

波動形式の代数性
(Blasius-Clozel-Ramakrishnan の仕事の紹介)

東京工大 理数学 黒川信重
(Nobushige Kurokawa)

正則な保型形式の場合は フーリエ級数や \mathfrak{h} の作用素の固有値に関して沢山の研究があり、とくに、これらの代数性はよく知られている。他方、実解析的な波動形式に関しては実二次体の量指標から Maass [0] によって作られた波動カスプ形式の場合 (このときはフーリエ係数や \mathfrak{h} の作用素の固有値は一般に超越数となる) や アイゼンシュタイン級数の場合 (この場合にも一般に超越的である) を除いては代数性は殆んど知られていなかった。Blasius-Clozel-Ramakrishnan の研究 ([1]-[3]) はこの方向での最初の一般的な結果と言える。 ∞ 成分 (アルキメデス成分) の条件から代数性はラプラス作用素の固有値が $\frac{1}{4}$ のときに限定されてしまう点か、正則な保型形式の場合には任意の (整数) 重さで代数性が言える事と異なる点である。

① 結果

定理 A (B-C-R [1][2])

f を $\Gamma_0(N) (C SL_2(\mathbb{Z}))$ に属する波動形式で $\Delta f = \frac{1}{4} f$ をみたし, \wedge の作用素 $T(p)$ (p は N を割らない素数全体を動く) の同時固有関数とする: $T(p)f = a(p)f$.

このとき $a(p)$ は代数的数である。

ここで, $N \geq 1$ は整数,

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\},$$

f は上半平面 $H = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ 上の実解析関数で $\text{mod } N$ のあるテリクル指標 ε に対し $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \varepsilon(d) f(z)$ をみたす。

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ に属してみえ可とする。また,

$\Delta = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ は上半平面のラプラス作用素である。

定理 B (B-R [3])

f を上のとおりとし, 2次のゼータ関数形式に属する 2つの仮定 (I, II: 後述) がみたせられるとする。すると, 2次元のガロア表現 $\rho: \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$ があり, $L(s, f) = L(s, \rho)$ をみたすものが存在する。

2つの仮定(I, II)は定理Bの証明方法を概観する際に述べるが、現在のところ難しい問題であり、一般的に証明できる見込みはまたないようである。したがって定理Bは Maass [10] により確認された場合 (アインシュタイン級数の場合と実2次体の量指標が J -級数により作られる波動形式の場合) 以外の例を与えてはいない。

2 背景

F を大域体 (global field) とすると Langlands による非可換類体論の予想の核心は次の単射の存在である:

$$\begin{array}{ccc} \text{Rep}(\text{Gal}(F/F)) & \hookrightarrow & \text{Rep}^{\text{aut}}(\text{GL}_{\infty}(A_F)) = \bigcup_{n \geq 1} \text{Rep}^{\text{aut}}(\text{GL}_n(A_F)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ p & \longrightarrow & \pi(p) \\ & & L(s, p) = L(s, \pi(p)). \end{array}$$

ここで、 Rep は表現全体を表し、 A_F は F のアデール環、 aut は俵型表現を意味する。

知られている結果 : $n = \deg(p)$ とおく。

① $n=1$: 任意の F に対して成立 (類体論)

方法 : $\text{GL}_1(A_F) \rightarrow \text{Gal}(F/F)^{\text{ab}}$ 準同型 (reciprocity) を構成。

② F の標数が正のとき (このときは $\rho: \text{Gal}(\bar{F}/F) \rightarrow \text{GL}_n(\bar{\mathbb{Q}}_2)$ でもよい。)

$n=2$ は Drinfeld (1977 頁) により成立。

$n \geq 3$ は Laumon (1986) * Flicker-Kazhdan [4] (1987) によりほぼ出来ている。

方法: Grothendieck による L 関数の判別式表示により Artin 予想を証明し、普遍的な $\text{Gal}(\bar{F}/F) \times \text{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ 加群 H を構成し、それを既約分解する:

$$H = \bigoplus_{(\rho, \pi)} m(\rho, \pi) \rho \otimes \pi, \quad m(\rho, \pi) \geq 0 \text{ 整数。}$$

このとき $L(s, \rho) = L(s, \pi) \iff m(\rho, \pi) \geq 1$ 。

③ F の標数が 0 のとき (このときは $\rho: \text{Gal}(\bar{F}/F) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ のみしか出来ていない。)

$n=2$ のときは $\text{Im}(\rho)$ が可解なら $\pi(\rho)$ が存在 (Langlands 1976, Tunnel 1980)。

$n \geq 3$ のときは $\text{Im}(\rho)$ がべき零なら $\pi(\rho)$ が存在 (Arthur-Clozel [5])。

方法: GL_n に対する base change。

$n=2$ のときには Artin 予想をみただけ新しい例 (今までこの方法では知られていなかったという意味) が

見つかったが, $n \geq 3$ では新しい例はない。(有限べき零群の既約表現はすべて monomial であるため Artin 予想は以前から知られていた場合になってしまう。)

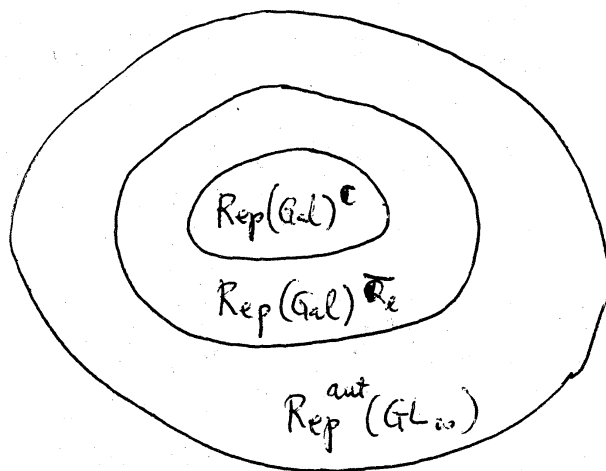
問題: $\text{Rep}(\text{Gal}) \hookrightarrow \text{Rep}^{\text{aut}}(\text{GL}_\infty)$ の像を特徴づけよ。

F の標数が正のとき, これは上記 ② による $\text{Rep}(\text{Gal})^{\overline{\mathbb{R}}}$ にはほぼ全射であることがほぼわかっている。

F の標数が 0 のときは

次の予想をする:

$$\left(\text{ただし, } \Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right)$$



$$\text{Rep}(\text{Gal})^{\mathbb{C}} = \text{Rep}^{\text{aut}}(\text{GL}_\infty)^{\text{Gal-type}}$$

$$= \left\{ \pi \mid \begin{array}{l} L(s, \pi) \text{ の } \Gamma\text{-因子が } \Gamma_{\mathbb{R}}(s)^a \Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)^b \\ a, b \in \mathbb{Z}, \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{Rep}(\text{Gal})^{\overline{\mathbb{R}}} = \text{Rep}^{\text{aut}}(\text{GL}_\infty)^{\text{algebraic}}$$

$$= \left\{ \pi \mid \begin{array}{l} \text{Hecke eigenvalues} \in \overline{\mathbb{Q}} \\ (\text{i.e. 各有限素点 } v \text{ について } L(s, \pi_v)^{-1} \in \overline{\mathbb{Q}}[N_v^{-s}]) \end{array} \right\}.$$

これを 2次元の既約な加群表現 $\rho: \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{C})$ の場合に, その予想される像 $\pi(\rho)$ を保型形式 f_ρ で明示すると次のようになる。 $L(s, \rho) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}$ の Γ -因子は複素共役の ρ の行き先で決まり 3つに分れる。

(1) $\rho(\text{複素共役}) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: Γ -因子 $= \Gamma_{\mathbb{R}(s)} \Gamma_{\mathbb{R}(s+1)} = \Gamma_{\mathbb{C}(s)} = 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s)$,
 $f_\rho(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{2\pi i \sqrt{y} n z}$: 予想では f_ρ は重さ 1 の (正則) 保型形式。

(2+) $\rho(\text{複素共役}) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: Γ -因子 $= \Gamma_{\mathbb{R}(s)}^2$,
 $f_\rho(z) = \sqrt{y} \sum_{n=1}^{\infty} a(n) K_0(2\pi n y) \cos(2\pi n x)$: 予想では
 f_ρ は $\Delta f = \frac{1}{4} f$ の (偶) 波動形式。
 \uparrow
 $z \mapsto -\bar{z} \quad \text{in } \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

(2-) $\rho(\text{複素共役}) \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: Γ -因子 $= \Gamma_{\mathbb{R}(s+1)}^2$,
 $f_\rho(z) = \sqrt{y} \sum_{n=1}^{\infty} a(n) K_0(2\pi n y) \sin(2\pi n x)$: 予想では
 f_ρ は $\Delta f = \frac{1}{4} f$ の (奇) 波動形式。

ただし, $K_0(y) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(yu)}{\sqrt{u^2+1}} du$ は変形 Bessel 関数。

[3] 方法

f を定理 A, B のとおりとする。次のように保型表現を構成する:

$$f \rightsquigarrow \pi : GL_2(\mathbb{A}) \text{ の保型表現} \quad L(s, \pi) = L(s, f)$$

\downarrow K/\mathbb{Q} 虚二次体による base change

$$\pi_K : GL_2(\mathbb{A}_K) \text{ の保型表現}$$

$$\downarrow K \text{ の量指標 } \chi \text{ による twist} \quad L_K(s, \pi_K) = L(s, \pi) L(s, \pi \otimes \left(\frac{K}{\mathbb{Q}}\right))$$

$$\pi_K \otimes \chi : GL_2(\mathbb{A}_K) \text{ の保型表現}$$

$$L_K(s, \pi_K \otimes \chi)$$

\downarrow automorphic induction (Arthur-Clozel)

||

$$\Pi'(f, \chi) = (\pi_K \otimes \chi)_{K/\mathbb{Q}} : GL_4(\mathbb{A}) \text{ の保型表現}$$

$$L_{\mathbb{Q}}(s, \Pi'(f, \chi))$$

\downarrow Jacquet + Piatetski-Shapiro + Shalika の criterion

||

$$\Pi(f, \chi) : GSp_4(\mathbb{A}) \text{ の保型表現} \\ (\text{次数 } 2 \text{ の } \mathbb{Z}^2\text{-形式})$$

$$L_{\mathbb{Q}}^{\text{spin}}(s, \Pi(f, \chi))$$

つまり $\Pi'(f, \chi)$ は $\theta(\chi)$ を χ から作り出し $GL_2(\mathbb{A})$ の保型表現 (automorphic induction) とすると $\pi \otimes \theta(\chi)$ と書ける (はすのものである) が、現在の $n=3$, この $GL_2 \otimes GL_2 \rightarrow GL_4$ 構成は証明は出ていない (道具は与る、正しいか) ため上記の方法を使う。

なお、J+P-S+S の criterion (出版されていない) はほぼこのとおり。

“定理” (J+P-S+S)

Π' を $GL_4(\mathbb{A})$ の保型表現 とするとき

$L(s, \Pi') = L^{\text{spin}}(s, \Pi)$ となる $GSp_4(\mathbb{A})$ の

保型表現 Π が存在する 必要十分条件は

$L(s, \Pi', \wedge^2 \otimes \mu)$ が $s=1$ で 1位の極をもつような

\mathbb{Q} の 量指標 μ が存在することである。

ここで \wedge^2 は 外積 (2乗)。このことは L -群に 関する

関手性 (functoriality) から 自然であり、実質的には

$\tau: Sp_4(\mathbb{C}) \hookrightarrow GL_4(\mathbb{C})$ を 自然な表現 とすると

$\wedge^2(\tau): Sp_4(\mathbb{C}) \rightarrow GL_6(\mathbb{C})$ が $\wedge^2(\tau) = (5\text{-元既約表現}) \oplus \mathbb{1}$

と 分解 すること から わかる。

さて、上記のように 構成 された $\Pi(f, \chi)$ について 重要なことは

$\Pi(f, \chi)$ の ∞ 成分 が “limit of discrete series” に なること

であり (K が 虚二次体 である ために $\theta(\chi)$ の ∞ 成分 は discrete series に 入る), ことから 代数的 が出る。

定理 A の 証明には ある K, χ に対して $L^{\text{spin}}(s, \Pi(f, \chi))$ の 係数が 代数的 であることを 示せばよい。このために GSp_4 に 関する 跡公式 に うまい 試馬 関数を 代入 することにより $\Pi(f, \chi)$ の 寄与 を 取り出し 其 級数上の 和 が 代数的 である ことから $\Pi(f, \chi)$ の \wedge^2 固有値 が 代数的 であることを 示している ([2] の 論文)。

定理 B において用いられる仮定は 2 の 2 つである。

仮定 I $L^{\text{Spin}}(s, \Pi(f, \lambda)) = L^{\text{Spin}}(s, F)$ とする 重さ 2 の正則な
ジークル保型形式 F (二次数 2, Λ の作用素の同時固有関数) が
存在する。

仮定 II 二次数 2 で重さ 3 以上の正則なジークル保型
形式 F (Λ の作用素の同時固有関数) が与えられたとき
各素数 l に対して $L^{\text{Spin}}(s, F) \equiv L(s, F) \pmod{l}$
(係数ごと) をみよす 標数 l の加群表現

$$\rho_F : \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GL}_4(\bar{\mathbb{F}}_l) \quad \text{が存在する。}$$

$$(\text{GSp}_4(\bar{\mathbb{F}}_l))$$

仮定 I は L -packet (L 関数 が一致する 保型表現全体)
の問題であり Arthur による 跡公式 が有力な手段とみな
されている。仮定 II は 重さ 3 以上の場合であるが、それから
重さ 2 の場合へ従うのは 二次数 1 の通常の場合と同様であり、
実際に使うのは 仮定 I からわかる とおり 重さ 2 の場合である。
重さ 3 以上に おれば ジークル保型多様体 を用いて代数
幾何的に扱える可能性 があるため、この形の 仮定 にしてある。

(二次数 n , 重さ $k \geq n+1$ の ジークル保型形式 F に対して

$$L^{\text{Spin}}(s, F) \text{ は } L(s, H^{nk - \frac{n(n+1)}{2}}(\mathcal{F}_{n,k})) \text{ の 因子 と 予想さ}$$

れる: $\mathcal{F}_{n,k}$ は 二次数 n の ジークル保型多様体 $m_n = \Gamma_0(n) \backslash \mathcal{H}_n$

上に \mathbb{P}^1 多様体のファミリーを $k-n-1$ 葉して集めた

$nk - \frac{n(n+1)}{2}$ 次元の \mathbb{P}^1 多様体; L 関数の 関数方程式は

とすると $s \mapsto n k - \frac{n(n+1)}{2} + 1 - s$) 仮定 I + 仮定 II を
 用いた定理 B が証明できることは Deligne-Serre [6] の方法を
 変形すればわかる。なお、仮定 II は 次数 1 から持ち上げら
 れる F に対しては 次数 1 の場合にかつ表現 (L⁽¹⁾) が Deligne に
 および構成されいるので成立するか、持ち上げらるる F の
 $F = \chi_{20}^{(3)}$ に対して $\ell = 71$ ならば成立するかはわかっている ([7])。

文献

- [0] H. Maass: "Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen
 Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen"
 Math. Ann. 121 (1949) 141-183.
- [1] D. Blasius, L. Clozel and D. Ramakrishnan: "Algèbre de l'action des opérateurs
 de Hecke sur certaines formes de Maass" C.R. Acad. Sci. Paris 305 (1987)
 705-708.
- [2] 同上: "Opérateurs de Hecke et formes de Maass: application de
 la formule des traces" C.R. Acad. Sci. Paris 306 (1988) 59-62.
- [3] D. Blasius and D. Ramakrishnan: "Maass forms and Galois representations"
 preprint 1988 April.
- [4] Y. Z. Flicker and D. A. Kazhdan: "Geometric Ramanujan conjecture and
 Drinfeld reciprocity law" preprint 1987 September.
- [5] J. Arthur and L. Clozel: Base-change for GL_n , Ann. Math. Studies
 (1989 ?)
- [6] P. Deligne and J.-P. Serre: "Formes modulaires de poids 1"
 Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (4) 7 (1974) 507-530.
- [7] N. Kurokawa: "Congruences between Siegel modular forms of
 degree two" Inv. Japan Acad. 55A (1979) 417-422.