数理解析研究所講究録
第 689 巻 1989 年 117-127

一般化されたテータ級数の Rankin-Selberg について

鈴木利明(琉球大・理)
Toshiaki SUZUKI

1. 古典的なテータ級数と平方剰余の相互法則の関係に基いて、久保田先生が一般化されたテータ級数を、巾剰余の相互法則から出発し、Selberg 理論を使って構成されました。そのフーリエ係数を求めることが主な問題で、$n=3$ のとき Patterson が解決して、それは 3 次のガウス和であることが分かりましたが、$n>3$ のときは部分的な情報しか得られていません。最近 Kazhdan と Patterson が、GL_r (の n 枚 covering 群 $\widetilde{GL}_r$) でテータ級数を上記の方法で構成し、$r=n$ のときは、そのフーリエ係数を求めることが出来ることを示しました。もちろん、$r<n$ のときは部分的にしか分かりませんが、それは局所的情報であることが分かります。一般に $\widetilde{GL}_r$ 上の保型関数のフーリエ係数の構造は複雑で、局所的情報とそうでないものによって決まるという二重構造になっていると考えられます(注)。$r=n$ のときのテータ級数のと

きは局所的情報からだけで決定されます。Gelbert, Piatetski-Shapiro はこのような保型表現を distinguished と呼んで、その重要性を強調しています。一方、$n < r$ のときは、Whittaker model が存在せず、フーリエ係数はありません。特に $n=4$, $r=2$ のとき、くわしい数値計算にもとづいた Patterson の予想があり、それによると、この場合のフーリエ係数の平方が4次のガウス和になる。また Bump-Hoffstein は、$n=r$ のときのテータ級数（distinguished）の Rankin-Selberg は Euler 積をもつことを示し、それから Shimura 対応が導かれることを示しました。

（注） Shimura 対応によって出来る GL_r 上の保型関数 のフーリエ係数は局所的なもの（すなわち、ヘッケ作用素だけから決まるもの）だけを含んでいます。GL_r 上の保型表現はすべて distinguished です。$n=2$ のとき、よく知られているように（Waldspurger）、そうでないものの平方は L-函数の特殊値になります。

さて、テータ級数の Rankin-Selberg を使って、局所的なものから得られないフーリエ係数の間の関係を求めることを考えます。アイデアは、ある Rankin-Selberg を作り、それを2通りの方法で計算し、その留数を比較するというものです。

第一の方法はRankin-SelbergがEuler積をもつことを使う。この計算ではテータ級数の局所的関係式をフルに使う局所的なものです。第二の方法は、Jacquet, Piateski-Shapiro, ShalikaがGL$_3$の保型関数で使った方法をまねてやる大局的計算です。これは本質的にはリーマンゼータ関数のポアソン和公式による関数等式の証明と同じ論法です。

基礎体が代数体の場合、bad primeや無限素点に対応する積分の計算が難しく、上記のプログラムはまだ実行出来ません。関数体の場合 bad prime等が存在せず、計算が簡単になります。

さて、以下では、メタプレクティク群$\tilde{G}_A$の定義を述べ、テータ級数とそのRankin-Selbergについて簡単な説明をしたあとで、結果を述べたいと思います。

2. メタプレクティク群$\tilde{G}_A$

kを関数体とし、$\mu_n(k)=\{x\in k^\times : x^n=1\}$, $\#\mu_n(k)=n$とします。$G=GL_r$に対し、Hを対角部分群、Nを上三角部分群とし、Hの元を$h=\mathrm{diag}(h_i)$で表わします。G_A, H_A, N_Aで対応するアデール群、G_k, H_k, N_kでk-有理点群を表わします。またK_Aで標準的なG_Aの極大コンパクト開部分群を表わします。

次のような G_A の中心拡大 $\widetilde{G}_A$ と断面 s_A が存在します：

$$(I) \longrightarrow \mu_n(k) \xrightarrow{i_A} \widetilde{G}_A \underset{s_A}{\overset{p_A}{\rightleftarrows}} G_A \longrightarrow (I)$$

（１）$h = \mathrm{diag}(h_i)$, $h' = \mathrm{diag}(h_i') \in H_A$ に対し

$$s_A(h)\, s_A(h') = i_A\Big(\prod_{i<j} (h_i, h_j')_A\Big)\, s_A(hh')$$

ここで $(\ ,\ )_A$ は大局的なヒルベルト記号です。

（２）N_A および K_A の上で、s_A は　同型である　その像をそれぞれ、N_A^*, K_A^* と書くことにします。

また $s_k : G_k \to \widetilde{G}_A$ なる *lift* が存在することが、ヒルベルト記号の相互法則より分かり、この像を G_k^* と書きます。

3　テータ級数 $\Theta(g)$

G_k^* は $\widetilde{G}_A$ の離散部分群になり、右 K_A^*-不変な $\widetilde{G}_A$ 上の Eisenstein series を構成することが出来ます。定数項を計算することによって、Eisenstein series の極の状態が分かります。最大の特異性をもつ極での、Eisenstein の留数として、テータ級数 $\Theta(g)$ が定義されます。

まず

$$\|\Theta\|^2 = \int_{G_k\backslash G_A/Z_A^0} \Theta(s_A(g))\overline{\Theta}(s_A(g))\,dg \qquad (Z_A^0 = \{z I_r,\ z \in k^\times(k_A^\times)^n R_A^\times\})$$

は有限な値になります。次のような定数項

$$\int_{n_{ij} \in k \backslash k_A} \Theta\left(s_A\left(\begin{bmatrix} 1_t & n_{ij} \\ 0 & 1_{r-t} \end{bmatrix}\right) g\right) \prod dn_{ij}$$

を考えると、これは、GL_t および GL_{r-t} に関するテータ級数によって表わすことが出来ます。

e_0 を k で自明となる k_A の指標とします。N_A^* の指標 e を

$$e(n) = e_0\left(\sum_{i=1}^{r-1} n_{i,i+1}\right), \qquad p_A(n) = (n_{ij})$$

で定義します。

$\Theta(g)$ の Whittaker 関数を

$$W(g) = \int_{N_k^* \backslash N_A^*} \Theta(ng)\, \overline{e}(n)\, dn$$

で定義し、$h \in \widetilde{H}_A = p_A^{-1}(H_A)$ に対し

$$a(h) = \mu(h)^{-1} W(h)$$

と置きます。ここで $\mu(h) = \prod_{i<j} |h_i/h_j|_A^{\frac{1}{2}}$, $p_A(h) = \mathrm{diag}(h_i)$.

これがテータ級数 $\Theta(g)$ のフーリエ係数で、これについて調べるのが我々の目的です。特に $r=2$ のとき、Eisenstein series のフーリエ係数はガウス和を係数とするデリクレ級数になるので、$a(h)$ はその類数になっています。

$a(h)$ に関する局所的情報は次のようにして得られます。

$\Theta(\mathfrak{z})$ に対応する $\tilde{G}_A$ の保型表現は、Jacquet-Langlands 理論と同様にして、各素点 v に対応する $\tilde{G}_v$ の例外表現とよばれる表現のある種のテンサー積で表わすことが出来ます。$\tilde{G}_v$ の例外表現の Whittaker model は、$\tilde{G}_v$ の主系列表現の intertwining 作用素を使って調べることが出来ます。もし、Whittaker model が一意的であれば、$a(h)$ は局所的な情報からすべて決まってしまいます。$r=n$ のときは実際そうなっていますが、$r<n$ のときは、部分的な情報しか得られません。

各素点 v に対し、$\tilde{G}_A^{(v)}$ を $\tilde{G}_A \to G_A \longrightarrow G_v$ の核とし、$\tilde{G}_v$ を $\tilde{G}_A$ の部分群と見なします。$h^{(v)} \in \tilde{G}_A^{(v)} \cap \tilde{H}_A$ を固定し、

$$h_v \longrightarrow a(h_v h^{(v)}) \qquad (h_v \in \tilde{H}_v)$$

をあらためて、$a_v(h_v)$ と書くと、これは次を満たします。

A 1) $a_v(h_v \eta) = a(h_v)$, $\eta \in \tilde{H}_v \cap K_v^*$

A 2) $a_v(s_v(\mathrm{diag}\, \pi^{f_i})) = 0$

ここで、$f_1 \geqq f_2 \geqq \cdots \geqq f_r$ でないか又は

$$f_i - i \equiv f_j - j \mod. n \quad (i \neq j) \text{ でない。}$$

A 3) $a_v(s_v(\mathrm{diag}\, \pi^{f_i + n l_i})) = \mu(\mathrm{diag}\, \pi^{l_i})\, a_v(s_v(\mathrm{diag}\, \pi^{f_i}))$

ここで π は k_v の一意化元とします。

$f=(f_i)$ に対し、$\{1, \cdots, r\}$ の置換群 W を

$$w[f] = w(f-(1, \cdots, r)) + (1, \cdots, r),$$

$$w(f) = (f_{w^{-1}(1)}, f_{w^{-1}(2)}, \cdots, f_{w^{-1}(r)})$$

で作用させ、さSに

$$\tilde{w}[f] = w[f] + \sum_{\ell} (\underbrace{n, n, \cdots n}_{\ell \text{個}}, 0 \cdots 0)$$

(ここで ℓ は $w^{-1}(\ell) > w^{-1}(\ell+1)$ を満たす)

とおきます。

A4) f が $0 < f_i - i - (f_j - j) < n \quad (i<j)$ を満たすとき

$$a_r(s_n\pi^{\tilde{w}[f]}) = q^{\tau_0(w)} u(w, f) t(w, f) a_n(s_n\pi^f)$$

ここで、$\tau_0(w) = \sum_{\ell} \ell(r-\ell) \quad (w^{-1}(\ell) > w^{-1}(\ell+1))$, $q = |\pi|^{-1}$

$u(w, f) = \pm 1$, $t(w, f)$ はガウス和で書き表わせて、

$|t(w, f)| = q^{-\frac{1}{2}\ell(w)}$, $\ell(w)$ は $w \in W$ の長さ.

4. Rankin - Selberg zeta 関数

以下、Θ, W, a に r をつけて Θ_r, W_r, a_r と書きます。

$1 \leq t < r \leq n$ とし、$h_{r-t} \in H_{r-t,A}$ とします.

$$I(s, W_r, W_t; h_{r-t}) = \int_{N_{t,A}\backslash G_{t,A}} W_r\left(s_A \begin{bmatrix} g_t & \\ & h_{r-t} \end{bmatrix}\right) \overline{W_t}(g_t) |\det g_t|_A^{s-\frac{r-t}{2}} dg_t$$

という積分を考えます。但し $s \in \mathbb{C}$, h_{r-t} の局所成分は A2) の条件を満たさないとします。

まず W_r, W_t が右 K_A^*-invariant であることより、これは a_r, a_t の $H_{t,A}$ 上の積分になり、上記の A1), A2), A3), A4) を使ってかなりの計算が出来ます。特に $r=n$ のときは、オイラー積をもつことが分かります。h_{r-t} の局所成分は $\pi^{f_{r-t}}$ の形であると仮定しますと、f_{r-t} は有限個の素点を除いて $(0,\cdots,0)$ になります。さて、f_{r-t} を $(t+1, t+2, \cdots, r)+(m_1, m_2, \cdots, m_r)$ とおき、$i_1>i_2>\cdots>i_t$ を各 i_j が 1 と $n-1$ の間で、m_1+i_j は m_ℓ $(\ell=2,\cdots,r-t)$ に mod. n で合同でないとします。このような $(i_1,\cdots,i_t)$ は $\binom{n-r+t}{t}$ 個あり、よって特に $r=n$ のときは唯1つです。f_t を $(m_1+i_1+1, m_1+i_2+2, \cdots, m_1+i_t+t)$ とし、π^{f_t} を局所成分にもつ $H_{t,A}$ の元を h_t とおきます。h_t は $H_{t,A}\cap K_A^*$ を除いて h_{n-t} によって一意的に決まります。

定理 1

$$I(s, W_n, W_t; h_{n-t}) = a_n\left(s_A\begin{bmatrix} h_t & \\ & h_{n-t}\end{bmatrix}\right)\bar{a}_t(s_A(h_t))|\det h_t|_A^{s}$$

$$\times \mu_A(h_{n-t})|\det h_{n-t}|_A^{-\frac{t}{2}}\,\xi_k\left(ns-\frac{n+t}{2}+1\right)\cdots\xi_k\left(ns-\frac{n+t}{2}+t\right)$$

ここで $\xi_k(s)$ は k のデデキントゼータ関数.

$r<n$ のとき、h_t はたくさんあるので $a_n\left(s_A\begin{bmatrix} h_t & \\ & h_{n-t}\end{bmatrix}\right)$ $\bar{a}_t(s_A(h_t))|\det h_t|_A^{s}$ の部分が、対応するデリクレ級数になります。そのデリクレ級数はオイラー積をもちませんが、非常

に興味のあるものです。

さて Rankin-Selberg の基本的な技巧により

$I(s, W_r, W_t; h_{r-t})$

$$= \int_{G_{t,k}\backslash G_{t,A}} \sum_{\gamma \in N_t^* \backslash G_t^*} W_r\left(\begin{bmatrix} \gamma & \\ & 1_{r-t} \end{bmatrix} s_A \begin{bmatrix} g_t & \\ & h_{r-t} \end{bmatrix}\right) \overline{\Theta}_t(s_A(g_t)) |\det g_t|_A^{s-\frac{r-t}{2}} dg_t$$

と変形することが出来ます。ここで $r-t=2$ と仮定します。

$$\int_{x_i \in k_A/k} \Theta_r\left(s_A \begin{bmatrix} 1 & & 0 & x_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & x_{r-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix} g\right) \overline{e}_0(x_{r-1})\, dx_1 \cdots dx_{r-1}$$

を展開しますと、上記積分の第一の部分が表われますが、Θ_r が尖点形式でないため、その他の部分がいくつか出て来ます。特に

$$\int_{\substack{x_i \\ x_i' \in k_A/k}} \Theta_r\left(s_A \begin{bmatrix} 1 & & 0 & x_1' & x_1 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & x_{r-2}' & \\ 0 & & & 1 & x_{r-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} g\right) \overline{e}_0(x_{r-1})\, dx_1 \cdots dx_{r-1}\, dx_1' \cdots dx_{r-2}'$$

という項が表われますが、これは、Θ_{r-2} と W_2 を使って表わすことの出来る関数です。

Θ_r の保型性を使って、上記の展開のもう一つの表示が得られます。これが、Jacquet-Piatecki Shapiro-Shalika の論点の核心です。このあと、リーマンゼータの関数等式の証明の手法

を使うわけですが、計算は長くなります。方針はそうなのですが、実際はもうすこし複雑です。$r=4$ のときの結果は、

<u>定理２</u>　$I(s, W_4, W_2 : h_2)$ は $\mathrm{Re}(s)>1-\frac{1}{n}$ のとき絶対収束し、全 s-平面に解析接続され、ある関数等式をもつ。特に、$s=\frac{1}{n}$ で一位の極をもち、その留数は

$$-2\|\theta_2\|^2 (\log q_0)^{-1} W_2(s_A(h_2))|\det h_2|_A^{-1+\frac{1}{n}}$$

ここで、$q_0>1$ は $\{|x|_A^n : x\in k_A^\times\}$ の生成元

さて、$n=r=4$ として、定理１と定理２を比較してみましょう。定理１より、$s=\frac{1}{4}$ での留数は、

$$a_4\left(s_A\begin{bmatrix} h_2' & \\ & h_2\end{bmatrix}\right)\overline{a}_2(s_A(h_2'))|\det h_2'|_A^{\frac{1}{4}}\ \mu_A(h_2)|\det h_2|_A^{-1}$$
$$\times\text{定数}$$

<u>定理３</u>

$$a_4\left(s_A\begin{bmatrix} h_2' & \\ & h_2\end{bmatrix}\right)\overline{a}_2(s_A(h_2'))|\det h_2'|_A^{\frac{1}{4}}$$
$$=(\text{定数})\ a_2(s_A(h_2))|\det h_2|_A^{\frac{1}{4}}$$

ここで、$a_4\left(s_A\begin{bmatrix} h_2' & \\ & h_2\end{bmatrix}\right)$ は局所情報から決まって、ガウス和で表わされますので、a_2 のある関係が得られます。これが局所的なものから得られないのは容易に分かります。

参考文献

Bump Hoffstein, On Shimura's correspondence,
to appear in Duke Math. J.

Jacquet, Piatetski-Shapiro, Shalika, Automorphic forms on
GL(3), Annals of Math. 109 (1979) 169-258

Kazhdan, Patterson, Metaplectic forms, Publ. Math.
IHES, 59 (1984), 35-142.