数理解析研究所講究録
第689巻 1989年 172-184

ジーゲル保型形式のヘッケ作用素に関する 2,3の話題

室工大工　桂田英典　(Hidenori Katsurada)

このノートでは、ジーゲル保型形式のヘッケ作用素に関する話題のうち、フーリエ係数と関連するいくつかのよく知られている事実を解説する。

§1. ヘッケ級数

この節において、ヘッケ環に係数をもついくつかの形式的巾級数(これらをヘッケ級数と総称する)の有理性について論ずる。以下、記号を用意する。

$$GSp_n^+(\mathbb{Q}) = \{ M \in GL_{2n}(\mathbb{Q})\ ;\ \text{ある}\ \mu(M)>0\ \text{が存在して}\ {}^tM J_n M = \mu(M) J_n \},$$

ただし $J_n = \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$。

$$\Delta^n(N) = \left\{ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GSp_n^+(\mathbb{Q}) \cap GL_{2n}(\mathbb{Z}_{(N)})\ ;\ C \in N M_n(\mathbb{Z}_{(N)}) \right\}$$

ただし、$\mathbb{Z}_{(N)} = \left\{ \frac{b}{a} \, ; \quad a, b \in \mathbb{Z} \quad (a, N) = 1 \right\}$。

$\Gamma_0^n(N) = \Delta^n(N) \cap SL_{2n}(\mathbb{Z})$。

さて $H^n(N)$ をヘッケ対 $(\Delta^n(N), \Gamma_0(N))$ の $\mathbb{C}$ 上のヘッケ環, 素数 p $(p \nmid N)$ に対して $H^n{}_p(N)$ をヘッケ対 $(\Delta^n(N) \cap GL_{2n}(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]), \Gamma_0^n(N))$ の $\mathbb{C}$ 上のヘッケ環とする。

$$H^n(N) = \bigotimes_{p \nmid N} H_p{}^n(N)$$

である。正の整数 $d_1, \ldots, d_n, e$ で $d_i | d_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$ $(e, N) = 1, (d_1, N) = 1$ を満たすものに対して $H^n(N)$ の元 $T(d_1, \ldots, d_n; e)$ を

$$T(d_1, \ldots, d_n; e) = \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_n & & & \\ & & & e d_1^{-1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & e d_n^{-1} \end{pmatrix} \Gamma_0(N)$$

で定義する。とくに 素数 p $(p \nmid N)$ に対して

$$T_i(p) = T(\overbrace{1, \ldots, 1}^{n-i}, \overbrace{p, \ldots, p}^{i} \, ; p^2)$$

とおく。また $(m, N) = 1$ なる正の整数 m に対して

$$T(m) = \sum_{d_1 | d_2 | \cdots | d_n | m} T(d_1, \ldots, d_n; m)$$

とおく。このとき $p \nmid N$ なる素数 p に対して

$$H_p^n(N) = \mathbb{C}[\, T(p), \; T_i(p) \quad (0 \leq i \leq n) \,]$$

であり、さらに algebra isomorphism

$$\Omega_p : H_p{}^n(N) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X_0^{\pm}, \ldots, X_n^{\pm}]^{W_n} \quad (\text{Satake 同型})$$

が存在する。ここで W_n は Sp_n のワイル群を表す。

さて我々は $T(p^r)$ $(r \geq 1)$ を $T(p)$, $T_i(p^2)$ によって具体的に書き表すことを問題にする。これは $n=1$ のときはよく知られていることであるが $n \geq 2$ のときには一般にはそうではない。そこで次のような $H_p^n(N)$ に係数をもつ形式的巾級数

$$F_p^n(t) = \sum_{d=0}^{\infty} T(p^d)\, t^d$$

を導入しその有理性および分母・分子の形について考える。これについては一般に次の結果が知られている。

《 Andrianov [2] 》 $F_p^n(t)$ は t の有理関数で

$$F_p^n(t) = \frac{P_p^n(t)}{Q_p^n(t)}$$

と表される。ここで $P_p^n(t)$, $Q_p^n(t) \in H_p^n(N)\,[t]$ で $\deg P_p^n(t) = 2^n - 2$ かつ

$$\tilde{\Omega}_p(Q_p^n(t)) = (1 - X_0 t) \prod_{i=1}^{n} \prod_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} (1 - X_0 X_{i_1} \cdots X_{i_r} t)$$

ここで $\tilde{\Omega}_p$ は前に述べた同型 Ω_p を $H_p^n(N)[[t]]$ から $\mathbb{C}[X_0^{\pm}, \ldots, X_n^{\pm}]^{W_n}[[t]]$ への同型に拡張したものである。

$n=1$ のときはよく知られているように

$$F_p(t) = \frac{1}{1 - T(p)t + T_1(p^2)t^2}$$

となる。$F_p^n(t)$ の具体的な形は現在のところ $n=1,2,3$ のときしか与えられていない[1]。

また、Böcherer は次のようなヘッケ級数

$$G_p^n(t) = \sum_{d_1|d_2|\cdots|d_n} T(d_1,\cdots,d_n;1)\, t^{d_1+\cdots+d_n}$$

についてその具体的な形をもとめた。

《Böcherer [7]》

$$\tilde{\Omega}_p(G_p^n(t)) = \frac{1-t}{1-p^n t}\prod_{i=1}^{n}\frac{(1-p^{2i}t^2)}{(1-x_i p^n t)(1-x_i^{-1}p^n t)}$$

§2、Žarkovskaya の関係式

この節では、ヘッケ作用素の固有値とフーリエ係数の関係を述べた Žarkovskaya の関係式およびそれに関連する話題を述べる。χ を mod N のディリクレ指標で $\chi(-1)=(-1)^k$ とする。$M_k^n(N,\chi)$ を $\Gamma_0^n(N)$ に対する重さ k，指標 χ のジーゲル保型形式の空間とする。とくに $N=1$，χ trivial のとき $M_k^n(N,\chi) = M_k^n$ と表す。$H^n(N)$ の元 T の $F(Z)$ への作用 $F|_{k,\chi}T$ をよく知られている方法で定義する。

$$F(Z) = \sum_A C(A)\exp(2\pi i\,\mathrm{tr}AZ)$$

を $F(Z)\in M_k^n(N,\chi)$ のフーリエ展開とする。$F(Z)$が$H^n(N)$のすべての元の同時固有関数[2)]とし、$T\in H^n(N)$ に対して $F|_{k,\chi}T = \lambda(T)F$ とおく。とくに mが正の整数のとき $\lambda(m)=\lambda(T(m))$ とおく。古典的には、ヘッケ作用素の同時固有関数とフーリエ係数の間には密接な関係があった。すなわち、上の仮定のもとで $(l,N)=1, (l,m)=1$ なるすべての l に対して

$$C(lm) = \lambda(l)\,C(m) \qquad (*)$$

$n\geq 2$のときは一般にはこのような簡明な関係式は存在しないが、ヘッケ級数と同時固有関数のフーリエ係数からなるある巾級数の間に関係が存在する。これが Žarkovskaya の関係式である。これを説明する。$F(Z)\in M_k^n(N,\chi)$ を上の通りとするとき巾級数 $\sum_{i=0}^{\infty}\lambda(p^i)t^i$ は$t=0$ の近くで収束する巾級数で

$$\sum_{i=0}^{\infty}\lambda(p^i)t^i = \frac{P_{p,F}^n(t)}{Q_{p,F}^n(t)}$$

と表される。ただし、$Q_{p,F}^n(t)$は前節で定義した多項式

$Q_p^n(t) = \sum_{i=0}^{2^n} q_i t^i \quad (q_i\in H_p^n(N))$ に対して

$Q_{p,F}^n(t) = \sum_{i=0}^{2^n}\lambda(q_i)t^i$ とおいたものである。$P_{p,F}^n(t)$も同様に定める。このとき

((Žarkovskaya [12])) 定義、仮定は上の通りとする。 Bをn次正定値、half integral かつ $(B,p)=1$[3]とする。このとき形式的巾級数 $\sum_{i=0}^{\infty} c(p^i B)t^i$ は $t=0$ の近くで収束し

$$\sum_{i=0}^{\infty} c(p^i B)t^i = \frac{P^n_{p,F,B}(t)}{Q^n_{p,F}(t)}$$

となる。ここで $P^n_{p,F,B}(t)$は（Bに依存する）tの多項式で $\deg P^n_{p,F,B}(t) \leqq 2^n - 2$。

$n=1$のとき (*) より $p \nmid N$ のとき、$(m,p)=1$ なるすべてのmについて

$$\sum_{i=0}^{\infty} c(p^i m) = \frac{c(m)}{1-\lambda(p)t+p^{k-1}\chi(p)t^2}$$

である。$n \geqq 2$のとき $P_{p,F,B}(t)$ を具体的に求めることは非常に難しい問題であると思われる。kが偶数、$k > n+1$ のとき重さk、次数nのジーゲル Eisenstein series $E_k(Z) = \sum_{C,D} |CZ+D|^{-k}$ は M_k^n の元ですべての$T \in H_k^n(N)$の同時固有関数であり、Žarkovskayaの関係式から $(B,p)=1$ のとき

$$\sum_{i=0}^{\infty} c(p^i B)t^i = \frac{P_{p,F,B}(t)}{(1-t)\prod_{1\leqq i_1 < \cdots < i_r \leqq n}\left(1-p^{\sum_{j=1}^{r}(k-i_j)}t\right)}$$

が得られる。しかし、この場合は、もう少し詳しい結果が得られる。

((Kitaoka [9]))

$$\sum_{i=0}^{\infty} c(p^i B) t^i = \frac{\widetilde{P}_{F,p,B}(t)}{\prod_{j=0}^{n} (1 - p^{jk - j(j+1)/2} t)}$$

ただし $\widetilde{P}_{F,p,B}(t)$ は t の多項式で $\deg \widetilde{P}_{F,p,B}(t) \leqq n-1$。

§3. ゼータ関数とディリクレ級数

$n=1$ のとき 前節で述べた固有値とフーリエ係数の関係は、同時固有関数に付随するあるゼータ関数とディリクレ級数の関係としても定式化できる。ここではその拡張について述べる。$F(Z) = \sum c(A) \exp(2\pi i \operatorname{tr} AZ) \in M_k^n(N, \chi)$ をすべての $T \in H^n(N)$ の同時固有関数とし、F の (Spinor) ゼータ関数 $\zeta(s, F)$ を

$$\zeta(s, F) = \prod_{p \nmid N} Q_{p,F}(p^{-s})$$

で定義する。$n=1$ のとき (*) から

$$\sum_{\substack{m=1 \\ (m,N)=1}}^{\infty} c(m)\, m^{-s} = c(1)\, \zeta(s, F)$$

である。このことの $n=2$ への拡張を考える。$A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ を2次の正定値, half integral 行列とし、$\Delta = b^2 - 4ac$ とおく。また

$$H(\Delta) = \left\{ A_i = \begin{pmatrix} a_i & \frac{b_i}{2} \\ \frac{b_i}{2} & c_i \end{pmatrix} ;\ A_i \text{ half integral } b_i^2 - 4a_i c_i = \Delta \right\} \Big/ \text{properly equivalence}$$

とする。d を $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ の判別式、$l = \sqrt{\Delta/d}$ とし、O_l を conductor l の $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ の order とするとき、$H(\Delta)$ はガウス

積に関してアーベル群をなし、さらに$\mathfrak{O}_\ell$のイデアル類群$I(\Delta)$と同型である：$\varphi: H(\Delta) \xrightarrow{\sim} I(\Delta)$。また、$\check{H}(\Delta)$, $\check{I}(\Delta)$をそれぞれ$H(\Delta)$, $I(\Delta)$の指標群とする。以下しばしば$H(\Delta)$と$I(\Delta)$, および$\check{H}(\Delta)$と$\check{I}(\Delta)$を同一視する。$\eta \in \check{H}(\Delta)$に対してL関数$L_{d\ell^2}(s,\eta)$を$L_{d\ell^2}(s,\eta) = \prod_{\mathfrak{z}} (1-\chi(N(\mathfrak{z}))\eta(\bar{\mathfrak{z}})N(\mathfrak{z})^{-s})^{-1}$

で定義する。ここで$\mathfrak{z}$は$\mathfrak{O}_\ell$のすべての素イデアルでそのノルム$N(\mathfrak{z})$がNでわりきれないものすべてを走る。また$\bar{\mathfrak{z}}$は$\mathfrak{z}$のイデアル類を表す。n次正定値 half integral 行列Bと

$F(Z) = \sum C(A) \exp(2\pi i\, \mathrm{tr} AZ) \in M_k^n(N,\chi)$に対して、ディリクレ級数$D(s,B,F)$を

$$D(s,B,F) = \sum_{\substack{m=1 \\ (m,N)=1}}^{\infty} \frac{C(mB)}{m^s}$$

で定義する。

(Andrianov [3], Evdokimov [8])

$F(Z) \in M_k^2(N,\chi)$を$H^2(N)$の同時固有関数とするとき$a|N^\infty$なるすべてのaと$\eta \in \check{H}(\Delta)$に対して

$$\sum_{\bar{A}_i \in H(\Delta)} \eta(\bar{A}_i)\, D(s, aA_i, F)$$

$$= \sum_{\bar{A}_i \in H(\Delta)} \eta(\bar{A}_i) \sum_{\substack{u|v|\ell \\ (u,N)=1 \\ (v,N)=1}} \frac{\chi(uv)\,M(u)\,M(v)}{u^{s-2k+3}\,v^{s-k+2}}\, C\left(\frac{v}{u}(\mathfrak{z}(\bar{A}_i))\right)$$

が$\mathrm{Re}\, s > 2k+1+\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$なる$s \in \mathbb{C}$で成立する。とく

にFがcusp formのときは $\mathrm{Re}\, s > k+1+\varepsilon$ で成立する。ただし μ はメービウス関数で ξ は $I(\Delta)$ から $I(\Delta l^{-2}l'^{2})$ への自然な準同型。

この結果より $\zeta(s,F)$ のmeromorphyおよび関数等式が証明される。[4] また上の結果より $k \geqq 4$ ならば $H^2(1)$ の同時固有関数 $F \in M_k^2$ は固有値 および $\{C(A)\,;\, A$ は primitive, 正定値, half integral$\}$ によって一意的に決ることがわかる。しかし固有値のみによって (up to constantに) 決るかどうかという いわゆる "multiplicity one condition" が成立するかどうかはわかっていない。$\zeta(s,F)$ と $D(s,B,F)$ の関係については 現在のところ $n=1,2$ の場合しか明快な結果は得られていない。

一方 これとは別のゼータ関数とあるディリクレ級数の間には 一般の n について次のような関係が知られている。まず多項式 $R(X_0,\ldots,X_n,t) = \prod_{i=1}^{n}(1-X_i t)(1-X_i^{-1}t)$ は $\mathbb{C}[X_0,\ldots,X_n]^{W_n}[t]$ の元であるから $p \nmid N$ のときある多項式 $R_p(t) = \sum_{i=1}^{2n} r_i t^i \in H_p^n(N)$ が存在して $\tilde{\Omega}_p(R_p(t)) = R(X_0,\ldots,X_n,t)$ となる。$F \in M_k^n(N,\chi)$ を $H^n(N)$ の同時固有関数とするとき $R_{p,F}(t) = \sum_{i=0}^{2n} \lambda(r_i)t^i$ とおく。このとき $\zeta^+(s,F)$ を

$$\zeta^{+}(s,F) = \prod_{p\nmid N} R_{p,F}(\chi(p)p^{-s})$$ [5]

で定義する。また n 次正定値 half integral 行列 A_0 に対して

$$B_p(s,A_0) = \frac{1-p^{-2s}\chi(p^2)}{1-p^{-s}\chi(p)} \times \begin{cases} (1-\chi_{A_0}(p)\chi(p)p^{-k-s}) \displaystyle\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}(1-p^{-2i-2s}\chi(p^2)) & n \text{ 偶数} \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}(1-p^{-2i-2s}\chi(p^2)) & n \text{ 奇数} \end{cases}$$

とおく。ただし χ_{A_0} は A_0 に対応する二次形式の sign を表す。

((Andrianov [4])) $2A_0 \in GL_n(\mathbb{Z})$[6] のとき

$$\sum_{\substack{M\in GL_n(\mathbb{Z})\backslash M_n(\mathbb{Z}) \\ \det M>0 \\ (\det M, N)=1}} \frac{C(MA_0{}^tM)}{(\det M)^s} = C(A_0)\prod_{p\nmid N} B_p(s-k+1,A_0)\,\zeta^{+}(s-k+1,F)$$

注

1) $n=2$ のとき Shimura [10], $n=3$ のとき Andrianov [1]。

2) 以下 $H^n(N)$ の元 T と T の $M_k^n(N,\chi)$ への作用 $|_{k,\chi}T$ を同一視する。

3) half integral 行列 $B=(b_{ij})_{1\le i,j\le n}$ に対して (b_{ii} $(1\le i\le n)$ $2b_{ij}$ $(1\le i<j\le n)$, p) $=1$ のとき $(B,p)=1$ と表す。

4) Andrianov [3]。

5) $\zeta^{+}(s, F)$ の meromorphy, および関数等式については Shimura [11], Andrianov-Kalinin [5], Böcherer [6] を参照せよ。

6) 実際はこの仮定はとり除かれるが結果はやや複雑になる。

Reference

[1] A. N. Andrianov, Shimura's conjecture for Siegel modular group of genus 3, Soviet Math. Dokl. vol.8 No.6 (1967) 1474 - 1478

[2] ________, Spherical functions for GLn over local fields and summation of Hecke series, Math. USSR Sb. 12, No 3, (1970) 429-452

[3] ________, Dirichlet series with Euler product in the theory of Siegel modular forms of degree 2, Proc. Steklov Inst. Math. 112 (1971) 70-93

[4] ________, Euler expansions of theta transforms

of Siegel modular forms of degree n, Math. USSR Sb. 34 No 3, (1978) 259–300

[5] A. N. Andrianov and V. L. Kalinin, On analytic properties of standard zeta functions of Siegel modular forms, Math. USSR Sb. 35 No 1, (1979) 1–17

[6] S. Böcherer, Über die Funktionalgleichung automorpher L-Funktionen zur Siegelschen Modulgruppe, J. reine angew. Math. 362 (1985) 146–168

[7] ______, Ein Rationalitätssatz für formale Heckereihen zur Siegelschen Modulgruppe, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 56 (1986) 35–47

[8] S. A. Evdokimov, Euler products for congruence subgroups of the Siegel group of genus 2, Math. USSR Sb. 28 (1976)

[9] Y. Kitaoka, Local densities of quadratic forms and Fourier coefficients of Eisenstein series, Nagoya Math. J. 103 (1986) 149–160

[10] G. Shimura, On modular correspondences for $Sp(n, \mathbb{Z})$ and their congruence relations, Proc Natl. Acad. Sci. USA 49 No 6, (1963) 824–828

[11] ______, On the holomorphy of certain Dirichlet series, Proc. Lond. Math. Soc. III Ser. 31 (1975) 79–98

[12] N. A. Žarkovskaya, On the connection between the eigenvalues of Hecke operators and the Fourier coefficients of eigen functions for Siegel's modular forms of genus n. Math. USSR Sb. 25 (1975)