数理解析研究所講究録
第692巻 1989年 32-42



# N体 Schrödinger 作用素の極限吸収原理
## — A remark on the commutator method —

名古屋大・工 田村英男 (Hideo Tamura)

## 1. N体 Schrödinger 作用素 (c.m. motion removed)

$$H = H_0 + V, \qquad V = \sum_{1 \le j < k \le N} V_{jk},$$

を考える。但し、$H_0$ は free Hamiltonian. 作用素 $H_0$, $H$ は共に Hilbert space $L^2 = L^2(R_x^{3(N-1)})$ で作用する。$j$-th と $k$-th 粒子間の pair potential (real-valued) $V_{jk} = V_{jk}(x_{jk})$, $x_{jk} = x_j - x_k \in R^3$, に次の仮定をおく:

<u>(V)</u> (V.0) $\quad V_{jk}(y) = V_{jk}^s(y) + V_{jk}^l(y), \quad y \in R^3,$

(V.1) $\quad |V_{jk}^s(y)| \le C(1+|y|)^{-(1+\rho)}, \quad {}^\exists \rho > 0.$

(V.2) $\quad |\partial_y^\alpha V_{jk}^\ell(y)| \leq C(1+|y|)^{-(|\alpha|+\rho)}, \quad 0 \leq |\alpha| \leq 1.$

<u>Notations</u>

(i) $X_\beta$, $\beta \geq 0$ : $\varphi(x) \longmapsto (1+|x|)^{-\beta}\varphi(x)$, $\quad x \in \mathbb{R}^{3(N-1)}$.

(ii) $\|\cdot\|$ operator norm : $L^2 \longrightarrow L^2$.

<u>Theorem</u>. 仮定：(i) (V)；(ii) spectral parameter $\lambda \in \mathbb{R}^1$ は $H$ の eigenvalue 及び threshold でない。
このとき：

(i) $\| X_\beta (H-(\lambda \pm i\kappa))^{-1} X_\beta \| = O(1)$, $\kappa \downarrow 0$, $\beta > 1/2$.

(ii) 実数軸への境界値 $X_\beta (H-(\lambda \pm i0))^{-1} X_\beta : L^2 \to L^2$ が存在する。

<u>2.</u> 上の定理に関連したいくつかの結果を述べよう。

(1) <u>$N=2$ case</u>. 定理と同じ仮定のもとで、Ikebe-Saito [I-S] (1972), Lavine [L] (1973) で極限吸収原理が証明された。

(2) <u>$N \geqq 2$ case</u> 次のクラスの potential について、Mourre [M] (1981), $N=2,3$, Perry-Sigal-Simon [P-S-S] (1981), $N \geqq 2$, によって極限吸収原理が証明されてきた。

$$(0) \quad V_{jk} = V_{jk}^1 + V_{jk}^2 + V_{jk}^3$$

$$\left.\begin{array}{ll} (c.0) & V_{jk}^d,\ 1 \leq d \leq 3, \\ (c.1) & (1+|y|)V_{jk}^1 \\ (c.2) & (1+|y|)(\nabla V_{jk}^2) \\ (c.3) & (1+|y|)(\nabla V_{jk}^3) \end{array}\right\} : H^2(\mathbb{R}_y^3) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}_y^3) \ \text{compact}.$$

$$\left.\begin{array}{ll} (b.1) & (1+|y|)^2 V_{jk}^1 \\ (b.2) & (1+|y|)^2(\nabla V_{jk}^2) \\ (b.3) & (1+|y|)^2(\nabla\nabla V_{jk}^3) \end{array}\right\} : L^2(\mathbb{R}_y^3) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}_y^3) \ \text{bounded}.$$

我々の定理の主張は $V_{jk}^1 = V_{jk}^s$, $V_{jk}^2 = V_{jk}^l$, $V_{jk}^3 = 0$, とおくことによって、boundedness restrictions (b.1) ~ (b.3) を仮定しなくても、$N$体 Schrödinger 作用素

に対する極限吸収原理が成立することにある。　例えば、smoothness を仮定しなければ（$V_{jk}^2 = V_{jk}^3 = 0$ or $V_{jk}^\ell = 0$）、[M], [P-S-S] では decaying assumption として $V_{jk}(y) = O(|y|^{-2})$, $|y| \to \infty$, が必要だが、上の定理では一般の short-range potential $V_{jk}(y) = O(|y|^{-\delta})$, $\delta > 1$, に対して極限吸収原理が成立する。

(3) 最近の Amrein-Berthier-Georgescu [A-B-G] の仕事で、我々の定理と同じ結果が得られている。

(4) 定理の一つの応用として：

「$X_\beta$, $\beta > 1/2$, は locally $H$-smooth である」

ことが従う：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| X_\beta \exp(-itH) E_H(\Gamma) \varphi \|_{L^2}^2 dt \leq {}^{\exists}C_\Gamma \| \varphi \|_{L^2}^2$$

但し、$\Gamma \subset \mathbb{R}^1$ の compact interval（$H$ の eigenvalue 及び threshold は含まない）、$E_H(\lambda)$ は $H$ に対する spectral resolution.

この結果は Sigal-Soffer [S-S] の $N$ 体完全性を論じた仕事において、一つの基本的役割を果してきた。([S-S] では (2) で述べた potential のクラスを考えている。)

3. 定理は Mourre [M] による commutator method を少し修正することによって証明される。この方法の概要及び修正すべき点を簡単に述べよう。詳しくは、上記の論文 [M], [P-S-S], [A-B-G], 及び Tamura [T] を参照して下さい。

3.1 一般性を失わずに $0<\rho\leq 1$ と仮定します。今、dilation unitary group の生成作用素 $A$ を次のように定義する:

$$A := (1/2i)\left\{ x\cdot\nabla + \nabla\cdot x \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^{3(N-1)}.$$

作用素 $A$ は次の性質をもつ:

$$i[H_0, A] = i(H_0A - AH_0) = 2H_0.$$

元来の Mourre commutator method よる証明では、その

証明の一個所で、double commutator

$$(H_0+1)^{-1}\left[[V, A], A\right](H_0+1)^{-1} : L^2 \to L^2, \text{ bounded}$$

が使われ、このことを保証するためにのみ boundedness restrictions (6.1) ~ (6.3) が使われてきた。この難しさをさけるために $\varepsilon$-cut off Hamiltonian $H(\varepsilon)$ を次のように導入する：今 $\chi \in C_0^\infty(R_y^3)$, $0 \le \chi \le 1$, supp. $\chi \subset \{y : |y| \le 2\}$, $\chi = 1$ on $\{y : |y| \le 1\}$ とし,

$$V_{jk}^\varepsilon = \chi(\varepsilon(x_j - x_k))\, V_{jk}(x_j - x_k), \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

$$H(\varepsilon) = H_0 + V^\varepsilon, \quad V^\varepsilon = \sum_{1 \le j < k \le N} V_{jk}^\varepsilon .$$

と定義する．修正すべき点は、commutator method を H それ自身よりむしろ $H(\varepsilon)$ に適用することにある．実際，定理の仮定のもとで．double commutator に対して

$$\|(H_0+1)^{-1}\left[[V^\varepsilon, A], A\right](H_0+1)^{-1}\| = O(\varepsilon^{\rho-1}), \ \varepsilon \to 0.$$

が従う．

## 3.2 定理の仮定のもとで

*Fact*：「set of eigenvalues and thresholds of $H$ is closed and countable」

が従う．従って、定理の spectral parameter $\lambda\in\mathbb{R}^1$ に対して、次のような cut-off function $f_0\in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, $0\le f_0\le 1$, がつくれる： $\mathrm{supp}\, f_0 \subset (\lambda-2\delta, \lambda+2\delta)$, $(0<\delta\ll 1)$ $\not\ni$ (eigenvalues, thresholds of $H$)； $f_0=1$ on $[\lambda-\delta, \lambda+\delta]$.

次の評価が Mourre commutator method において最も中心的役割を果す：十分小さな $\delta$, $0<\delta\ll 1$ をとることによって、

$$i f_0(H)[H, A] f_0(H) \geqslant \gamma f_0(H)^2, \quad {}^{\exists}\gamma>0,$$

in the form sense. この評価は Mourre estimate とよばれ、その証明は Froese–Herbst [F-H] が簡潔で読みやすいと思われる．

上の評価より．十分小さな $\varepsilon$, $0<\varepsilon\ll 1$ に対して

$$M(\varepsilon) := i\, f_0(H)[H(\varepsilon), A]\, f_0(H) \geqslant (\delta/2)\, f_0(H)^2$$

が直ちに従う．

3.3．今、作用素 $G_\kappa(\varepsilon): L^2 \longrightarrow L^2$ を次のように定義する：

$$G_\kappa(\varepsilon) := (H - \lambda - i\kappa - i\varepsilon M(\varepsilon))^{-1}.$$

$H(\varepsilon)$ に対する Mourre estimate より次の基本的評価が得られる：

(0) $\| G_\kappa(\varepsilon) \| = O(\varepsilon^{-1})$, $\varepsilon \to 0$, uniformly in $\kappa$;

(i) $\| g_0(H) G_\kappa(\varepsilon) \| = O(1)$, $\varepsilon \to 0$, where $g_0 = 1 - f_0$

(ii) $\| f_0(H) G_\kappa(\varepsilon) X_\rho(\varepsilon) \| = O(\varepsilon^{-1/2}) \| F_\kappa(\varepsilon) \|^{1/2}$,

但し

$$F_\kappa(\varepsilon) := X_\beta(\varepsilon)\, G_\kappa(\varepsilon)\, X_\beta(\varepsilon),$$

$$X_\beta(\varepsilon),\ \beta > 1/2 : \ \varphi(x) \longmapsto (1+|x|)^{-\beta}(1+\varepsilon|x|)^{\beta-1}\varphi(x).$$

作用素 $F_\kappa(\varepsilon)$ に differential inequality technique を適用すると、評価 (o)〜(ii) より

$$\|(d/d\varepsilon)F_\kappa(\varepsilon)\| = O(\varepsilon^{\beta-1}) + O(\varepsilon^{\beta-3/2})\|F_\kappa\|^{1/2} + O(\varepsilon^{\beta-1})\|F_\kappa\|$$

が得られる. この differential inequality を解くことによって ($\varepsilon=0$ の近傍で可積分 in $\varepsilon$)、

$$\|F_\kappa(0)\| = O(1),\quad \kappa \to 0.$$

従って、定理の statement (i) が証明される.

<u>Remark</u>. 元来の commutator method ($H$ に適用する) では、

$$\|(d/d\varepsilon)F_\kappa\| = O(\varepsilon^{\beta-1}) + O(\varepsilon^{\beta-3/2})\|F_\kappa\|^{1/2} + O(1)\|F_\kappa\|$$

が得られてきた。

4. Commutator method は Mourre 以後、Froese-Herbst [F-H]$_2$ により、N 体 Schrödinger 作用素の正の固有値の非存在の証明、及び、Jensen-Mourre-Perry [J-M-P] により、resolvent の energy に関する smoothness 問題に応用されてきた。更に、筆者 [T]$_2$ によって、slowly decaying perturbation をもった acoustic operator の low frequency resolvent analysis 及び limiting amplitude principle (極限振幅原理) の証明へと、その応用は広げられている。

References.

[A-B-G] : On Mourre's approach to spectral theory, preprint 1988, to be published in Helv. Acta Phys.

[F-H] : Duke Math. J., 49(1982), 1075-1085.

[F-H]$_2$ : Comm. Math. Phys., 87(1982), 429-447.

[I-S] : J. Math. Kyoto Univ., 7(1972), 513-542.

[J-M-P] : Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Theorique, 41(1984), 207-225.

[L] : J. Func. Anal., 12(1973),130-154.

[M] : Comm. Math. Phys., 78(1981), 391-408.

[P-S-S] : Ann. of Math., 114(1981), 519-567.

[S-S] : Ann. of Math., 126(1987), 35-108.

[T] : Principle of limiting absorption for N-body Schrödinger operators, -a remark on the commutator method-, preprint 1988, to be published in Letters in Math. Phys.

[T]$_2$ : Resolvent estimates at low frequencies and limiting amplitude principle for acoustic propagators, preprint 1988, to be published in J. Math. Soc. Japan.