる。ここで $\zeta_F(s)$ は F の Dedekind ゼータ関数, $L(s, \mu)$ は μ の Hecke L-関数とする。

References

[1] J. Arthur, Eisenstein series and the trace formula, Proc. Sympo. Pure Math. 33, part 1, Amer. Math. Soc. (1979), 253 - 274.

[2] A. Borel, Automorphic L-functions, Proc. Sympo. Pure Math. 33, part 2, Amer. Math. Soc. (1979), 27 - 61.

[3] Harish - Chandra, Automorphic Forms on Semisimple Lie Groups, Lecture Notes in Math. 62, Springer - Verlag, Berlin, 1968.

[4] S. Helgason, Groups and Geometric Analysis, Academic Press, New York, 1984.

[5] R. P. Langlands, On the Functional Equations Satisfied by Eisenstein Series, Lecture Notes in Math. 544, Springer - Verlag, 1976.

[6] M. S. Osborne and G. Warner, The Theory of Eisenstein Systems, Academic Press, New York, 1981.

[7] T. Watanabe, Residual spectrums of Sp_4, preprint.

[8] A. Weil, Basic Number Theory, 3rd edition, Springer - Verlag, Berlin, 1974.