数理解析研究所講究録
第689巻 1989年 99-116

Eisenstein 級数 と Hecke 環の表現

立教大理　佐藤文広　(Fumihiro SATO)
信州大理　広中由美子 (Yumiko HIRONAKA)

§1. 導入

このノートでは、対称空間上のある種の関数空間の、Hecke環加群としての構造に関する若干の結果を述べたい。そのために、Eisenstein級数を定義し、これが 'Euler積' を持つための条件などを考察し、いくつかの例について述べる。

考えている問題を明らかにするために、GL(n)の場合を説明する。k を $\mathfrak{p}$進体、$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$をその整数環、$q = \#(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p})$, $|\ |_{\mathfrak{p}}$ を$k_{\mathfrak{p}}$のノルム、$G_{\mathfrak{p}} = GL(n,k_{\mathfrak{p}})$, $K_{\mathfrak{p}} = GL(n,\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$とする。Hecke環は

(1.1) $\mathcal{H}(G_{\mathfrak{p}},K_{\mathfrak{p}}) = \{ f : G_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \begin{array}{l}\text{compactly supported}\\ \text{両側}-K_{\mathfrak{p}}\text{不変}\end{array} \}$

で与えられる。この元 f と $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_n) \in \mathbb{C}^n$ に対し

(1.2) $\hat{f}(\nu) = \int_{G_{\mathfrak{p}}} \Phi_\nu(g) f(g) dg;$

但し、dg は $G_{\mathfrak{p}}$ 上の Haar 測度で、$G_{\mathfrak{p}}$ の元 $g = k\begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ $(k \in K_{\mathfrak{p}})$ に対し、

$$\Phi_\nu(g) = \prod_{i=1}^{n} |a_i|_{\mathfrak{p}}^{\nu_i - (n-2i+1)/2}$$

と定める。これにより、球Fourier変換（佐武変換）が得られる：

(1.3) $\hat{\ } : \ (G\ ,K\ ) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\,[q^{\pm\nu_1},\ldots,q^{\pm\nu_n}]^{S_n}.$

ここで、右辺の対称群 S_n は $q^{\pm\nu_i}$ に、添数iの置換として作用する。

特に、f が $K_{\mathfrak{p}}\begin{pmatrix}\pi^{\lambda_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \pi^{\lambda_n}\end{pmatrix}K$ （π は $k_{\mathfrak{p}}$ の素元、$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$）の特性関数のとき、

$$(1.4) \qquad \hat{f}(\nu) = q^{\sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)\nu_i/2} \quad P_\lambda(q^{-\nu_1},\ldots,q^{-\nu_n};q^{-1}),$$

$$P_\lambda(x_1,\ldots,x_n;t) = \sum_{w\in S_n/S_n^\lambda} x_{w(1)}^{\lambda_1}\cdots x_{w(n)}^{\lambda_n}\cdot \prod_{\lambda_i>\lambda_j} \frac{x_{w(i)}-tx_{w(j)}}{x_{w(i)}-x_{w(j)}}$$

で与えられる(cf. [2]C5, [3]§8)。

一方 $G = GL(n,\mathbb{Q})$, $\Gamma = GL(n,\mathbb{Z})$とすると、Hecke環 $\mathcal{H}(G,\Gamma)$は、両側 Γ-剰余類の形式的有限一次結合 $\sum_{[g]\in\Gamma\backslash G/\Gamma} \mathbb{C}[g]$ に積を

$$(1.5) \quad [g][h] = \sum_{[x]} \#\{(i,j)\mid g_ih_j\in[x]\}[x], \quad [g]=\bigcup_i g_i\Gamma,\ [h]=\bigcup_j h_j\Gamma$$

によって入れた $\mathbb{C}$-代数として定義される。両側剰余類の代表元の対応によって、局所的Hecke環の制限tensor積 $\bigotimes_p{}' \mathcal{H}(G_p,K_p)$ （ p は素数）に同型になる。従って、各 p 毎の球Fourier変換を合わせて

$$(1.6) \qquad \mathcal{H}(G,\Gamma) \xrightarrow{\sim} \otimes_p' \mathbb{C}[p^{\pm\nu_1},\ldots,p^{\pm\nu_n}]^{S_n}$$

が得られる。この変換をFourier-Eisenstein変換（大局的佐武変換）と呼ぶ。

以上のようなことを、群 GL(n) を対称空間のひとつの例 $GL(n)\times GL(n)/\Delta(GL(n))$とみなし、対称空間に拡張したい。そのとき、佐武変換の核関数として、局所的には帯球関数を、大局的には Eisenstein 級数を考えれば妥当なのではないかと思われる。

§2. 対称空間

G を $\mathbb{Q}$ 上定義されたreductive代数群、θ を **G** の $\mathbb{Q}$ 上定義された位数２の自己同型とする。θ による **G** の不変部分群 **H** も $\mathbb{Q}$ 上定義された

reductive 代数群で、等質空間 $\mathbf{X} = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ は $\mathbb{Q}$ 上定義された affine 多様体となる。特に $\mathbb{C}$ 上では $\mathbf{GL}(n)$ の直積による既約対称空間は次表の 4 種である。§6 でこれらについて詳しく扱う。

	$\mathbf{G}$	θ	$\mathbf{H}$	$\mathbf{X} \simeq$ ♤	$\mathbf{G}$ の ♤ への作用
1)	$\mathbf{GL}(n)\times\mathbf{GL}(n)$	$(g_1,g_2) \mapsto (g_2,g_1)$	$\Delta(\mathbf{GL}(n))$	$\mathbf{GL}(n)$	$(g_1,g_2)*x = g_1xg_2^{-1}$
2)	$\mathbf{GL}(n)$	$g \mapsto {}^tg^{-1}$	$\mathbf{O}(n)$	$\mathbf{Sym}(n)^{nd}$ (n 次非退化対称行列)	$g*x = gx{}^tg$
3)	$n=2m$ $\mathbf{GL}(2m)$	$g \mapsto J_m{}^tg^{-1}J_m$ $J_m=\begin{pmatrix} 0 & 1_m \\ -1_m & 0 \end{pmatrix}$	$\mathbf{Sp}(n)$	$\mathbf{Alt}(n)^{nd}$ (n 次非退化交代行列)	$g*x = gx{}^tg$
$4)_r$	$\mathbf{GL}(n)$ $(1\leq 2r\leq n)$	$g \mapsto I_{n,r}gI_{n,r}$ $I_{n,r}=\begin{pmatrix} 1_{n-r} & 0 \\ 0 & -1_r \end{pmatrix}$	$\mathbf{GL}(n-r)\times\mathbf{GL}(r)$	$\{x \in \mathbf{GL}(n) \mid$ 対角化可能 固有値は1が n-r ケ -1が r ケ$\}$	$g*x = gxg^{-1}$

§3. 完備化、関数空間

代数群 $\mathbf{G}$、部分群 $\mathbf{H}$、等質空間 $\mathbf{X} = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ 等の $\mathbb{Q}$ 有理点全体を $G = \mathbf{G}(\mathbb{Q})$, $H = \mathbf{H}(\mathbb{Q})$, $X = \mathbf{X}(\mathbb{Q})$ 等で表す。

(3.1) $\mathscr{F} = \{\Gamma_N \mid N \in \mathbb{N}\}$, 但し $\Gamma_N = \{ g \in \mathbf{G}(\mathbb{Z}) \mid g \equiv 1 \pmod{N}\}$

とする。G の部分群 H、等質空間 X の $\mathscr{F}$ による完備化 $\tilde{H}$、$\tilde{X}$ を

$$\tilde{H} = \varprojlim_{\Gamma\in\mathscr{F}} \Gamma\cap H \backslash H, \qquad \tilde{X} = \varprojlim_{\Gamma\in\mathscr{F}} \Gamma\backslash X$$

と定義すると次のことが分かる。

命題 1. i) $\mathbf{G}$ が reductive ならば、$\tilde{G}$ は unimodular である。

ii) H の $\tilde{G}$ における閉包 $\overline{H}$ は $\tilde{H}$ と同型である。

命題２． $X = G\backslash H$ とする。

i) G の X への作用は $\tilde{G}$ の $\tilde{X}$ への連続的作用に延長される。

ii) $\Gamma \in \mathcal{F}$ について、$\bar{\Gamma}$-軌道の代表点は X からとれ、$\bar{\Gamma} * x$ は $\Gamma * x$ の $\tilde{X}$ における閉包 $\overline{\Gamma * x}$ に一致する。これにより $\tilde{\Gamma}\backslash\tilde{X}$ と $\Gamma\backslash X$ は一対一に対応する。

iii) 標準写像 $\tilde{G} \longrightarrow \tilde{X}$ により、同相 $\tilde{G}\backslash\tilde{H} \simeq \tilde{X}$ が導かれる。

$\mathbf{A}_f$ で $\mathbb{Q}$ の adèle環の有限部分を表す。 $\mathcal{F}$ の定める G の位相は、$\mathbf{G}(\mathbf{A}_f)$ の部分群としての相対位相と一致し、 G の $\mathbf{G}(\mathbf{A}_f)$ における閉包 $\bar{G}$ は $\tilde{G}$ と同型になる。命題２-iii)より、標準写像 $\tilde{X} \longrightarrow \mathbf{X}(\mathbf{A}_f)$が得られる。

以下、 $\mathbf{G}$ は reductive とする。 $\tilde{G}$ の Hecke環は

$$\mathcal{A}(\tilde{G}) = \{f: \tilde{G} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \text{locally compact, compactly supported}\}$$

で、積は $\tilde{G}$ の Haar測度 dg (cf. 命題 1-i) を用いて

$$(3.2) \qquad (f_1 * f_2)(h) = \int_{\tilde{G}} f_1(g) f_2(g^{-1}h)\,dg, \quad f_1, f_2 \in \mathcal{A}(\tilde{G}), \ h \in \tilde{G}$$

で定義される。 $\Gamma \in \mathcal{F}$ に対し、Hecke環 $\mathcal{A}(\tilde{G}, \bar{\Gamma})$ を

$$\mathcal{A}(\tilde{G}, \bar{\Gamma}) = \{f \in \mathcal{A}(\tilde{G}) \mid f(\gamma_1 g \gamma_2) = f(g), \ \gamma_1, \gamma_2 \in \bar{\Gamma}, \ g \in \tilde{G}\}$$

と定めると、両側 $\bar{\Gamma}$-剰余類の特性関数によって生成される。一方 $\mathcal{A}(G, \Gamma)$ は、両側 Γ-剰余類の形式的一次結合 $\sum_{[g] \in \Gamma\backslash G/\Gamma} \mathbb{C}\,[g]$ に (1.5) のように積を入れて定義される。両側 $\bar{\Gamma}$-剰余類の代表元は G からとれるから、代表元の対応により $\mathcal{A}(\tilde{G}, \bar{\Gamma})$ は $\mathcal{A}(G, \Gamma)$ と同一視される。又、関数空間

$$\mathcal{S}(X) = \{f: X \longrightarrow \mathbb{C} \mid \text{ある } \Gamma\text{-軌道の特性関数の有限個の一次結合 } (\Gamma \in \mathcal{F})\}$$

$$\mathcal{S}(\Gamma\backslash X) = \{f: X \longrightarrow \mathbb{C} \mid \Gamma\text{-軌道の特性関数の有限個の一次結合}\}$$

$\mathcal{S}(\tilde{X}) = \{f: \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \text{locally constant, compactly supported}\}$

$\mathcal{S}(\bar{\Gamma}\backslash\tilde{X}) = \{\Phi \in \mathcal{S}(\tilde{X}) \mid f(\gamma * x) = f(x),\ \ \gamma \in \bar{\Gamma},\ x \in \tilde{X}\}$

が定義され、命題2-ii）によって、$\mathcal{S}(\Gamma\backslash X)$ は $\mathcal{S}(\bar{\Gamma}\backslash\tilde{X})$ と同一視される。$\mathcal{S}(\tilde{X})$ は

(3.3) $\quad (f*\Phi)(x) = \int_{\tilde{G}} f(g)\Phi(g^{-1}*x)dg, \quad f \in \mathcal{A}(\tilde{G}),\ \Phi \in \mathcal{S}(\tilde{X}),\ x \in \tilde{X}$

によって、$\mathcal{A}(\tilde{G})$-加群になり、$\mathcal{S}(\Gamma\backslash X)$ は $\mathcal{A}(G, \Gamma)$-加群となる。この構造を調べることが目的の一つである。

§4. Eisenstein 級数

§2の（$\mathbf{G}, \theta, \mathbf{X}$）が与えられているとする。$\mathbf{P}$ を θ-anisotoropic parabolic 部分群、即ち $\mathbf{L} = \mathbf{P} \cap \theta(\mathbf{P})$ が $\mathbf{P}$ と $\theta(\mathbf{P})$ の Levi 部分群となるparabolic部分群とする。$\mathbf{N} = Ru(\mathbf{P})$（unipotent根基）とする。$\mathbf{L}$ の部分群 $\mathbf{L}$ で、$N_{\mathbf{L}}(\mathbf{L}_-) \supset \mathbf{L} \cap \mathbf{H}$、$\mathbf{L} = (\mathbf{L} \cap \mathbf{H})\mathbf{L}_-$をみたすものをとり、$\mathbf{P}_- = \mathbf{L}_- \cdot \mathbf{N}$ とおく。$\mathbf{X}$ の Zariski 開集合である $\mathbf{P}$-軌道 $\mathbf{\Omega}$ をとる。群 $*$の $\mathbb{Q}$ 上定義された有理指標の全体を $\mathcal{X}(*)_{\mathbb{Q}}$ で表す。次の仮定をおく：

(A1)任意の $x \in \Omega = \mathbf{\Omega}(\mathbb{Q})$ について $\mathcal{X}(\mathbf{P}_{-,x}{}^{0})_{\mathbb{Q}} = \{1\}$。

但し、$\mathbf{P}_{-,x}{}^{0}$ は $\mathbf{P}_{-,x} = \{p \in \mathbf{P}_- \mid p*x = x\}$ の連結成分を表す。P^+ を $\mathbf{P}_-(\mathbb{R})$ の連結成分とする。δ を $\mathbf{P}$ のある $\mathbb{Q}$-有理指標で P^+ への制限が P^+上の左不変測度の module になるものとする。$\mathbf{\Omega}$ 上に $\delta^{-1}(p)$ を乗法因子とする有理微分形式$w(x)$ が定まる：$w(p*x) = \delta^{-1}(p)w(x)$。

(4.1) $\qquad \mathbf{\Omega}(\mathbb{R}) = \bigcup_{i=1}^{\nu} \Omega^{(i)}$

を P^+-軌道分解とすると、$|w|$は各 $\Omega^{(i)}$ 上の $|\delta|$ を乗法因子とする P^+-相対不変測度を定める。さて $x \in \Omega^{(i)} \cap \Omega$ について、P^+_x 上の

Haar測度 $d\mu_x$ を次のようにとる：任意の $f\in L^1(P^+,dg)$ について

(4.2) $\displaystyle\int_{P^+} f(g)dg = \int_{\Omega(i)} |w(y)| \int_{P^+_x} f(gh)d\mu_x(h)\ ,\quad y=g*x$ 。

$\Gamma\in\mathfrak{F}$ について $\Gamma_{P_-} = \Gamma\cap P_-$ とおき、1つの $\Gamma_0\in\mathfrak{F}$ を定めて、

(4.3) $\displaystyle\mu(\Gamma_{P_-}*x) = \int_{\overline{\Gamma_{P_-}}*x} d_\Omega(y) = [\Gamma_{P_-}:\Gamma_{0,P_-}]\int_{P^+_x/\Gamma_{P_-}*x} d\mu_x(h)$

とすると、$\tilde{\Omega}$ 上の $\tilde{P}_-$-相対不変測度 $d_\Omega(y)$が定まる（$\overline{\Gamma_{P_-}}$ は $\mathbf{G}(\mathbf{A}_f)$ における Γ_{P_-} の閉包）。

X 上の恒等的には 0 でない $\mathbb{Q}$ 上定義された有理関数 f が P-相対不変式であるとは、ある $\chi\in\mathfrak{X}(\mathbf{P})_\mathbb{Q}$ について $f(p*x) = \chi(p)f(x)$ $(p\in P,\ x\in X)$ が成立するときにいう。自由アーベル群 $\{\chi\in\mathfrak{X}(\mathbf{P})_\mathbb{Q} \mid \chi$ は X 上のある P-相対不変式に対応$\}$ の生成元を $\chi_1,\dots,\chi_\ell$ とし、対応する P-相対不変式を $f_1,\dots,f_\ell$ とする。

$x\in\tilde{\Omega}$ と $\nu = (\nu_1,\dots,\nu_\ell)\in\mathbb{C}^\ell$ に対し、標準写像 $\tilde{\Omega}\longrightarrow\tilde{X}$, $\tilde{X}\longrightarrow\mathbf{X}(\mathbf{A}_f)$ を通して

(4.4) $\displaystyle\|f(x)\|^\nu = \prod_{i=1}^{\ell} |f_i(x)|_{\mathbf{A}_f}^{\nu_i}\ ,\qquad \|\chi(p)\|^\nu = \prod_{i=1}^{\ell} |\chi_i(p)|_{\mathbf{A}_f}^{\nu_i}$

と定義する。先の $\delta(p)$, $p\in\tilde{P}$ に対し、$\mu\in\mathbb{Q}^\ell$ を次式で定めておく：

(4.5) $|\delta(p)| = \|\chi(p)\|^\mu$ 。

$\Phi\in\mathcal{S}(\tilde{X})$, $s = (s_1,\dots,s_\ell)\in\mathbb{C}^\ell$, $1\le i\le\nu$ (cf.(4.1)) に対し、

(4.6) $\displaystyle E_i(\Phi:s) = \int_{\Omega(i)} \|f(x)\|^{s+\mu}\,\Phi(x)d_\Omega(x)$

とおく。次の仮定をおく：

(A2) $\mathbb{R}^\ell$ 内のある領域 $\mathcal{D}$ が存在し、$\mathrm{Re}(s)\in\mathcal{D}$ ならば (4.6) の右辺は絶対収束する。

補題1．Φ が $\overline{\Gamma}*x$ ($x\in X$, $\Gamma\in\mathcal{F}$) の特性関数 $ch_{\overline{\Gamma}*x}$ のとき、絶対収束する s の範囲で

$$(4.7)\qquad E_i(\Phi;s) = \sum_{y\in\Gamma_{P_-}\backslash\Omega^{(i)}\cap\Gamma*x} \frac{\mu(\Gamma_{P_-}*y)}{\prod_{i=1}^{\ell}|f_i(x)|^{s_i}}$$

が成立する、但し $|\ |$ は絶対値を表す。

(注意) (4.7) の右辺が (A2) の $\mathcal{D}$ に関して絶対収束すると仮定すると (4.7) を定義式と思えば (4.7) が収束する範囲で (4.6) が成立する。$\mathcal{S}(\tilde{X})$ の元は補題1の Φ 達の有限和だから、(4.6)、(4.7)のどちらを定義式と思っても同じである。

次の仮定をおく：

(A3) G のある数論的部分群 Γ_* について $N_G(\Gamma_0)\supset\Gamma_*$ かつ $G=\Gamma_* P$。

このとき、$\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}=\{\mathbb{Q}$ 上定義された $\mathbf{P}$ と共役な $\mathbf{G}$ の部分群$\}$ とすると、任意の $\mathbf{P}'\in\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$ はある $\gamma_{P'}\in\Gamma_*$ によって

$$(4.8)\qquad \mathbf{P}' = {}^{\gamma_{P'}}\mathbf{P} \quad (=\gamma_{P'}\mathbf{P}\gamma_{P'}^{-1})$$

と表され、

$$(4.9)\qquad \|f(P'|x)\| = \|f(\gamma_{P'}^{-1}*x)\|,\qquad x\in\mathbf{\Omega}(\mathbf{A}_f)$$

は $\gamma_{P'}$ のとり方によらず定義される。$\mathbf{P}$ の代わりに $\mathbf{P}'$ を用いて前のように定義されるものを添字 P' をつけて表す。

$$(4.10)\qquad \mathbf{\Omega}_{P'} = \gamma_{P'}\Omega_P\ 、\quad \Omega_{P'}^{(i)} = \gamma_{P'}\Omega_P^{(i)}\qquad (1\le i\le\nu)$$

としてよい。$d_{\Omega_{P'}}(x)$ は $\Gamma_{0,P'}=\Gamma_0\cap P'_-$ に基づいて正規化した測度とする。これらは (4.8) をみたす $\gamma_{P'}$ のとり方によらず定まる。

ここで $\mathbf{P}'\in\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$, $\Phi\in\mathcal{S}(\tilde{X})$, $s\in\mathbb{C}^{\ell}$, $1\le i\le\nu$ に対し

(4.11) $$E_i(P'|\Phi:s) = \int_{\Omega_{P'}(i)} \|f(P'|x)\|^{s+\mu}\,\Phi(x)\,d_{\Omega_{P'}}(x)$$

と定義する。特に、$\mathbf{P}' = \mathbf{P}$ のときが (4.6) である。次の補題によって、(A2) の $\mathcal{D}$ に関して (4.11) の右辺が絶対収束することが分かる。

補題２．$\Phi \in \mathcal{S}(\tilde{X})$, $\gamma \in \Gamma_*$ について、

$$E_i({}^{\gamma}P|\Phi:s) = E_i(P|{}^{\gamma^{-1}}\Phi:s),$$

が成立する。但し、${}^{\gamma^{-1}}\Phi(x) = \Phi(\gamma * x)$, $x \in \tilde{X}$ とする。

以下では、記号の繁雑さを避けるために、$\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$ の任意の元を $\mathbf{P}$ と表し、§4 の初めに定めた $\mathbf{P}$ は $\mathbf{P}_0$ と表す。特に $P_0 = \mathbf{P}_0(\mathbb{Q})$ である。一般に $\mathcal{S}(\tilde{X})$ への G の作用を

(4.12) $${}^{g}\Phi(x) = \Phi(g^{-1} * x), \quad \Phi \in \mathcal{S}(\tilde{X}), \quad g \in G,\ x \in \tilde{X}$$

と定める。又、$g \in G$, $\mathbf{P} \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$ に対し

(4.13) $$\|\chi_{\Gamma_*}(g;P)\| = \|\chi(p(g\gamma_P))\|$$

は γ_P のとり方に依らず定義される。但し、$g \in G$ について $p(g)$ は $p(g)^{-1}g \in \Gamma_*$ となる P_0 の元を表す (cf.(A3))。E_i への G の作用の寄与について次のことが分かる。

命題３．$\Phi \in \mathcal{S}(\tilde{X})$、$g \in G$ について

$$E_i(P|{}^{g}\Phi:s) = \|\chi_{\Gamma_*}(g^{-1};P)\|^{-s_i}\, E_i({}^{g^{-1}}P|\Phi:S)$$

が成立する。

系．ある $\Gamma \in \mathcal{F}$ について $\Phi \in \mathcal{S}(\overline{\Gamma}\backslash\tilde{X})$ ならば、任意の $\gamma \in \Gamma$ について

$$E_i({}^{\gamma}P|\Phi:s) = E_i(P|\Phi:s)$$

が成立する。

（予想）　$E_i(P|\Phi:s)$ は $\mathbb{C}^\ell$ 上の meromorphic関数に解析接続され、Weyl群の作用について Langlands の Eisenstein級数と類似の関数等式をみたす。(cf.[4],[5])

§5. Hecke環の作用

$\bar{\Gamma}_*$ は compact群であるから、$\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{G}/\tilde{P}_0 = \bar{\Gamma}_*/\bar{\Gamma}_* \cap \tilde{P}_0$ 上に $\bar{\Gamma}$-不変測度 dP が存在する。

$$\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{P}}) = C^\infty(\tilde{\mathcal{P}}) = \{\Psi : \tilde{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathbb{C} \mid \text{locally constant}\}$$

と定義すると、これは次の作用で $\mathcal{H}(\tilde{G})$- 加群となる：

$$(5.1) \qquad (\Psi \underset{s}{*} f)(P) = \int_{\tilde{G}} \Psi({}^gP) \, \| \chi_{\Gamma_*}(g;P) \|^{s+\mu} f(g) dg,$$

ここで、$\Psi \in \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{P}})$, $f \in \mathcal{H}(\tilde{G})$, $P \in \tilde{\mathcal{P}}$, $s \in \mathbb{C}^\ell$ で、μ は (4.5) で与えた $\mathbb{Q}^\ell$ の元。$\Phi \in \mathcal{S}(\tilde{X})$, $\Psi \in \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{P}})$, $s \in \mathbb{C}^\ell$, $1 \le i \le \nu$ について

$$(5.2) \qquad \mathcal{E}_i(\Psi|\Phi : s) = \int_{\tilde{\mathcal{P}}} E_i(P|\Phi:s) \Psi(P) dP$$

は $E_i(P|\Phi:s)$ が絶対収束する s の範囲で pairing

$$\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{P}}) \times \mathcal{S}(\tilde{X}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

を与える。$\mathcal{H}(\tilde{G})$ の作用の pairing への寄与について次のことがわかる。

命題4.　$f \in \mathcal{H}(\tilde{G})$, $\Psi \in \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{P}})$, $\Phi \in \mathcal{S}(\tilde{X})$ について、

$$\mathcal{E}_i(\Psi | f*\Phi : s) = \mathcal{E}_i(\Psi \underset{s}{*} f | \Phi : s)$$

が成立する。

$\Gamma \in \mathcal{F}$ をとり、$\tilde{\mathcal{P}}$ の $\bar{\Gamma}$-軌道の代表 $P_1, \ldots, P_t$ を決めておく。$1 \le i \le \nu$ について、Fourier-Eisenstein変換を

$$(5.3)\qquad \begin{aligned} \mathbf{E}_i \ :\ \mathcal{S}(\Gamma\backslash X) &\longrightarrow \{\text{Direchlet series}\}^t \\ \Phi &\longmapsto \mathbf{E}_i(\Phi:S) = \begin{pmatrix} E_i(P_1|\Phi:s) \\ \vdots \\ E_i(P_t|\Phi:s) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

によって定義する (cf. (4.6),(4.11) , $1\le i\le\nu$)。命題４を用いて Eisenstein級数への Hecke環の作用について次の定理を得る。

定理．$\mathbb{C}$-代数としての準同型

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(G,\Gamma) &\longrightarrow M_t(\mathbb{C}(p^{s_1},\ldots,p^{s_\ell}\ |\ p\text{は素数})) \\ f &\longmapsto A(f:s) \end{aligned}$$

が存在して、 $\Phi\in\mathcal{S}(\Gamma\backslash X)$ について、

$$\mathbf{E}_i(f*\Phi:s) = A(f:s)\ \mathbf{E}_i(\Phi:s)$$

が成立する。特に $t=1$ のとき、$\mathbf{E}_i(\Phi:s)$ は $\mathcal{A}(G,\Gamma)$-同時固有関数で

$$A(f:s) = \int_{\tilde{G}} \|\chi(p(g))\|^{s+\mu} f(g)dg$$

となる。ここで $g\in\tilde{G}$ に対し $p(g)\in\tilde{P}_0$ は $p(g)^{-1}g\in\bar{\Gamma}_*$ によって定める (cf. (A3))。

（注意）定理は $\mathbf{E}_i$ が $\mathcal{A}(G,\Gamma)$-準同型とみなせることを主張している。

§6. Eisenstein級数の Euler積分解

$\Phi\in\mathcal{S}(\tilde{X})$, $P\in\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}$, $s\in\mathbb{C}^\ell$ について

$$(6.1)\qquad E(\Phi:s) = \sum_{i=1}^{\nu} E_i(P_0|\Phi:s)$$

と定義する(cf. (4.11))。§4,5 の結果は添字 i を省いた形でそのまま成立している。

$\mathbf{G}(\mathbf{A}_f)$ の compact 開部分群 $K = \prod_p K_p$, $K_p \subset \mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$ をとっておく。$\phi_p \in \mathcal{S}(\mathbf{X}(\mathbb{Q}_p))$, $s \in \mathbb{C}^\ell$ について

$$(6.4) \qquad E_p(\phi_p:s) = \int_{\mathbf{\Omega}(\mathbb{Q}_p)} \prod_{i=1}^{\ell} |f_i(x)|_p^{s_i} \phi_p(x) \lambda_p^{-1} |w(x)|_p$$

と定義する。但し、$\{\lambda_p\}$ は $\mathbf{\Omega}(\mathbf{A}_f)$ の収束因子。$|w(x)|_p$ は $\mathbf{P}_0(\mathbb{Q}_p)$-相対不変測度で乗法因子は $|\delta(p)^{-1}|_p = \prod_{i=1}^{\ell} |\chi_i(p)|_p^{-\mu_i}$ (cf. (4.5))であるから、(6.4) の右辺は $\mathrm{Re}(s_i) > \mu_i$ で絶対収束し、$\mathbb{C}^\ell$ まで $p^{s_1}, \ldots, p^{s_\ell}$ の有理関数として解析接続される。

定理. $\mathbf{P}_{0,-}$ が次の条件 (A4) をみたすとする:

(A4) i) 任意の $\mathbb{Q}$ の拡大体 k について、$\mathbf{\Omega}(k)$ は $\mathbf{P}_{0,-}(k)$- 軌道をなす。

ii) 任意の $x \in \Omega$ について、$P_{0,-,x}$ は強近似定理をみたす。

iii) $K \cap \mathbf{P}_{0,-}(\mathbf{A}_f)$ の開部分群 K_- で $\tilde{P}_{0,-}$ を正規化し、$\mathbf{P}_{0,-}(\mathbf{A}_f) = K \cdot \tilde{P}_{0,-}$ となるものが存在する。

このとき、$\Phi = \prod_p \phi_p \in \mathcal{S}(K \backslash \mathbf{X}(\mathbf{A}_f))$ $(= \otimes_p' \mathcal{S}(K_p \backslash \mathbf{X}(\mathbb{Q}_p)))$ について、

$$(6.5) \qquad E(\Phi:s) = c \cdot \prod_p E_p(\phi_p:s)$$

が成立する。ここで、c は正の定数で Φ に依らない。測度を適当に正規化すれば $c = 1$ にできる。

(注意) $\mathbf{P}_{0,-}$ が (A4) をみたしているときは $\Gamma = K \cap G$ について

$$\mathcal{S}(\Gamma \backslash X)_{gen} = \mathrm{Im}(\mathcal{S}(K \backslash \mathbf{X}(\mathbf{A}_f)) \longrightarrow \mathcal{S}(\Gamma \backslash X))$$

とおくと、

$$\mathbf{E} : \mathcal{S}(\Gamma \backslash X)_{gen} \longrightarrow \{\otimes_p' \mathbb{C}(p^{s_1}, \ldots, p^{s_\ell})\} \times E(\Phi_0:s)$$

となる。但し、Φ_0 は適当な基点 x_0 に対し $K*x_0$ の特性関数 ch_{K*x_0} とする。この変換の考察は局所論に帰着する。又、(6.5) の左辺の収束が分かれば逆に (A2) が保証される。§7 で扱う例では、$\mathcal{A}(\Gamma\backslash X)_{gen} = \mathcal{A}(\Gamma\backslash X)$ である。

§7. $\mathbf{GL}(n)$ の対称空間

§2 の例を思い出す。**1)** は Euler 積を持たない (cf.[6])が、残りの３種の $\mathbb{Q}$-split form は Euler 積を持つことが分かる。ここではその結果をまとめておく。

Case 2)

$$\mathbf{P} = \mathbf{B}\times\overline{\mathbf{B}},\quad \mathbf{P}\_ = \mathbf{B}\times\overline{\mathbf{N}}$$

とする。但し、$\mathbf{B} = \{g\in \mathbf{GL}(n) \mid g_{ij}=0\ (1\le i<j\le n)\}$, $\mathbf{N} = \{b\in \mathbf{B} \mid b_{ii}=1\ (1\le i\le n)\}$ で、$-$ は転値を表す。i次小行列式 $d_i(x), 1\le i\le n$ が $\mathbf{X}$ 上の $\mathbf{P}$-相対不変式の基をなす。

$$\mathbf{\Omega} = \{\ x\in \mathbf{GL}(n) \mid \prod_{i=1}^{n} d_i(x) \neq 0\ \},$$

$$\Gamma_* = \Gamma_0 = GL_n(\mathbb{Z})\times GL_n(\mathbb{Z}) \quad (= \Gamma \ とおく),$$

$$K = \prod_p GL_n(\mathbb{Z}_p)\times \prod_p GL_n(\mathbb{Z}),\quad K\_ = \{\ (\begin{pmatrix} u_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & u_n \end{pmatrix}, 1)\in K\ \}$$

とする。$\Phi = \prod_p \phi_p \in \otimes_p' \mathcal{A}(K\backslash\mathbf{X}(\mathbf{A}_f))$ について、(6.5)の右辺は $\mathrm{Re}(s_i)>2$, $1\le i\le n-1$ ならば絶対収束するので($\mu = (\overbrace{2,\ldots,2,1-n}^{n})$)、A1～A4 をみたす。$t = \nu = 1$ であり、$\mathcal{A}(K\backslash\mathbf{X}(\mathbf{A}_f))$ と $\mathcal{A}(\Gamma\backslash X) = \mathcal{A}(GL_n(\mathbb{Q}), GL_n(\mathbb{Z}))$ は自然に同一視され、本質的には §1 の場合となる。

変数変換

$$\begin{cases} s_i = -z_i+z_{i+1}-1, & 1\le i\le n-1 \\ s_n = -z_n+(n-1)/2 & \end{cases}$$

を行うと、次のようにまとめられる。

定理．i) $\Phi = \prod_p \phi_p \in \mathcal{S}(K\backslash \mathbf{X}(\mathbf{A}_f))$ について

$$E(\Phi:z) = c\cdot\prod_p \hat{\phi}_p(-z)\cdot \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{\xi(z_j-z_i)}{\xi(z_j-z_i+1)},$$

が成立する。ここで c は Φ に依らない正の定数、$\hat{\phi}_p(-z)$ は (1.2) で定義され、$\xi(\ )$ は Riemann zeta 関数である。

ii) $\Phi \in \mathcal{S}(\Gamma\backslash X)$ について $\tilde{E}(\Phi:z) = E(\Phi:z)/E(ch_\Gamma:z)$ とおくと、

$$\tilde{E} : \mathcal{S}(\Gamma\backslash X) \xrightarrow{\sim} \otimes_p{}' \mathbb{C}[p^{\pm z_1},\ldots,p^{\pm z_n}]^{S_n}$$

は §1 の大局的佐武変換 (1.6) に他ならない。

（注意）i)の計算については、[4]§3 を参照されたい。以上のように見ると、大局的佐武変換が Eisenstein級数を核関数とする変換として直接大局的に定義される。

Case 3), n = 2m (cf. [1])

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_- = \{g=(g_{ij})_{1\leq i,j\leq m} \in \mathbf{GL}(2m) \mid g_{ij} = 0 \ (1\leq i<j\leq m)\}$$

とする。$x\in \mathbf{X}$ について $Pf_i(x)$ で x の左上 2i 次の小行列の Pfaffian を表すと、$Pf_i(x)$, $1\leq i\leq m$ が $\mathbf{X}$ 上の $\mathbf{P}$-相対不変式の基をなす。

$$\mathbf{\Omega} = \{ x\in \mathbf{X} \mid \prod_{i=1}^{m} Pf_i(x) \neq 0 \},$$

$$\Gamma = \Gamma_0 = GL_n(\mathbb{Z}) \ (= \Gamma \text{ とおく }),$$

$$K = \prod_p GL_n(\mathbb{Z}_p), \quad K_- = \left\{ \begin{pmatrix} g_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_m \end{pmatrix} \in K \right\}$$

とする。$\Phi = \prod_p \phi_p \in \mathcal{S}(K\backslash \mathbf{X}(\mathbf{A}_f))$ について (6.5) の右辺が $Re(s_i)>4$, $1\leq i\leq m-1$ ならば絶対収束するので($\mu = \underbrace{(4,\ldots,4,2(1-m))}_{m}$)、A1 ~ A4 を

みたす。$t=\nu=1$ であり、$\mathcal{S}(K\backslash\mathbf{X}(\mathbf{A}_f))$ と $\mathcal{S}(K\backslash X)$ は自然に同一視され、局所論に帰着する。

変数変換

$$\begin{cases} s_i = -z_i+z_{i+1}-2, & 1\le i\le m-1 \\ s_i = -z_m+m-1 \end{cases}$$

を行うと、次のようにまとめられる。

定理. i) $\Phi=\prod_p \phi_p \in \mathcal{S}(K\backslash\mathbf{X}(\mathbf{A}_f))$ について

$$E(\Phi:z) = c\cdot\prod_p \hat{\phi}_p(-z)\cdot \prod_{1\le i<j\le m} \frac{\zeta(z_j-z_i-1)}{\zeta(z_j-z_i+1)}$$

が成立する。ここで c は Φ に依らない正の定数、$\zeta(\ )$ は Riemann zeta 関数であり、$\hat{\phi}_p(-z)$ は

$$\hat{\phi}_p(-z) = \int_{\mathbf{X}(\mathbb{Q}_p)} \phi_p(x)\Psi_z^{(p)}(x)\,|dx|_p$$

で定義され、この $\Psi_z^{(p)}(x)$ $(\in \mathcal{C}^\infty(\Gamma\backslash\mathbf{X}(\mathbb{Q}_p)))$ は $\mathbf{X}(\mathbb{Q}_p)$ 上の球関数で具体的に計算されている(cf. [1]Th.3)。

ii) $\Phi\in\mathcal{S}(\Gamma\backslash X)$ について $\tilde{E}(\Phi:z) = E(\Phi:z)/E(ch_{\Gamma * J_m}:z)$ とおくと、

$$\tilde{E} : \mathcal{S}(\Gamma\backslash X) \xrightarrow{\sim} \bigotimes_p{}' \ \mathbb{C}[p^{\pm z_1},\dots,p^{\pm z_m}]^{S_m}$$

なる $\mathcal{H}(G,\Gamma)$- 同型が得られる。特に $\Phi=\prod_p\phi_p\in\mathcal{S}(\Gamma\backslash X)$, $f=\prod_p f_p \in \mathcal{H}(G,\Gamma)=\bigotimes_p{}' \mathcal{H}(\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p),K_p)$ については

$$\tilde{E}(f*\Phi:z) = \prod_p \tilde{f}_p(-z)\cdot\hat{\phi}_p(-z)$$

が成立する。ここで

$$\tilde{f}_p(-z) = \hat{f}_p(-z_1+\tfrac{1}{2},-z_1-\tfrac{1}{2},\dots,-z_m+\tfrac{1}{2},-z_m-\tfrac{1}{2}) \quad (\text{右辺は}(1.2))$$

である。

· **Case 4)$_r$** , $1 \le 2r \le n$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} *\ddots * & * & * \\ \hline 0 & * & * \\ \hline 0 & & *\ddots * \end{pmatrix}\begin{matrix} \}r \\ \\ \}r \end{matrix} \subset \mathbf{G}, \quad \mathbf{P}_- = \begin{pmatrix} *\ddots * & * & * \\ \hline 0 & 1 & * \\ \hline 0 & & *\ddots * \end{pmatrix}\begin{matrix} \}r \\ \\ \}r \end{matrix} \subset \mathbf{P},$$

とする。 $x \in \mathbf{X}$ に対し x の左下の i次小行列式を $d_i(x)$ とおくと、 $d_i(x)$, $1 \le i \le r$ が $\mathbf{X}$ 上の $\mathbf{P}$-相対不変式の基をなし、対応する指標 χ_i は

$$p = \left(\begin{array}{c|c|c} a_1 \ddots a_r & & * \\ \hline & T & \\ \hline 0 & & b_r \ddots b_1 \end{array}\right) \text{ に対し } \chi_i(p) = (a_1 \cdots a_r)^{-1}(b_1 \cdots b_r) \text{ で与え}$$

られる。

$$\boldsymbol{\Omega} = \{\, x \in \mathbf{X} \mid \prod_{i=1}^{r} d_i(x) \neq 0 \,\},$$

$$\Gamma_0 = \Gamma_* = \mathbf{G}(\mathbb{Z}) \ (= \Gamma \text{ とおく}),$$

$$K = \prod_p \mathbf{G}(\mathbb{Z}_p), \quad K_- = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} u_1 \ddots u_r & 0 \\ \hline 0 & 1 \ddots 1 \end{array}\right) \in K \right\}$$

とする。 $\Phi = \prod_p \phi_p \in \mathcal{S}(K \backslash \mathbf{X}(\mathbf{A}_f))$ について (6.5) の右辺が $\mathrm{Re}(s_i) > \mu_i$, $1 \le i \le r$ ($\mu = (\underbrace{2,\ldots,2}_{r}, n-2r+1)$) ならば絶対収束するので、A1～A4がみたされている。 $t = \nu = 1$ である。 $\Gamma \backslash X$ の代表系は

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline \begin{matrix} & & 2a_r^{-1} & \\ & \iddots & & 0 \\ 2a_1^{-1} & & & \end{matrix} & \begin{matrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{matrix} \end{array}\right) \begin{matrix} \}n-r \\ \\ \}r \end{matrix} \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{n-r} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{r} \end{array} , \quad \begin{cases} a_i \in \mathbb{N} \\ a_r \mid a_{r-1} \cdots a_2 \mid a_1 \end{cases}$$

$K_p\backslash\mathbf{X}(\mathbb{Q}_p)$ の代表系は

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & & \\ 0 & & & 1 & & & & \\ \hline & 2p^{-e_r} & & & -1 & & & \\ & & 0 & & & -1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ 2p^{-e_1} & & & & & & & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \}\,n-r \\ \\ \}\,r \end{array}, \quad \left\{\begin{array}{l} e_i \in \mathbb{Z} \\ e_1 \geq \cdots\cdots \geq e_r \geq 0 \end{array}\right.$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{n-r}\qquad\underbrace{\qquad\qquad}_{r}$$

の形にとれるので、$\mathcal{S}(\Gamma\backslash X)$ と $\mathcal{S}(K\backslash\mathbf{X}(\mathbf{A}_f)) \simeq \bigotimes_p{}' \mathcal{S}(K_p\backslash\mathbf{X}(\mathbb{Q}_p))$ は自然に同一視され、全ては局所論に帰着する。

簡単のために以下 $G_p = \mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$, $\Omega_p = \mathbf{\Omega}(\mathbb{Q}_p)$, $X_p = \mathbf{X}(\mathbb{Q}_p)$ と書く。$x \in \Omega_p$, $s = (s_1,\ldots,s_r) \in \mathbb{C}^r$ について

$$\zeta_p(x:s) = \int_{K_p'} \prod_{i=1}^{r} |d_i(x)|_p^{s_i} dk,$$

と定義する。但し、dk は K_p 上の Haar測度で $\int_{K_p} dk = 1$、$K_p' = \{k \in K_p \mid k*x \in \Omega_p\}$、とする。これは $\mathrm{Re}(s_i) \geq 0$ で絶対収束し、全 s 平面に p^{s_i} の有理関数として解析接続され、$\mathcal{C}^\infty(K_p\backslash X_p)$ の元とみなせる。

$\mathcal{S}(K_p\backslash X_p)$ への $\mathcal{H}(G_p, K_p)$ の作用をいつものように

$$(f*\psi)(x) = \int_{G_p} f(x)\psi(g*x)dg, \quad f \in \mathcal{H}(G_p, K_p),\ \psi \in \mathcal{S}(K_p\backslash X_p),\ x \in X_p$$

と定める。変数変換

$$\left\{\begin{array}{ll} s_i = -z_i + z_{i+1} - 1, & 1 \leq i \leq r-1 \\ s_r = -z_r + (n-2r+1)/2 & \end{array}\right.$$

をすると、$\zeta_p(x:z)$ は $\mathcal{H}(G_p, K_p)$- 同時固有関数になっていることが分かる、i.e.

(7.1) $$(f*\zeta_p(\ :z))(x) = \tilde{f}(z)\cdot\zeta_p(x:z), \quad f \in \mathcal{H}(G_p, K_p)$$

$$\tilde{f}(z) = \hat{f}\left(-z_1,\ldots,-z_r; \frac{n-2j+1}{2}, r+1 \leq j \leq n-r; z_r,\ldots,z_1\right)$$

(右辺は (1.2))

が成立する。更に $\mathcal{S}(K_p\backslash X_p)$ 上の球 Fourier 変換 F_p を次のように定める：

$$\begin{aligned} F_p\ :\ \mathcal{S}(K_p\backslash X_p) &\longrightarrow \mathbb{C}(p^{z_1},\ldots,p^{z_r}) \\ \phi &\longmapsto F_p(\phi)(z) = \int_{X_p}\phi(x)\cdot\Psi_p(x^{-1}:z)\,|dx|_p \end{aligned}$$

但し、$\Psi_p(x:z) = \zeta_p(x:z)/\zeta_p(x_0:z)$、$x_0 = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ \hline 2 & & & -1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & 2 & & & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \}n-r \\ \\ \}r \end{array} \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{n-r}\ \underbrace{\qquad\quad}_{r} \end{array}$、

$|dx|_p$ は X_p 上の G_p- 不変測度で $\int_{K_p*x_0}|dx|_p = 1$ とする。

結果は次のようにまとめられる。

定理. i) F_p は $\mathcal{A}(G_p,\ K_p)$-加群としての同型

$$\mathcal{S}(K_p\backslash X_p) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathbb{C}[p^{z_1}+p^{-z_1},\ldots,p^{z_r}+p^{-z_r}]^{S_r}$$

を与える。特に、$f \in \mathcal{A}(G_p,K_p)$, $\phi \in \mathcal{S}(K_p\backslash X_p)$ について

$$F_p(f*\phi)(z) = \tilde{f}(z)\cdot F_p(\phi)(z) \qquad (\ \tilde{f}_p(z)\ \text{は}\ (7.1)\ \text{のもの}\ )$$

が成立する。

ii) $\Phi \in \mathcal{S}(\Gamma\backslash X)$ について $\tilde{E}(\Phi:z) = E(\Phi;z)/E(ch_{K*x_0}:z))$ とおくと、$\tilde{E}$ は（ F_p達を合わせたもので ）$\mathcal{A}(G,\ \Gamma)$-加群としての同型

$$\mathcal{S}(\Gamma\backslash X) \xrightarrow{\ \sim\ } \bigotimes_p{}'\ \mathbb{C}[p^{z_1}+p^{-z_1},\ldots,p^{z_r}+p^{-z_r}]^{S_r}$$

を与える。より詳しくは

iii) $\Phi = \prod_p \phi_p \in \mathcal{S}(\Gamma\backslash X)$ $(\simeq \bigotimes_p{}'\ \mathcal{S}(K_p\backslash X_p))$, $f = \prod_p f_p \in \mathcal{A}(G,\ \Gamma)$ $(\simeq \bigotimes_p{}'\ \mathcal{A}(G_p,\ K_p))$ とすると、

$$\tilde{E}(\Phi:z) = \prod_p F_p(\phi_p)(z)\ ,$$

$$\tilde{E}(f*\Phi:z) = \prod_p \tilde{f}_p(z)\cdot F_p(\phi_p)(z)$$

が成立する。

（付記） **Case 4)$_{\mathbf{r}}$** においては、$E(ch_{K*x_0}:z)$ の具体的な形は今のところよく分からないが、他の場合と同様に、K-軌道の体積に関わる定数と Riemann zeta 関数を用いて表せると思われる。

参考文献

[1] Y. Hironaka and F. Sato: Spherical functions and local densities of alternating forms, Amer. J. Math. 110(1988),473-512.

[2] I. G. Macdonald: Symmetric functions and Hall polynomials, Oxford Mathematical Monographs, 1979.

[3] I. Satake: Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields, Publ. Math. I.H.E.S. 18(1963), 5-70.

[4] F. Sato: Eisenstein series on semisimple spaces of Chevalley groups, Adv. Studies in pure Math. 7(1985),295-332.

[5] F. Sato: Eisenstein series on the Siegel half space of signature (1,1), comment. Math. Univ. St. Pauli 37(1988),99-125.

[6] F. Sato: Fourier Eisenstein transform on the space of rational binary quadratic forms, 数理解析研究所講究録 631(1987).