数理解析研究所講究録
第 692 巻 1989 年 22-31

Schrödinger Evolution Group の Invariant Domain と Smoothing Effect

名古屋大学 理学部 小澤 徹 (Tohru Ozawa)

$H = H_0 + V$ を Hilbert 空間 $L^2 = L^2(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, に於ける Schrödinger 作用素とする. ここで $H_0 = -(1/2)\Delta$ は free Hamiltonian, V は実数値関数による掛算作用素で H_0-限界 < 1 とする. Kato-Rellich の定理により, H は定義域 $D(H) = D(H_0)$ をもつ自己共役作用素となる.

ここでの目的は, weighted Sobolev space $H^{m,s}$ $(m, s \in \mathbb{R})$

$$H^{m,s} = \{\psi \in \mathcal{S}' ; \|\psi\|_{m,s} = \|(1+|x|^2)^{s/2}(1-\Delta)^{m/2}\psi\|_{L^2} < \infty\}$$

に於ける Schrödinger evolution group $\{e^{-itH} ; t \in \mathbb{R}\}$ の性質を述べることである. 以下は [13][14] の簡単な紹介である.

§1. Invariant Subspaces [13].

$m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し $\mathcal{H}_m = H^{m,0} \cap H^{0,m}$ とおく. $\mathcal{H}_m$ は norm $|||\psi|||_m = (\|\psi\|_{m,0}^2 + \|\psi\|_{0,m}^2)^{1/2}$ で Hilbert 空間となる.

定理 1. $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ とする. $m\geqq 3$ のときは

$$(H)_m \qquad D(|H|^{m/2}) = H^{m,0}$$

を仮定する. このとき

(1) $\mathcal{H}_m$ 及び $H^{m,0}$ は e^{-itH} で不変. 即ち, 任意の $t\in\mathbb{R}$ に対し $e^{-itH}(\mathcal{H}_m)=\mathcal{H}_m$, $e^{-itH}(H^{m,0})=H^{m,0}$.

(2) $(t,\phi)\longmapsto e^{-itH}\phi$ は $\mathbb{R}\times\mathcal{H}_m$ から $\mathcal{H}_m$ への, 及び $\mathbb{R}\times H^{m,0}$ から $H^{m,0}$ への連続写像.

(3) 定数 $C(m)>0$ があって

$$\|e^{-itH}\phi\|_{m,0}\leqq C(m)\|\phi\|_{m,0}, \quad (t,\phi)\in\mathbb{R}\times H^{m,0},$$

$$\|e^{-itH}\phi\|_{0,m}\leqq C(m)(\|\phi\|_{0,m}+|t|^m\|\phi\|_{m,0}), \quad (t,\phi)\in\mathbb{R}\times\mathcal{H}_m.$$

特に

$$|||e^{-itH}\phi|||_m\leqq \tilde{C}(m)(1+|t|^m)|||\phi|||_m, \quad (t,\phi)\in\mathbb{R}\times\mathcal{H}_m.$$

(4) $|\alpha|\leqq m$ なる任意の $\alpha\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n$ 及び任意の $\phi\in\mathcal{H}_m$ に対し $\mathbb{R}\ni t\longmapsto e^{itH}x^\alpha e^{-itH}\phi\in L^2$ は C^1,

$$\frac{d}{dt}(e^{itH}x^\alpha e^{-itH}\phi) = -ie^{itH}((1/2)(\Delta x^\alpha)+(\nabla x^\alpha)\cdot\nabla)e^{-itH}\phi.$$

定理2. $(H)_m$ がすべての $m \geqslant 3$ に対してなりたつものとする。このとき

(1) 任意の $(t, \phi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{S}$ に対し, $e^{-itH}\phi \in \mathcal{S}$ であり $\mathbb{R} \ni t \longmapsto e^{-itH}\phi \in \mathcal{S}$ は C^∞.

(2) $\mathbb{R} \times \mathcal{S} \ni (t, \phi) \longmapsto e^{-itH}\phi \in \mathcal{S}$ は連続.

定理1(3)の2番目の評価は $|t|$ の増大度に関して最良である. 実際,

定理3. $m \in \mathbb{N}$, $\phi \in \mathcal{H}_m$ とする. このとき

$$\lim_{t \to \pm\infty} |t|^{-m} \| e^{-itH_0}\phi \|_{D,m} = \| (-\Delta)^{m/2}\phi \|_{L^2}.$$

定理1,2は,波束が空間方向のregularityとdecayを保ちながら有限の群速度で運動している様子を表している. 但しcompact supportをもちながら伝幡する波束は0 vectorしかないことに注意したい [4][9][11].

定理1,2は $m \leqslant 2$ の場合の [12][15] の結果の拡張となっている. 定理2に関連する結果は [3] にもある.

e^{-itH} による, $D_m := \bigcap_{j+|\alpha| \leq m} D(x^\alpha H^j)$ の不変性は Hunziker [7] に述べられている. そこでは定理2の弱い

形も与えられている.

$(H)_m$ に対する一つの十分条件として

定理4. $m \in \mathbb{N}$ とする. $m \geqq 3$ のときは, 任意の $1 \leqq |\alpha| \leqq m-2$ に対し $\partial^\alpha V \cdot$ が $H^{1+|\alpha|, 0}$ から L^2 への有界作用素であると仮定する. このとき $D(|H|^{m/2}) = H^{m,0}$ がなりたつ.

定理4 は [1] [12] の改良.

§2. Smoothing Effects [14]

ポテンシャルに対する基本的な class Σ_m を導入する.

定義. $\mathbb{R}^n$ 上の実数値関数 W が Σ_1 に属するとは定数 $0 \leqq \lambda < 1$ と $C > 0$ があって

$$\|W\psi\|_{-1,0} \leqq C \|\psi\|_{1,0}^{\lambda} \|\psi\|_{L^2}^{1-\lambda}, \quad \psi \in H^{1,0}$$

なる評価を満たすことをいう. 整数 $m \geqq 2$ に対し W が Σ_m に属するとは, 定数 $0 \leqq \lambda < 1$ と $C > 0$ があって

$$\|W\psi\|_{L^2} \leqq C \|\psi\|_{m,0}^{\lambda} \|\psi\|_{L^2}^{1-\lambda}, \quad \psi \in H^{m,0}$$

なる評価をみたすことをいう。

例1. $0 \leq \lambda < 1$ とする。W を実数値関数とする。
$|W|^{1/2}$ が $H^{\lambda,0}$ から L^2 への有界作用素ならば $W \in \Sigma_1$.
W が $H^{\lambda m,0}$ から L^2 への有界作用素ならば $W \in \Sigma_m$.

例2. $p \geq 1$, $p > n/2$ ならば $L^p_{unif} \subset \Sigma_1$.
$p > n/m$, $m \geq 2$ ならば $L^p_{unif} \subset \Sigma_m$. ここで
L^p_{unif}

$$= \{ W \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) ; \|W\|_{L^p_{unif}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \Big(\int_{|x-y|<1} |W(y)|^p dy \Big)^{1/p} < \infty \}.$$

$L^p + L^\infty \subsetneqq L^p_{unif}$. であることに注意する。

この §§ での目的は次の $(S)_m$ に対する十分条件を述べることである。

$(S)_m$-(1). 任意の $t \neq 0$ に対し e^{-itH} は $H^{0,m}$ から $H^{m,-m}$ への有界作用素で

$$\| e^{-itH} \phi \|_{m,-m} \leq C(m)(|t|^{-m} + 1) \|\phi\|_{0,m}, \quad t \neq 0.$$

$(S)_m$-(2) $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times H^{0,m} \ni (t, \phi) \mapsto e^{-itH}\phi \in H^{m,-m}$
は連続.

$(S)_m$-(3) 任意の $\phi \in H^{0,m}$ に対し

$$\lim_{t \to \pm 0} |t|^m \| e^{-itH} \phi \|_{m,-m} = 0.$$

定理5. $m = 1, 2$ とする. $\tilde{V} = V + (1/2) x \cdot \nabla V$ とおく.
$\tilde{V} \in \Sigma_m$ と仮定する. このとき $(S)_m$ がなりたつ.

$\tilde{V} \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ だけでは $(S)_m$ $(m \geqq 3)$ がなりたつとは限らない. 例えば $V(x) = -(n-1)/2|x|$, $\phi(x) = e^{-|x|}$, $n \geqq 3$ とすると $\phi \in \bigcap_{k \geqq 0} H^{0,k}$ であるが $e^{-itH}\phi \notin H^{n/2+1,0}$.

定理6. $m \geqq 3$ とする. $|\alpha| \leqq m-2$ なる任意の $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ に対し $\partial^\alpha \tilde{V} \in \Sigma_{2+|\alpha|}$ であるとし, $\partial^\alpha V \cdot$ は $H^{1+|\alpha|,0}$ から L^2 への有界作用素であるとする. m が奇数のときは更に $\tilde{V} \in \Sigma_1$ であるとする. このとき $(S)_m$ がなりたつ.

定理7. $\tilde{V} \in \Sigma_1$ とし，すべての $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ に対し $\partial^\alpha \tilde{V} \in \Sigma_{2+|\alpha|}$, $\partial^\alpha V \in L^\infty$, であるとする．このとき

(1) 任意の $\phi \in H^{0,\infty} = \bigcap_{k \geq 0} H^{0,k}$, $t \neq 0$, に対し $e^{-itH}\phi \in C^\infty \cap L^\infty$.

(2) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times H^{0,\infty} \ni (t, \phi) \longmapsto e^{-itH}\phi \in C^\infty$ は連続，

但し $H^{0,\infty}$ には射影極限として位相を入れる．

(3) 任意の $\phi \in H^{0,\infty}$ に対し

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \longmapsto (e^{-itH}\phi)(x) \in \mathbb{C}$ は C^∞.

定理5は [3][10] の拡張．[3] では Coulomb 型の V_1, V_2 に対して考えられた非線型方程式

$$i\partial_t u = -(1/2)\Delta u + V_1 u + (V_2 * |u|^2)u$$

の smoothing effect が示されている．上の方程式については [4][5][6] も見られたい．

Jensen [8] は $\partial^\alpha V \in L^\infty$, $|\alpha| \leq m$, なるとき $\phi \in H^{0,m}$, $t \neq 0$ に対し

$$\|e^{-itH}\phi\|_{m,-m} \leq C(m)(|t|^{-m} + |t|^m)\|\phi\|_{0,m}$$

がなりたつことを示し　その e^{-itH} の作用素normが

$$\lim_{t\to\pm 0} |t|^m \|e^{-itH}\|_{\mathcal{L}(H^{0,m};\,H^{m,-m})} > 0$$

なる評価をもつことを示している.

e^{-itH} の smoothing effect を記述する別の方法については [2][16][17] を見られたい.

References

1. M. Arai, Absolute continuity of Hamilton operators with repulsive potentials, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* 7 (1971), 621-635.
2. P. Constantin and J. C. Saut, Local smoothing properties of dispersive equations, *J. AMS* 1 (1988), 413-439.
3. N. Hayashi and T. Ozawa, Smoothing effect for some Schrödinger equations, *J. Funct. Anal.* (to appear)
4. N. Hayashi and T. Ozawa, Time decay for some Schrödinger equations, *Math. Z.* (to appear)
5. N. Hayashi and T. Ozawa, Scattering theory in the weighted $L^2(\mathbb{R}^n)$ spaces for some Schrödinger equations, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **48** (1988), 17-37.
6. N. Hayashi and T. Ozawa, Time decay of solutions to the Cauchy problem for time-dependent Schrödinger-Hartree equations, *Commun. Math. Phys.* **110** (1987), 467-478.
7. W. Hunziker, On the space-time behavior of Schrödinger wavefunctions, *J. Math. Phys.* **7** (1966), 300-304.
8. A. Jensen, Commutator methods and a smoothing property of the Schrödinger evolution group, *Math. Z.* **191** (1986), 53-59.
9. K. Masuda, A unique continuation theorem for solutions of the Schrödinger equations, *Proc. Japan Acad.* **43** (1967), 361-364.
10. K. Nakamitsu, Smoothing effects for Schrödinger evolution groups, *Tokyo Denki Univ. Kiyo* **10** (1988), 49-52.
11. T. Ozawa, Remarks on the space-time behavior of scattering solutions to the Schrödinger equations, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **23** (1987), 479-486.

12. T. Ozawa, New L^p-estimates for solutions to the Schrödinger equations and time asymptotic behavior of observables, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* (to appear)

13. T. Ozawa, Invariant subspaces for the Schrödinger evolution group, preprint, Nagoya 1989.

14. T. Ozawa, Smoothing effects and dispersion of singularities for the Schrödinger evolution group, preprint, Nagoya 1989.

15. C. Radin and B. Simon, Invariant domains for the time-dependent Schrödinger equation, *J. Differ. Equations* **29** (1978), 289-296.

16. P. Sjölin, Regularity of solutions to the Schrödinger equation, *Duke. Math. J.* **55** (1987), 699-715.

17. K. Yajima, Existence of solutions for Schrödinger evolution equations, *Commun. Math. Phys.* **110** (1987), 415-426.