数理解析研究所講究録
第692巻 1989年 43-60

Symbolic flow の Zeta function と Scattering Matrix の pole について

阪大理　井川 満 (Mitsuru Ikawa)

1. 序.

波動方程式における障害物(obstacle)による散乱の考察において、散乱行列の極の分布と障害物の幾何学的性質との関連についての研究は、興味ある課題の一つである。ここでは、障害物がいくつかの凸な物体からなる場合には，対応する symbolic flow の zeta function が重要な役割を果すことをのべたい。

$\mathcal{O}$ を $\mathbb{R}^3$ の中の有界な開集合で，境界 $\Gamma=\partial\mathcal{O}$ は滑かなものとする。

$$\Omega = \mathbb{R}^3 - \overline{\mathcal{O}}$$

とおき，

$$\Omega \text{ は連結}$$

であるとする。Ω における acoustic problem

$$(1.1)\quad \begin{cases} \Box u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega\times(-\infty,\infty) \\ u=0 & \text{on } \Gamma\times(-\infty,\infty) \end{cases}$$

を考える。この問題に対する scattering matrix を $\mathcal{S}(z)$ と記すことにする。次の定理はこの問題の枠組として基本的である。Lax and Phillips [LP, Chapter V] によると

Theorem 5.1. $\mathcal{S}(z)$ は $\mathcal{L}(L^2(S^2))$-値関数として $\mathrm{Im}\, z \leq 0$ で holomorphic であり，$\mathbb{C}$ 全体で meromorphic である。z が $\mathcal{S}(z)$ の pole であることは

$$\Delta u = (iz)^2 u$$

が nontrivial な (iz)-eventually outgoing solution をもつことと同等である。

Theorem 5.6. 障害物 $\mathcal{O}$ から $\mathcal{S}(z)$ への対応は1対1である。すなわち，$\mathcal{O}$ と $\tilde{\mathcal{O}}$ を上の条件をみたす物体とし、それぞれに対応する scattering matrix をそれぞれ $\mathcal{S}(z)$, $\tilde{\mathcal{S}}(z)$ とする。もし

$$\mathcal{S}(z) = \tilde{\mathcal{S}}(z)$$

ならば

$$\mathcal{O} = \tilde{\mathcal{O}}$$

が従う。

物体の幾何的性質と $\mathcal{S}(z)$ の解析的性質のあいだの関

係については次の conjecture がある。

<u>Modified Lax and Phillips conjecture</u>[1)]

(1)　$\mathcal{O}$ が nontrapping ならば，任意の $\alpha > 0$ に対して $\{z ; \operatorname{Im} z \leq \alpha\}$ には $\mathcal{S}(z)$ の pole は有限個しかない。

(2)　$\mathcal{O}$ が trapping ならば，ある $\alpha > 0$ が存在して $\{z ; \operatorname{Im} z \leq \alpha\}$ に $\mathcal{S}(z)$ の pole が無限個存在する。

以後，Modified Lax and Phillips conjecture を MLPC と略記することにする。(1)に関しては，Melrose [Me]，Morawetz, Ralston and Strauss [MRS] によって成立することが示されている。しかし，(2)に関しては，Ikawa [Ik 2, 3]，Gérard [G] によって二つの凸な物体からなる障害物に対してのみ成り立つことが示されているのみであり，それ以外の場合は全く知られていない。

我々の当面の関心は2ヶの物体に対する結果を3ヶ以

---

1) もともとの conjecture は [LP] の158頁にある。それは "$\mathcal{O}$ が trapping ならば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\operatorname{Im} z \leq \varepsilon$ の範囲に $\mathcal{S}(z)$ の pole が無限個存在する。" であった。しかし、[Ik 1, 2] によってこの conjecture は一般には正しくないことが示された。

上の物体から成る障害物に対して拡張することである。これには本質的困難があるように思える。scattering matrix の pole と Ω の中の periodic ray との間には深い関係があることが予想されてきたし，事実上にあげた [Ik 2, 3]，[G] の仕事はその一端を明かにしている。この点から見るとき，$\mathcal{O}$ が strictly convex bodies 2個から成るときは Ω 内の periodic ray で primitive なものは唯一個である。しかし，3個以上の convex bodies から成る場合，一般には primitive な periodic ray が可算無限個存在する。この違いが本質的困難を生み出すもとであると考えられる。

本ノートにおいて、筆者が最近得た、任意個数の物体から成る障害物に対する MLPC についての結果を紹介する。それは，$\mathcal{O}$ を構成する物体がお互いの間の距離に比して小さい場合には MLPC が成立する、ということである。

2. いくつかの凸な物体による散乱について，および主定理

$\mathcal{O}_j$, $j=1, 2, \cdots, L$ を $\mathbb{R}^3$ の中の有界で滑かな境界をもつ開集合とする。次の仮定をおく：

(H.1)　各 $\mathcal{O}_j$ は strictly convex である．ここで strictly convex とは，その境界の Gaussian curvature がつねに正の時をいう。

(H.2)　任意の $\{j_1, j_2, j_3\} \in \{1, 2, \cdots, L\}^3$ で $j_\ell \neq j_{\ell'}$ if $\ell \neq \ell'$ をみたすものに対し

$$(\overline{\mathcal{O}}_{j_1} \text{ と } \overline{\mathcal{O}}_{j_2} \text{ の convex hull}) \cap \overline{\mathcal{O}}_{j_3} = \phi$$

がなりたつ．（$L = 2$ のときは $\overline{\mathcal{O}}_1 \cap \overline{\mathcal{O}}_2 = \phi$ とする.）

$$\mathcal{O} = \bigcup_{j=1}^{L} \mathcal{O}_j \tag{2.1}$$

とおこう。

次の関数を考える：

$$F_D(s) = \sum_{\gamma} \frac{(-1)^{i_\gamma} T_\gamma}{|I - P_\gamma|^{1/2}} e^{-s d_\gamma}, \tag{2.2}$$

ここで和は Ω 内のすべての periodic ray γ 全体にわたってとるものとする．また γ を一つの periodic ray とするとき，

i_γ : γ の反射点の数，

d_γ : γ の長さ，

T_γ : γ の primitive period，

P_γ : γ の Poincaré map，

とし，matrix M に対し $|M|$ で M の行列式を表すものと

する。

さて，

$$N(x) = {}^{\#}\{\gamma;\ d_\gamma < x\}$$

とおくと，ある C, $c > 0$ が存在して

(2.3) $$N(x) \leq C e^{cx} \quad {}^{2)}$$

がなり立つ。またある $c_1 > 0$ が存在して

(2.4) $$|I - P_\gamma| \geq e^{c_1 d_\gamma}$$

がなりたつので，ある $\mu_0 \in \mathbb{R}$ が存在して，(2.2) の右辺は絶対収束する。すなわち

(2.5) $F_D(s)$ は $\mathrm{Re}\, s \geq \mu_0$ で holomorphic.

さて，MLPC と $F_D(s)$ の関係については次の定理がある：

Theorem 1 ([Ik 6]) (2.1) で与えられる $\mathcal{O}$ は条件 (H.1), (H.2) をみたしているとする。もし，$\mathcal{O}$ に対する $F_D(s)$ が全複素平面 $\mathbb{C}$ で entire であるように解析接続できないとすると，$\mathcal{O}$ に対して MLPC が成立する。

2) 最近、盛田健彦（阪大理）は，ある $h>0$ が存在して

$$N(x) \sim e^{hx}/hx \quad (x \to \infty)$$

が成り立つことを示した。

ここではこの定理の証明についてはふれないことにする。証明の方針は数理研講究録 675 の[Ik 7]に出ている。従って MLPC を示すには，$F_D(s)$ が singularities をもつことを示す問題に帰着された。しかし，これを示すのは一般的には目下のところむつかしい。$L=2$ の場合は primitive periodic ray がただ一個であるから，$F_D(s)$ の singularity は容易にみつけられる。しかし，$L \geq 3$ となると序でもいったように primitive periodic ray が無限個あること，及び (2.2) の右辺に $(-1)^{ij}$ があるために s を real としたときの右辺の収束，発散が極めて微妙な問題となる。しかし，すでに述べた如く，各 $\mathcal{O}_j$ がお互の距離に比して小さい場合には $F_D(s)$ の特異性を比較的容易にみつけることができる。

$P_1, P_2, \cdots, P_L$ を $\mathbb{R}^3$ の中の相異なる L 個の点とする。

$$d_{max} = \max_{i \neq j} |P_i P_j|$$

とおく。

$$B(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{if } |P_i P_j| = d_{max}, \\ 0 & \text{if } |P_i P_j| < d_{max} \end{cases}$$

とおく。必要ならば番号を付け替えることにより，$1 \leq K \leq L$ が存在して

$$B(i,j) = 0 \quad \text{for all } i \quad \text{if } j \geq K+1,$$

$$B(i,j)=1 \quad \text{for some } i \quad \text{if} \quad j \leq K.$$

$K \times K$ matrix C を

$$C = \left[B(i,j) \right]_{i,j=1,2,\cdots,K}$$

で定義する。我々は次の仮定をおく:

(A.1)　$P_1, P_2, \cdots, P_L$ のどの3点も同一直線上にはない。

(A.2)　C は <u>irreducible</u> である。

$\varepsilon > 0$ に対し, P_j を中心として半径 ε の球を $\mathcal{O}_{j,\varepsilon}$ とおき

(2.6)
$$\mathcal{O}_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{L} \mathcal{O}_{j,\varepsilon}$$

とおく。(A.1) の仮定があると ε が小さければ $\mathcal{O}_\varepsilon$ は (H.2) をみたすことは明かである。

我々の主要定理は次である。

<u>Theorem 2.</u>　$P_1, P_2, \cdots, P_L$ は条件 (A.1), (A.2) をみたしているとする。そのとき, $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, 任意の $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ に対しては $\mathcal{O}_\varepsilon$ についてMLPC が成立する。

以下において $F_D(s)$ の singularity をどのようにして

みつけるかを説明する。

3. Symbolic flow と $F_D(s)$ との関係.

(H.1) 及び (H.2) の仮定のもとで Ω の中の ray を考えるには symbolic flow との関連において考えるのが自然である。

$$A(i,j) = \begin{cases} 1 & i \neq j, \\ 0 & i = j \end{cases}$$

とおき, L×L 行列 A を

$$A = [A(i,j)]_{i,j=1,2,\cdots,L}$$

で定義する。 [PP] に従って

$$\Sigma_A = \{(\cdots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \cdots) \in \prod_{-\infty}^{\infty}\{1,2,\cdots,L\}; \\ A(\xi_i, \xi_{i+1}) = 1 \quad \text{for all } i \in \mathbb{Z}\},$$

$$\Sigma_A^+ = \{(\xi_1, \xi_2, \cdots) \in \prod_{i=1}^{\infty}\{1,2,\cdots,L\}; \\ A(\xi_i, \xi_{i+1}) = 1 \quad \text{for all } i \geq 1\},$$

とおく。 σ を次で定義される shift operator とする:

$$(\sigma\xi)_i = \xi_{i+1}.$$

σ_A で σ の Σ_A への制限をあらわす。

さて，Ω の中の幾何光学の ray で $\mathcal{O}$ から離れて遠方へ行くことなくいつまでも $\mathcal{O}$ で反射を繰り返すものは Σ_A の各元と１対１の対応がある。すなわち，　目で $\mathcal{O}_{\xi_0}$ で反射し，１番目で $\mathcal{O}_{\xi_1}$ で反射するという風に、反射する物体の番号を過去から未来にむけて順次ならべてできる Σ_A の元を対応させる。逆に $\xi \in \Sigma_A$ に対し i 番目で $\mathcal{O}_{\xi_i}$ で反射するような ray は存在してかつ一意である。Ω の中の periodic ray は Σ_A の元で σ に関して periodic になる元に対する。すなわち，ある n があって

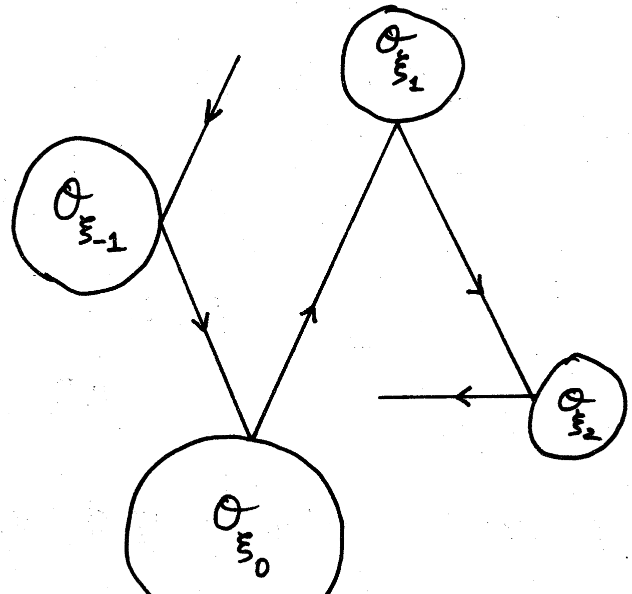
$$\sigma_A{}^n \xi = \xi$$

となる ξ に対応する ray は periodic である。

$f(\xi)$ を ξ に対応する ray が $\mathcal{O}_{\xi_0}$ で反射し $\mathcal{O}_{\xi_1}$ に至るまでの線分の長さとする。$\mathcal{O}$ からきまる $0<\theta<1$ があって

$$f \in \mathcal{F}_\theta(\Sigma_A)$$

がなりたつ。念のために用いる関数空間の説明を



しておこう。

$C(\Sigma_A) = \Sigma_A$ 上の連続関数全体.

$h \in C(\Sigma_A)$ に対して

$$\|h\|_\infty = \sup_{\xi \in \Sigma_A} |h(\xi)|$$

とおく。 $h \in C(\Sigma_A)$ に対し

$$\mathrm{var}_n h = \sup\{ |h(\xi) - h(\eta)| ; \quad \xi_i = \eta_i \text{ for } |i| \le n \}$$

$$\|h\|_\theta = \sup_n \mathrm{var}_n h / \theta^n$$

とおく。 また

$$|||h|||_\theta = \max\{ \|h\|_\theta, \|h\|_\infty \}$$

$$\mathcal{F}_\theta(\Sigma_A) = \{ h \in C(\Sigma_A) ; \ |||h|||_\theta < \infty \}$$

とおく。

次に Poincaré map の eigenvalues について考える。
[Ik 4, Section 5] での記号と考察を用いると

(3.1) $$|I - P_\gamma|^{-1/2} - \lambda_\gamma = O(\lambda_\gamma^{\frac{3}{2}})$$

がなりたつ。そこで示されているように

$$\lambda_\gamma = \Pi_{\ell=0}^{n} \lambda_{i,\ell}$$

である。以上より

$$g(\xi) = \log \Lambda_{\varphi_{i,0}^{\infty}}(x_1)$$

ただし，$\xi = (\cdots, i, i, \cdots)$ とすると

(3.2) $$\lambda_\gamma = \exp\left(\sum_{i=1}^{n+1} g(\sigma_A^i \xi)\right)$$

と表される。以上より

(3.3) $$\zeta(s) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{\sigma_A^n \xi = \xi} \exp S_n(-sf + g + \pi i)(\xi)\right)$$

ただし，

$$S_n r(\xi) = r(\xi) + r(\sigma_A \xi) + \cdots + r(\sigma_A^{n-1} \xi)$$

とする。 a_0 を[Ik4, Theorem 2.1] におけるものとしよう。

Proposition 3.1. $\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}\, s \geq -a_0$ で正則で

(3.4) $$F_D(s) - \left(-\frac{d}{ds}\zeta(s)\right) \quad \text{は} \quad \mathrm{Re}\, s > -\frac{3}{2}a_0$$

で正則である。

従って

(3.5) $$\mathrm{Re}\, s > -\frac{3}{2}a_0$$

の範囲に $\zeta(s)$ が singularity をもてば，それは $F_D(s)$ のそれと一致する。従って，もし (3.5) の範囲に $\zeta(s)$ の特異性

の存在が示されると Theorem 1 と Proposition 3.1 より Theorem 2 が従う。しかし，$\zeta(s)$ の特異点をみつけることはやはり一般にはむつかしい。何故ならば (3.3) の右辺において $-sf+g+\pi i$ が Σ_A 上の実数値関数となるような s が存在しないため，直接的には Ruelle-Perron-Frobenious の定理を使えないからである。しかし，Theorem 2 の仮定のもとでは $\zeta(s)$ をある程度調べることができる。

Theorem 3. $P_1, P_2, \cdots, P_L$ は (A.1), (A.2) をみたしているとする。ある $\varepsilon_1 > 0$ が存在して，任意の $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ に対して (2.6) で定義される $\mathcal{O}_\varepsilon$ に対する $\zeta(s)$ は (3.5) の範囲に（a_0 も ε に依存する）pole をもつ。

以下において Theorem 3 の証明方針を説明することにする。

4. Singular perturbation of symbolic flows

まず Theorem 3 の証明に用いる symbolic flows に関する一般的定理をのべることから始める。すでに行列 A, B, C の記用は用いられているが，この節では前出のものと

は違う一般的な行列の記号として用いる。勿論 Theorem 3 を示す場合には A, B, C を前出のものとして適用することは申すまでもない。

$A=[A(i,j)]_{i,j=1,2,\cdots,L}$ は $A(i,j)=1$ or 0 である $L\times L$ 行列で

(4.1) A は irreducible

とする。$B=[B(i,j)]_{i,j=1,2,\cdots,L}$ は $B(i,j)=1$ or 0 であって

(4.2) $B(i,j)=1$ ならば $A(i,j)=1$

をみたしているとする。$1\le K\le L$ が存在して

(4.3) $$\begin{cases} B(i,j)=0 & \text{for all } i \quad \text{if } j\ge K+1 \\ B(i,j)=1 & \text{for some } i \quad \text{if } j\le K \end{cases}$$

とする。C として

$$C=[B(i,j)]_{i,j=1,2,\cdots,K}$$

とおくとき,

(4.4) C は irreducible

とする。さて, $0\le\varepsilon\le\varepsilon_2$ に対して $f_\varepsilon, h_\varepsilon\in\mathcal{F}_\theta(\Sigma_A)$ が定義されていて

(4.5) $$|||f_\varepsilon-f_0|||_\theta,\ |||h_\varepsilon-h_0|||_\theta\to 0 \quad (\varepsilon\to+0)$$

をみたしているとする。

$$\Sigma_C^+ = \{(\xi_1, \xi_2, \cdots) \in \prod_1^\infty \{1, 2, \cdots, K\} ;\ B(\xi_i, \xi_{i+1}) = 1 \ \forall i\}$$

とおき, σ_C は σ_A の Σ_C^+ への制限とする。 $k \in \mathcal{F}_\theta(\Sigma_A)$ は

$$(4.6) \qquad k(\xi) \begin{cases} = 0 & \text{if} \quad B(\xi_1, \xi_2) = 1 \\ \geq C_0 > 0 & \text{if} \quad B(\xi_1, \xi_2) = 0 \end{cases}$$

をみたすものとする。 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$ に対し

$$(4.7) \quad Z_\varepsilon(s) = \exp\Big(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \sum_{\sigma_A^n \xi = \xi} \exp S_n(-s f_\varepsilon + h_\varepsilon + k \log \varepsilon)(\xi)\Big)$$

とおく。

<u>Theorem 4.</u> f_0, h_0 は

$$f_0\big|_{\Sigma_C} > 0,$$

h_0 は Σ_C 上で real valued

であるとする。そのとき, $\varepsilon_1 > 0$ が存在し, また $s_0 \in \mathbb{R}$ とその $\mathbb{C}$ での近傍 D が存在して, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ に対して Z_ε は D で meromorphic であり, かつ D の中に pole s_ε をもつ。さらに

$$s_\varepsilon \longrightarrow s_0 \qquad (\varepsilon \to +0)$$

が成り立つ。

これから Theorem 3 の導き方を説明する。A，B，C は才3節のものとする。f_ε は Θ_ε に対して決まる f とすると

$$f_0(\xi) = |P_{\xi_0} P_{\xi_1}| \qquad \text{for all } \xi \in \Sigma_A$$

としてきまり，(4.5) の一才をみたす。また g_ε も Θ_ε に対する g とすると，

$$g_\varepsilon(\xi) = \log \varepsilon + \tilde{g}_\varepsilon(\xi)$$

$$|||\tilde{g}_\varepsilon - \tilde{g}_0|||_\theta \to 0$$

と表される。Θ_ε に対して (3.3) で定義される ζ を ζ_ε と記す。

$$s = s' + \log \varepsilon + \pi i / d_{max}$$

$$k(\xi) = 1 - f_0(\xi)/d_{max}$$

とおくと

$$-sf_\varepsilon + g_\varepsilon + \pi i = -s' f_\varepsilon + h_\varepsilon + k \log \varepsilon,$$

$$h_\varepsilon = (f_0 - f_\varepsilon)(\log \varepsilon + \pi i/d_{max}) + \tilde{g}_\varepsilon + \pi i k$$

なる関係が成り立つ。

$$h_0|_{\Sigma_C} = \tilde{g}_0|_{\Sigma_C} \quad : \text{ real valued}$$

より，f_ε, h_ε に対して (4.7) できまる Z_ε について

$$\zeta_\varepsilon(s) = Z_\varepsilon(s')$$

となり，Theorem 4より ζ_ε は

$$s_0 + \log \varepsilon + \pi i / d_{max}$$

の近くに pole をもつことがわかる。これが (3.5) の範囲にあることはほぼ自明である。

Theorem 4 の証明を記す必要があるが，今回は省略する。詳略な証明は[Ik 8] にある。

References

[B] R.Bowen, Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov differomorphism, S.L.N., 470, Springer-verlag, Berlin, 1975.

[G] C.Gerard, Asymptotique des poles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convex, Universite de Paris-Sud.

[Ik 1] M.Ikawa, Decay of solutions of the wave equation in the exterior of two strictly convex obstales, Osaka J.Math., **19**(1983), 127-194.

[Ik 2] ______, On the poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles, J.Math.Kyoto Univ., **23**(1983), 127-194.

[Ik 3] ______, Trapping obstacles with a sequence of poles of the scattering matrix converging to the real axis, Osaka J.Math., **22**(1985), 657-689.

[Ik 4] ______, Decay of solutions of the wave equation in the exterior of several convex bodies, Ann.Inst.Fourier, **38**(1988), 113-146.

[Ik 5] ______, On the poles of the scattering matrix for several strictly convex bodies,(to appear).

[Ik 6] ______, On the existence of poles of the scattering matrix for several convex bodies, Proc.Japan Acad., **64**(1988),91-93.

[Ik 7] ______, いくつかの凸な物体に対する散乱行列の極について, 数理研講究録 675(1988), 12-22.

[Ik 8] ______, Singular perturbation of symbolic flows and pole of the zeta functions, to appear in Osaka J.Math.

[IM] C.T.Ionescu Turcea and G.Marinescu, Théorie ergodique pour des classes d'opérateurs non complètement continues, Ann.Math., **52** (1950), 140-147.

[K] T.Kato, Perturbation theory of linear operators, Springer-Verlag, 1976.

[LP] P.D.Lax and R.S.Phillips, Scattering theory, Academic Press, New York,1967.

[P] W.Parry, Bowen's equidistribution theory and the Dirichlet density theorem, Ergod.Th. & Dynam.Sys.,**4**(1984),117-134.

[PP] W.Parry and M.Pollicott, An analogue of the prime number theorem for closed orbits of Axiom A flows, Ann. Math.,**118**(1983),573-591.