数理解析研究所講究録
第689巻 1989年 148-164

$Sp(2;\mathbb{R}) = Sp_4(\mathbb{R})$ の class 1 Whittaker 関数について

東京大学・理学部 織田孝幸

§0. 導入。 よく知られているように，k を局所体とし，$GL_2(k)$ の admissible 表現（既約） (π, H) の Whittaker model を考えて，それの vector をひとつえらび，これを $GL_2(k)$ の split torus 上で積分して Mellin 変換を考えると，π に associate する正しい local L-factor を与えることが知られている。（cf. Jacquet-Langlands [1]）.

これを一般化することは GL_n のときには成功することが知られている。（cf. Jacquet, Piateskii-Shapiro, Shalika [2]）.

一般の reductive algebraic groups のときは２つの困難故に現状では一般にはよくわからず，理論の発展はとどこおっている。２つの難点とは：

(i) Whittaker model の存在と一意性の問題が一般にはよくわかっていない。 $k = \mathbb{R}$ のときは存在の条件は知られているが（Vogan），この場合は非常に sophisticate した議論がいろいろ必要.（cf. 例えば 松本久義 氏の 仕事）.

(ii) 正しい "Mellin 変換" がよくわからない。

ここでは"許される道"を特別な例についてきちっとたどってみて、今後の参考にすることを目標とする。この目標もまだ完遂できていないが、できた計算をまとめて中間報告とする。

講演では k が p 進体のとき、$Sp(2,k) = Sp_4(k)$ rank 2 の symplectic 群の class 1 Whittaker function の 2重 Mellin 変換 (i.e. Whittaker function の 2重 Hecke series というものが実質的にそれにあたる) を問題にしたが、これについては日仏解析数論シンポジウムの Proceeding に submit したので (cf. Oda [9])、以下では $k = \mathbb{R}$ 実数体とし、このとき class 1 の Whittaker functions とその Mellin 変換 (2重の) について、いくつか計算をしたのでこれをまとめる。

計算の check のために REDUCE を使った。設計・制作者に感謝する。

Whittaker 関数の Mellin 変換は微分方程式より差分方程式をみたすことは、青本先生に示唆された。深く感謝します。

§1. $Sp(2;\mathbb{R})$ に関連した記号と Jacquet vector の定義

$$Sp(2:\mathbb{R}) := \{ g \in M_4(\mathbb{R}) \mid {}^t g J g = J \ ; \ J = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix} \}$$

とおく。$Sp(2:\mathbb{R})$ の minimal parabolic subgroup として、たとえば

$$P_0 = \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} * & * & \\ 0 & * & * \\ \hline & & * \ \ 0 \\ \multicolumn{2}{c|}{O} & * \ \ * \end{array} \right) \in Sp(2:\mathbb{R}) \right\}$$

がとれる。P_0 の unipotent radical は

$$N_0 = \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & * & \\ 0 & 1 & * \\ \hline & & 1 \ \ 0 \\ \multicolumn{2}{c|}{O} & * \ \ * \end{array} \right) \in P_0 \right\}$$

で与えられる。N_0 の任意の元は

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & n_0 & \multicolumn{2}{c}{O} \\ 0 & 1 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{O} & 1 & 0 \\ & & -n_0 & 1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1_2 & n_1 & n_2 \\ & n_2 & n_3 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{1_2} \end{array} \right)$$

の形の積として表わされる。

$$K = Sp(2:\mathbb{R}) \cap O(4) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B & A \end{array} \right) \ \middle| \ A + \sqrt{-1} B \in U(2) \right\}$$

となり、

$$A = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ \hline & & a_1^{-1} & \\ & & & a_2^{-1} \end{array} \right) \ \middle| \ a_1, a_2 \in \mathbb{R}^\times \right\}$$

とおくと、Iwasawa 分解

$$Sp(2:\mathbb{R}) = N_0 A K$$

がある。

N_0 のユニタリー指標 ψ_0 を

$$\psi_0\left(\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & n_0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 0 & 1 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 1 & 0 \\ & & -n_0 & 1 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|cc} 1_2 & n_1 & n_2 \\ & n_2 & n_3 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{1_2} \end{array}\right)\right) = \exp\left[2\pi i(n_0+n_3)\right]$$

で定義する。明らかに ψ_0 は N_0 の交換子群 $[N_0, N_0]$ 上では trivial。

$$A_+ = \left\{\left(\begin{array}{cc|cc} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ \hline & & a_1^{-1} & \\ & & & a_2^{-1} \end{array}\right) \middle| \ a_1>0,\ a_2>0 \right\}$$

のユニタリー指標を

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ \hline & & a_1^{-1} & \\ & & & a_2^{-1} \end{array}\right) \longmapsto a_1^{i\nu_1}\,a_2^{i\nu_2} \qquad (\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R})$$

で定め，これを $\left(\begin{array}{cc|cc} \varepsilon & & & \\ & \eta & & \\ \hline & & \varepsilon^{-1} & \\ & & & \eta^{-1} \end{array}\right)$ $(\varepsilon=\pm 1,\ \eta=\pm 1)$ 上 trivial として，A に延長し，さらに N_0 上 trivial として，N_0A のユニタリー指標とし，$G = Sp(2;\mathbb{R})$ にユニタリーに induce して得られる G のユニタリー表現 $\pi_{(\nu_1,\nu_2)}$ を考える。これは principal P-series といわれる表現である。$\pi_{(\nu_1,\nu_2)}$ は class 1 の表現で（既約であるので），scalar倍を除いて unique な K-不変ベクトルがある。N_0 の指標 ψ_0 に対する $\pi_{(\nu_1,\nu_2)}$ の Whittaker model の中での K-invariant vector は次のように計算される。（cf. Jacquet [4]）

$\varphi: G \to \mathbb{C}$ を次をみたす関数とする。

$g = nak$ $(n\in N_0,\ a\in A_+,\ k\in K)$ に対して

$$\varphi(g) = \varphi(nak) = \varphi(na) = \varphi(a) = a_1^{i\nu_1} a_2^{i\nu_2}$$

但し　$a = \left(\begin{array}{cc|cc} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ \hline & & a_1^{-1} & \\ & & & a_2^{-1} \end{array}\right) \in A_+$。

$w_0 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1_2 \\ \hline -1_2 & 0 \end{array}\right)$ を $Sp(2;\mathbb{R})$ の Weyl 群の longest element とし,

$$\varphi_{w_0}(g) = \varphi(w_0 g)$$

とおく。

$$(\star) \quad W_{\psi_0}^{(\nu_1,\nu_2)}(g) = \int_{N_0} \varphi_{w_0}(ng)\overline{\psi_0(n)}\,dn.$$

ここで dn は N_0 上の Haar measure。

$W_{\psi_0}^{(\nu_1,\nu_2)}(g)$ は　$W_{\psi_0}^{(\nu_1,\nu_2)}(ng_0) = \psi_0(n)\,W_{\psi_0}^{(\nu_1,\nu_2)}(g)$ をみたすので, また右から K-invariant であるので, A_+ 上の値を決めれば定まる。これは次の積分表示をもつ。

$$g = n_g \cdot a \cdot k_g \qquad (n_g \in N_0,\ a \in A_+,\ k_g \in K)$$

と岩沢分解しておく。すると

$$\begin{aligned} \varphi_{w_0}(ng) &= \varphi(w_0 ng) = \varphi(w_0 n n_g a) \\ &= \varphi(w_0 a a^{-1} n n_g a) = \varphi(w_0 a w_0^{-1} w_0 \cdot a^{-1} n n_g a) \\ &= (w_0 a w_0^{-1})^{i\nu} \cdot \varphi_{w_0}(a^{-1} n n_g a) \end{aligned}$$

但し　$w_0 a w_0^{-1} = a' = \left(\begin{array}{cc|cc} a_1' & & & \\ & a_2' & & \\ \hline & & a_1'^{-1} & \\ & & & a_2'^{-1} \end{array}\right)$ とするとき,

$(w_0 a w_0^{-1})^{i\nu} = (a_1')^{i\nu_1}(a_2')^{i\nu_2}$　と定める。

$g = a$ i.e. $n_g = 1$ として,

(☆)′ $$W_{\psi_0}^{(\nu_1,\nu_2)}(a) := \int_{N_0} \varphi_{w_0}(n n_g)\,\overline{\psi(n)}\,dn$$

$$= (w_0 a w_0^{-1})^{i\nu} \int_{N_0} \varphi_{w_0}(a^{-1} n a)\,dn .$$

さらに $w_0(a^{-1}na)$ を Iwasawa 分解して,

$$w_0(a^{-1}na) = \tilde{n}\cdot\tilde{a}\cdot\tilde{k} \quad (\tilde{n} \in N_0,\ \tilde{a} \in A_+,\ \tilde{k} \in K)$$

とし, $\tilde{a}$ を a と n との関数として $\tilde{a} = \tilde{a}(a, n)$ と書くとき,

$$\varphi_{w_0}(a^{-1}na) = \tilde{a}(a,n)^{i\nu}$$

より,

(☆)″ $$W_{\psi_0}^{(\nu_1,\nu_2)}(a) = (w_0 a w_0^{-1})^{i\nu} \int_{N_0} \tilde{a}(a,n)^{i\nu}\,dn$$

という積分表示をうる。

(☆)の積分表示で得られる G 上の関数 $W_{\psi_0}^{(\nu_1,\nu_2)}(g)$ を主系列表現 $\pi_{(\nu_1,\nu_2)}$ に対応する Jacquet vector という。

$a = \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & t_2 & & \\ & & t_1^{-1} & \\ & & & t_2^{-1} \end{pmatrix}$ $(t_1, t_2 \in \mathbb{R},\ t_1 > 0,\ t_2 > 0)$ のとき $W_{\psi_0}^{(\nu_1,\nu_2)}(a)$ を $W_{\psi_0}^{(\nu_1,\nu_2)}(t_1,t_2)$ と書いて, 参考までに (☆)″ の "explicit な" 形を求めてみる。結果は次の形である。

$$W_{\psi_0}^{(\nu_1,\nu_2)}(t_1,t_2) = t_1^{\nu_1} t_2^{\nu_1} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}$$

$$\{t_1^4 t_2^2 + t_2^2 n_1^2 + t_1^2 n_2^2 + 2n_0 n_2 (t_2^2 n_1 + t_1^2 n_3) + n_0^2 (t_1^2 t_2^4 + t_2^2 n_2^2 + t_1^2 n_3^2)\}^{-(\nu_1-\nu_2)/2}$$

$$\times \{t_1^4 t_2^4 + t_2^4 n_1^2 + 2t_1^2 t_2^2 n_2^2 + t_1^4 n_3^2 + (n_2^2 - n_1 n_3)^2\}^{-\nu_2/2}$$

$$\times \exp[(-2\pi i)(n_0+n_3)] \cdot dn_0\, dn_1\, dn_2\, dn_3$$

但し $(n_0, n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^4$ を動く。

さて $Sp(2;\mathbb{R})$ の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の universal enveloping algebra $U(\mathfrak{g})$ の center は2次の元（Casimir operator）と4次の元で生成される $\mathbb{R}$ 上の2変数多項式環となる。$W_{\psi_0}^{(\nu_1,\nu_2)}(t_1,t_2)$ はこれらの元の同時固有関数となる。これを (t_1,t_2) という parameter で explicit に書き表わしてみよう。これが次節の目標である。

§2. $U(\mathfrak{g})$ の center の generators と、Jacquet vector のみたす微分方程式。

$Sp(2;\mathbb{R})$ の Lie 環の basis を次のように定める。

$$H_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & -1 & \\ & & & -1 \end{array}\right); \quad H_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & -1 & & \\ \hline & & -1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)$$

$$X_4 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) ; \quad X_{-4} = {}^tX_4 ;$$

$$X_3 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) ; \quad X_{-3} = {}^tX_3 ;$$

$$X_2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) ; \quad X_{-2} = {}^tX_2 ;$$

$$X_1 = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{array}\right) ; \quad X_{-1} = {}^tX_1 .$$

すると $\mathfrak{g}$ の Casimir operator は $U(\mathfrak{g})$ の次の元の scalar 倍である.

$$\lambda(L_1) = H_1^2 + H_2^2 + 6H_1 + 2H_2 + 8X_{-4}X_4 + 4X_{-3}X_3 + 8X_{-2}X_2 + 4X_{-1}X_1 .$$

$$= H_1^2 + H_2^2 + 4(X_4X_{-4} + X_{-4}X_4) + 2(X_3X_{-3} + X_{-3}X_3) + 4(X_2X_{-2} + X_{-2}X_2) + 2(X_1X_{-1} + X_{-1}X_1) .$$

Jacquet vector は右 K-不変で, 左 $[N_0, N_0]$-不変であるから, $U(\mathfrak{g})$ の元をこれに作用させても $U(\mathfrak{g})(\mathfrak{k} \oplus [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}])$ は Jacquet vector を annihilate する. 但しここで $\mathfrak{k}$ は K の Lie 環で $\mathfrak{n}$ は N_0 の Lie 環. よって $\lambda(L_1)$ の Jacquet vector への作用をみるのに, $\lambda(L_1)$ を mod $U(\mathfrak{g})(\mathfrak{k} \oplus [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}])$ でみれば十分.

<u>Lemma 1.</u> $\lambda(L_1) \equiv H_1^2 + H_2^2 - 6H_1 - 2H_2 + 8X_2^2 + 4X_1^2$ $\mod (U(\mathfrak{g})(\mathfrak{k} + [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]))$

次のことは容易にわかる。

Formula 1. $F(t_1,t_2) = W_{\varphi_0}^{(\nu_1,\nu_2)}(t_1,t_2)$ とおくと、

$$
\begin{cases}
H_1 F = t_1 \dfrac{\partial F}{\partial t_1} + t_2 \dfrac{\partial F}{\partial t_2}\,; \\[2mm]
H_2 F = t_1 \dfrac{\partial F}{\partial t_1} - t_2 \dfrac{\partial F}{\partial t_2}\,; \\[2mm]
X_4 F = X_3 F = 0\,; \\[2mm]
X_2 F = (2\pi i)\, t_2^2 \cdot F\,; \\[2mm]
X_1 F = (2\pi i)\, t_1 t_2^{-1} F\,.
\end{cases}
$$

よって

$$
\frac{1}{2}\lambda(L_1)F = t_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} + t_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} - 3t_1 \frac{\partial F}{\partial t_1} - t_2 \frac{\partial F}{\partial t_2} - (8\pi^2 \cdot t_1^2 t_2^{-2} + 16\pi^2 \cdot t_2^4)\, F\,.
$$

他方 F が主系列表現に属することより $\frac{1}{2}\lambda(L_1)F = [(\nu_1-2)^2+(\nu_2-1)^2-5]\times F$ がわかり次を得る。

Proposition 1. $F(t_1,t_2) = W_{\varphi_0}^{(\nu_1,\nu_2)}(t_1,t_2)$ は次の2階の微分方程式をみたす:

$$
t_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} + t_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} - 3t_1 \frac{\partial F}{\partial t_1} - t_2 \frac{\partial F}{\partial t_2} - 8\pi^2 \left(\frac{t_1^2}{t_2^2} + 2t_2^4\right) F
$$

$$
= [(\nu_1-2)^2 + (\nu_2-1)^2 - 5]\, F\,. \quad \cdots\cdots (式 1)
$$

さて $U(\mathfrak{g})$ の center $Z(\mathfrak{g})$ のもう一つの4次の生成元については中島匠一氏による次の explicit formula がある（cf. [5]）

__Lemma 2.__ $\lambda(L_2)$ は $Z(\mathfrak{g})$ の4次の元で次で与えられる.

$$
\begin{aligned}
\lambda(L_2) = {} & 16 X_4^2 X_{-4}^2 + 16 X_4 X_3 X_{-3} X_{-4} \\
& -32 X_4 X_2 X_{-2} X_{-4} + 16 X_3^2 X_{-2} X_{-4} \\
& +16 X_4 X_1 X_{-1} X_{-4} + 8 X_4 H_2 H_1 X_{-4} \\
& +8 X_3 X_1 (H_1 - H_2) X_{-4} - 16 X_2 X_1^2 X_{-4} \\
& +16 X_4 X_2 X_{-3}^2 + 16 X_3 X_2 X_{-2} X_{-3} \\
& +8 X_4 (H_1 - H_2) X_{-1} X_{-3} + 4 X_3 H_2^2 X_{-3} \\
& +8 X_2 X_1 (H_1 + H_2) X_{-3} + 16 X_2^2 X_{-2}^2 \\
& -16 X_4 X_{-1}^2 X_{-2} + 8 X_3 (H_1 + H_2) X_{-1} X_{-2} \\
& +16 X_2 X_1 X_{-1} X_{-2} - 8 X_2 H_2 H_1 X_{-2} \\
& +4 X_1 H_1^2 X_{-1} + H_1^2 H_2^2 \\
& +16 X_4 H_1 X_{-4} - 32 X_4 H_2 X_{-4} - 32 X_3 X_1 X_{-4} \\
& -32 X_4 X_{-1} X_{-3} + 8 X_3 H_1 X_{-3} - 16 X_2 X_1 X_{-3} \\
& -16 X_3 X_{-1} X_{-2} + 16 X_2 (H_1 + H_2) X_{-2} \\
& -24 X_1 H_1 X_{-1} - 2 H_1^2 H_2 - 6 H_1 H_2^2 \\
& -48 X_4 X_{-4} - 24 X_3 X_{-3} - 48 X_2 X_{-2} \\
& +24 X_1 X_{-1} - 2 H_1^2 + 12 H_1 H_2 + 6 H_2^2 \\
& +12 H_1 - 12 H_2
\end{aligned}
$$

長い計算ののちに（計算があっていますように！），次を得る

Lemma 3　modulo $U(\mathfrak{g})(\mathfrak{k} \oplus [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}])$ で

$$\begin{aligned}\lambda(L_2) \equiv\ & H_1^2 H_2^2 - 2H_1^2 H_2 - 6H_1 H_2^2 - 2H_1^2 + 12 H_1 H_2 \\ & + 6H_2^2 + 12 H_1 - 12 H_2 \\ & + 4H_1^2 X_1^2 - 8 H_1 H_2 X_2^2 + 16 X_2^4 + 16 X_1^2 X_2^2 \\ & - 24 H_1 X_1^2 - 8 H_1 X_2^2 + 40 H_2 X_2^2 \\ & + 48 X_2^2 + 24 X_1^2 .\end{aligned}$$

他方 $F(t_1, t_2) = W_{40}^{(\nu_1,\nu_2)}(t_1, t_2)$ に $\lambda(L_2)$ の作用を $F(t_1,t_2)$ が主系列表現に属していることを使って計算すると

$$\begin{aligned}\lambda(L_2)F =\ & (\nu_1+\nu_2)^2(\nu_1-\nu_2)^2 - 2(\nu_1+\nu_2)^2(\nu_1-\nu_2) \\ & - 6(\nu_1+\nu_2)(\nu_1-\nu_2)^2 - 2(\nu_1+\nu_2)^2 + 12(\nu_1+\nu_2)(\nu_1-\nu_2) \\ & + 6(\nu_1-\nu_2)^2 + 24\nu_2 \\ =\ & (\nu_1+\nu_2-3)^2(\nu_1-\nu_2-1)^2 - 3(\nu_1+\nu_2-3)^2 - 3(\nu_1-\nu_2-1)^2 \\ & + 21.\end{aligned}$$

これにより，F のみたす4階の微分方程式は次のページの形となる。

<u>Proposition 2.</u> $F(t_1,t_2) = W_{4_0}^{(\nu_1,\nu_2)}(t_1,t_2)$ とおくと、F は

$$
t_1^4\frac{\partial^4 F}{\partial t_1^4} - 2t_1^2t_2^2\frac{\partial^4 F}{\partial t_1^2\partial t_2^2} + t_2^4\frac{\partial^4 F}{\partial t_2^4}
$$

$$
-2t_1^3\frac{\partial^3 F}{\partial t_1^3} + 2t_1^2t_2\frac{\partial^3 F}{\partial t_1^2\partial t_2} + 6t_1t_2^2\frac{\partial^3 F}{\partial t_1\partial t_2^2} + 2t_2^3\frac{\partial^3 F}{\partial t_2^3}
$$

$$
- t_1^2\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} - 6t_1t_2\frac{\partial^2 F}{\partial t_1\partial t_2} - 13t_2^2\frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2}
$$

$$
+ 9t_1\frac{\partial F}{\partial t_1} + 13t_2\frac{\partial F}{\partial t_2}
$$

$$
+16\frac{\pi^2}{t_2^2}\Big\{ -t_1^4\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} + 2\cdot t_1^2t_2^6\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} - 2t_1^3t_2\frac{\partial^2 F}{\partial t_1\partial t_2}
$$

$$
- t_1^2t_2^2\frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} - 2t_2^8\frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2}
$$

$$
+5t_1^3\frac{\partial F}{\partial t_1} - 6t_1t_2^6\frac{\partial F}{\partial t_1} + 5t_1^2t_2\frac{\partial F}{\partial t_2} - 6t_2^7\frac{\partial F}{\partial t_2}
$$

$$
+16\pi^2\cdot t_1^2\cdot t_2^4\cdot F + 16\pi^2\cdot t_2^{10}\cdot F - 6t_1^2\cdot F + 4t_2^6 F
$$

$$
= \{(\nu_1+\nu_2-3)(\nu_1-\nu_2-1)\}^2 - 3(\nu_1+\nu_2-3)^2 - 3(\nu_1-\nu_2-1)^2 + 21.
$$

$\boxtimes$

<u>注</u>. 左辺が $\lambda(L_2)F$ を与えている。

$\frac{1}{4}\{\frac{1}{4}\lambda(L_1)^2 - \lambda(L_2)\}F$ を計算して少しちがう次の4階の微分方程式の方が簡単な形になる。

Proposition 2'. F を Proposition 2 と同じとする。すると

$$t_1^2 t_2^2 \frac{\partial^4 F}{\partial t_1^2 \partial t_2^2} - t_1^2 t_2 \frac{\partial^3 F}{\partial t_1^2 \partial t_2} - 3 t_1 t_2^2 \frac{\partial^3 F}{\partial t_1 \partial t_2^2}$$

$$+ 3 t_1 t_2 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_2} + 3 t_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} - 3 t_2 \frac{\partial F}{\partial t_2}$$

$$+ 8\pi^2 \Big\{ t_1^3 t_2^{-1} \frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_2} - 2 t_1^2 t_2^4 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2}$$

$$- 2 t_1^3 t_2^{-2} \frac{\partial F}{\partial t_1} + 6 t_1 t_2^4 \frac{\partial F}{\partial t_1} - t_1^2 t_2^{-1} \frac{\partial F}{\partial t_2}$$

$$+ 2\pi^2 t_1^4 t_2^{-4} F + 2 t_1^2 t_2^{-2} F - 6 t_2^4 F \Big\}$$

$$= (\nu_1 - 1)(\nu_1 - 3)(\nu_2)(\nu_2 - 2) F .$$

さて $t_1 = u_1 u_2$, $t_2 = u_2$ として変数変換をする.

$$F(t_1, t_2) = F(u_1 u_2, u_2) = W_{\psi_0}^{(\nu_1, \nu_2)}\left(\left(\begin{array}{cc|cc} u_1 u_2 & & & \\ & u_2 & & \\ \hline & & u_1^{-1} u_2^{-1} & \\ & & & u_2^{-1} \end{array}\right)\right).$$

このとき $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$ で $\mathrm{Re}\, s_1 >> 0$, $\mathrm{Re}\, s_2 >> 0$ に対して double Mellin transformation

$$\varphi(s_1, s_2) \underset{\mathrm{dfn}}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty F(u_1 u_2, u_2) \cdot u_1^{s_1} \cdot u_2^{s_2} \frac{du_1}{u_1} \frac{du_2}{u_2}$$

を考える。Whittaker functions のうち Jacquet vector は $u_1 \to \infty$ $u_2 \to \infty$ で早く減少するから $\mathrm{Re}\, s_1 > 0$, $\mathrm{Re}\, s_2 > 0$ で上の積分は

収束する。 $\varphi(s_1, s_2)$ は $\mathrm{Re}\, s_1 > 0$, $\mathrm{Re}\, s_2 > 0$ で正則.

§3. Jacquet vector の Mellin 変換がみたす差分方程式.

前節の Proposition 1, 2 と, 部分積分を使って $\varphi(s_1, s_2)$ は次の2つの差分方程式をみたす.

Theorem 1

(i)
$$\left[\left(2s_1^2 + 4s_2 - 2s_1 s_2 + s_2^2 + 2s_2\right) - \left\{(\nu_1 - 2)^2 + (\nu_2 - 1)^2 - 5\right\}\right]$$
$$\times \varphi(s_1, s_2) = 8\pi^2 \left\{ \varphi(s_1 + 2, s_2) + 2\varphi(s_1, s_2 + 4) \right\}$$

(ii)
$$(s_1 + 1)(s_1 + 3)(s_1 - s_2)(s_1 - s_2 - 2)\varphi(s_1, s_2)$$
$$+ 8\pi^2 \left\{ (-s_1^2 + s_1 s_2 + 2s_1 + s_2 + 2)\varphi(s_1 + 2, s_2) \right.$$
$$\left. + (-2)(s_1 + 1)(s_1 + 3)\varphi(s_1, s_2 + 4) + 2\pi^2 \varphi(s_1 + 4, s_2) \right\}$$
$$= (\nu_1 - 1)(\nu_1 - 3)(\nu_2 - 2)\nu_2 \cdot \varphi(s_1, s_2)$$

$\boxtimes$

上の式(i)を(ii)に代入して,

$$(-1)\{s_1 + 2 + (\nu_1 - 2)\} \cdot \{s_1 + 2 - (\nu_1 - 2)\}\{s_1 + 2 - (\nu_2 - 1)\}\{s_1 + 2 + (\nu_2 - 1)\}$$
$$\times \varphi(s_1, s_2) + 8\pi^2 \cdot [\{(s_1 + 1)(s_2 + 6) - 1\}]\, \varphi(s_1 + 2, s_2)$$
$$+ 16\pi^4 \cdot \varphi(s_1 + 4, s_2) = 0.$$

これより，$\varphi(s_1, s_2)$ は $\mathrm{Re}\, s_2 > 0$ の領域では有理型に延長できる。s_1 についての poles の場所は

$$\pi^{-s_1}\Gamma\left(\frac{s_1+2+(\nu_1-2)}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s_1+2-(\nu_1-2)}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s_1+2+(\nu_2-1)}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s_1+2-(\nu_2-1)}{2}\right)$$

と同じである．但し $\Gamma(t)$ は Γ-関数。

以下ここではやりとおせなかったを当面の問題をみる。

$\mathbb{R}$ 上の話しと，p-進体上の話しには並行性がある。たとえば次の対応がある．

$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}_p$
$\pi^{-s}\Gamma(\frac{s}{2})$	$1-p^{-s}$

これに導かれて，Hecke series for Whittaker function の explicit formula から $\varphi(s_1, s_2)$ の形を推測できる。(cf. [3])

<u>Problem 1</u>. $\varphi(s_1, s_2)$ は

$$\varphi(s_1,s_2) = \Gamma\left(\frac{s_1}{2}+1+\frac{1}{2}(\nu_1-2)\right)\Gamma\left(\frac{s_1}{2}+1-\frac{1}{2}(\nu_1-2)\right)\Gamma\left(\frac{s_1}{2}+1+\frac{1}{2}(\nu_2-1)\right)\Gamma\left(\frac{s_1}{2}+1-\frac{1}{2}(\nu_2-1)\right)$$

$$\times\Gamma\left(\frac{s_2}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\{(\nu_1-2)+(\nu_2-1)\}\right)\times\Gamma\left(\frac{s_2}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\{-(\nu_1-2)+(\nu_2-1)\}\right)$$

$$\times\Gamma\left(\frac{s_2}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\{(\nu_1-2)-(\nu_2-1)\}\right)\times\Gamma\left(\frac{s_2}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\{-(\nu_1-2)-(\nu_2-1)\}\right)$$

$\times\,\Delta(s_1, s_2)$ で，$\Delta(s_1, s_2)$ は (s_1, s_2) の entire function という形で書けるだろう。

Problem 1 は多分それほどむづかしくないと思われる。

Problem 2. $\Delta(s_1, s_2)$ の零点を決定せよ。

Problem 2 は N_0 が abel でないことを反映して、Goodman-Wallach operator が非常に複雑になるので簡単にはできないと思われる。$\Delta(s_1, s_2)$ がよくわかれば、逆 Mellin 変換によって $W_{\psi_0}^{(\nu_1, \nu_2)}(t_1, t_2)$ に対して、ふつうの Whittaker function に対する Barnes の積分表示の類似物が得られることになるのだが…

$\varphi(s_1, s_2)$ が $\mathbb{R}$ での"誤まった" Euler factor (つまり"誤また" Γ-factor) であるのは $\varphi(s_1, s_2)$ が Γ-関数の積では書けそうもないことに理由がある。

References

[1] Jacquet,H. & Langlands,R.:Automorphic forms on GL(2). Springer LNM.

[2] Jacquet,H. Piateski-Shapiro,I.I., & Shalika,J.:Automophic forms on GL(3). Annnals of Math. 109 (1979)

[3] Oda,T.:Multiple Hecke series for class-1 Whittaker functions on GL(n) over p-adic fields. Preprint.

[4] Jacquet,H.:Fonctions de Whittaker associees aux groupes de Chevelley . Bull. Soc. Math. France 95 (1967),243-309.

[5]. 中島匠一: 東京大学大学院修士論文。