数理解析研究所講究録
第692巻 1989年 61-68

非線形双曲型方程式系の混合問題について

筑波大学数学系 柴田良弘 (YOSHIHIRO SHIBATA)

[序] ここでは, Zheng Songmu (復旦大学数学系, 上海市, 中国) との共同研究による, 論文[1]の内容を報告いたします。 この論文では, 境界条件に消散項のついた, Neumann 型の境界値問題を, nonlinear acoustic wave eq. や nonlinear elastodynamics について論じており, 特に, 十分小かつ滑らかな data に対し, global solution が存在することを示しました。 この種の研究は, 空間1次元の場合は, かなり前から色々なされてきましたが, 2次元以上の場合は, Qin氏[2]の独立の仕事 (nonlinear acoustic wave eq の特別な場合) 以外には我々の知る範囲ではみあたりません (1次元の論文のリストは [1] を参照して下さい)。

松村氏 [3] の仕事等で良く知られている様に, 小さな解を扱うには, 線形化した方程式の解の減衰度を正確に求めることが, 主な仕事となります。

Local solution の存在は，柴田，中村の共著［4］で知られていますので，線形化方程式の解の減衰を使って，このlocal solution の a priori estimate を得，常微分方程式論の場合と同様にして，解が $t=\infty$ まで延長できることを云います。

§1. 問題設定と結果

次の方程式系を考える。

$$
(1)\begin{cases}
\partial_t^2\vec{u} - \sum_{i=1}^{n} \partial_i(\vec{a_i}(\Lambda\vec{u})) = \vec{f} & \text{in } (0,\infty)\times\Omega, \\
\sum_{i=1}^{n} \nu_i\vec{a_i}(\Lambda\vec{u}) + \vec{b}(x,\partial_t\vec{u}) = \vec{g} & \text{on } (0,\infty)\times\Gamma \\
\vec{u}(0,x) = \vec{u_0}(x),\ \partial_t\vec{u}(0,x) = \vec{u_1}(x) & \text{in } \Omega
\end{cases}
$$

ここで，Ω は $\mathbb{R}^n$ の有界領域，Γ を Ω の境界で，C^∞ とする。$x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，$t$ は時間，$\partial_j=\partial/\partial x_j$，$\partial_t=\partial/\partial t$，$\nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)$ は Γ の単位外法線を表わす。$\vec{u}$ は l-row vector function であり，特に $l=1$（scalar case）と $l=n$ の場合のみ考えることにする。

$\Lambda\vec{u}$ は次の様に定義される。

(2) $l=n \Rightarrow \Lambda\vec{u} = \varepsilon(\vec{u}) = (\varepsilon_{ij}(\vec{u}))$，但し $\varepsilon_{ij}(u) =$

$\frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ $\quad (\vec{u} = {}^t(u_1, \dots, u_n))$。

(2)′ $\ell = 1 \Rightarrow \Lambda\vec{u} = (\partial_1 u, \dots, \partial_n u)$ 但し $\vec{u} = u$ (scalar).

$\vec{a}_i(\Lambda\vec{u})$, $\vec{b}(x, \partial_t\vec{u})$ は n-row vectors of real-valued functions in C^∞ 又は real scalar-valued functions in C^∞ で, 夫々 $\{\Lambda\vec{u} \in \mathbb{R}^{\ell n} \mid |\Lambda\vec{u}| \leqq U_0\}$, $\{(x, \partial_t\vec{u}) \in \Omega \times \mathbb{R}^\ell \mid |\partial_t\vec{u}| \leqq U_0\}$ と定義されているとする。更に, 次の条件を課す。

$\ell = n$の場合

(A.1) $\vec{a}_i = {}^t(a_{i1}, \dots a_{in})$. $a_{ipjq} = \partial a_{ip}/\partial \varepsilon_{jq}$ $(\Lambda\vec{u} = (\varepsilon_{pq}))$ とおく。このとき,

(3) $a_{ipjq} = a_{pijq} = a_{jqip}$.

更に, ある定数 $\delta_\Omega > 0$ があって,

(4) $$\sum_{i,p,j,q=1}^{n} a_{ipjq}(\Lambda\vec{u})\eta_{ip}\eta_{jq} \geqq \delta_\Omega \sum_{i,p=1}^{n} \eta_{ip}^2$$

が $|\Lambda\vec{u}| \leqq U_0$ と任意の $n \times n$ symmetric matrix $\eta = (\eta_{ip})$ について成立する。

(A.2) $\vec{b} = {}^t(b_1, \dots b_n)$, $b_{ij} = \partial b_i/\partial(\partial_t u_j)$ $(\vec{u} = {}^t(u_1 \cdots u_n))$ とおく。このとき,

(5) $b_{ij} = b_{ji}$。

更に, ある定数 $\delta_T > 0$ があって,

$$(6)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x, \wedge\vec{u})\xi_i\xi_j \geq \delta_P |\xi|^2$$

が全ての $x\in\Gamma$, $|\partial_t\vec{u}|\leq U_0$, $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ について成立する。

$\ell=1$ の場合

(A.1)′ $\quad a_{ij}=\partial\vec{a_i}/\partial(\partial u_j)\quad (\wedge\vec{u}=(\partial_1 u,\dots,\partial_n u))$

とおく。このとき,

(3)′ $\quad a_{ij}=a_{ji}$

(4)′ $\quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\wedge\vec{u})\xi_i\xi_j \geq \delta_\Omega|\xi|^2,\ \forall|\wedge\vec{u}|\leq U_0,\ \xi=(\xi_1\cdots\xi_n)\in\mathbb{R}^n$。

(A.2)′ $\quad b'=\partial\vec{b}/\partial(\partial_t\vec{u})$ とおく。このとき,

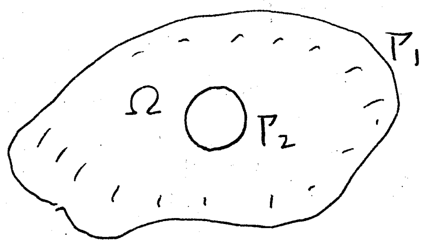
(6)′ $\quad b'(x,\partial_t\vec{u})\geq\delta_P,\ \forall x\in\Gamma,\ \forall|\partial_t\vec{u}|\leq U_0$。

the strain tensor が $\varepsilon(\vec{u})=(\varepsilon_{ij}(\vec{u}))$ ($n\times n$ matrix) で与えられているときは, 通常の nonlinear elastodynamics は (3), (4) を満足する。また通常の nonlinear acoustic equation も (3)′, (4)′ の条件を満足する。 (5), (6) 及び (6)′ が 境界条件に消散項が付いていることを記述している。

主要定理. 十分小かつ滑らかな, 初期値 $\vec{u_0}$, $\vec{u_1}$ について大域解 $\vec{u}$ が一意的に存在する。 ($\vec{u}\in C^2$)

[注] 詳しい定理の記述をするには，多小記号の準備が必要なので，ここでは省略しました。論文 [1] においては，更に解の $t \to \infty$ での挙動についても扱っています。

また，Ω が次の様な形



（Γ_1 と Neumann type
Γ_2 と Dirichlet bdry 条件
(i.e. $u = 0$ on Γ_2)
を課す.）

についても扱っており，この場合は作用素はもっと一般の場合が考えられることも論じております。 図

§2. 線形方程式系の解の減衰度.

先に述べた様に主要定理を示すには，上記表題の事実を示すことが主な仕事となります。ここでは少し一般化した形で問題設定をし，それについての結果を述べたいと思います。

$$(7)\begin{cases} P_\Omega(\underline{u}) = \partial_t^2 \underline{u} - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\partial_i\partial_j \underline{u} = 0 & \text{in } [0,T]\times\Omega \\ P_\Gamma(\underline{u}) = \sum_{i,j=1}^{n} \nu_i A_{ij}\partial_j \underline{u} + B(x)\partial_t \underline{u} = 0 & \text{on } [0,T]\times\Gamma \\ \underline{u}(0) = \underline{u}_0 \quad \partial_t \underline{u}(0) = \underline{u}_1 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

を考える。 ここで $\underline{u} = {}^t(u_1, \dots, u_m)$, m-row vector A_{ij}, $B(x)$ は 夫々 $m \times m$ real constant matrices と an $m \times m$ matrix of real-valued functions in $C^\infty(\bar{\Omega})$ とする。更に次の条件を課す。

(A.3) $\quad {}^tA_{ij} = A_{ji}$ and ${}^tB(x) = B(x)$.

(A-4) $\quad \exists\, \delta_\Omega > 0$ and $\exists\, \delta > 0$ s.t.

$$\sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij}\partial_j \underline{u}, \partial_i \underline{u})_{L^2(\Omega)} \geq \delta_\Omega \|\underline{u}\|^2_{H^1(\Omega)} - \delta \|\underline{u}\|^2_{L^2(\Omega)}$$

for $\forall\, \underline{u} \in H^1(\Omega)$

($(\ ,\ )_{L^2(\Omega)}$ は通常の $L^2(\Omega)$ の内積)。

(A.5) $\quad \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij}\partial_j \underline{u}, \partial_i \underline{u})_{L^2(\Omega)} \geq 0$ for $\forall\, \underline{u} \in H^1(\Omega)$.

(A-6) $\quad \exists\, \delta_\Gamma > 0$ s.t. $B(x) \geq \delta_\Gamma I_m$ for any $x \in \Gamma$

(I_m は $m \times m$ 単位行列)。

以上の仮定の下で次の定理を得る。

<u>定理</u>. L, L' を $2 \leqq L' \leqq L-4$ なる整数. u を(1)の十分滑らかな解とする。ならば,

$$\Big\{ \|\partial_t \underline{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij}\partial_j \underline{u}(t), \partial_i \underline{u}(t))_{L^2(\Omega)} \Big\}^{1/2}$$

$$\leqq C(1+t)^{-L'} \big\{ \|\underline{u}_0\|_{H^L(\Omega)} + \|\underline{u}_1\|_{H^{L-1}(\Omega)} \big\}.$$

(注) $l=1$ の場合は条件 (4)′ に注意すれば，$A_{ij}=a_{ij}(0)$ とおいて．($m=1$)

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(0)\partial_j u(t),\partial_i u(t)\right)_{L^2(\Omega)} \geq \delta_\Omega \|\Lambda u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

$l=n$ の場合は条件 (4) と Korn's inequality より，$A_{ij}=(a_{ipjq}(0))$ ($m=n$) とおいて

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}\partial_j\vec{u}(t),\partial_i\vec{u}(t)\right)_{L^2(\Omega)} \geq \delta_\Omega \|\Lambda\vec{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

なる評価を得る。こうして，上の定理は主要定理を証明することに用いることが出来る。

上の定理を証明するには，パラメーター k をもつ次の定常問題の解の $|k|\to\infty$ での挙動と，$k=0$ にのみ1位の極をもつ（但し $\mathrm{Im}\,k\leqq 0$ において）ことを示すことにある：

$$\begin{cases} P_k(\partial)\underline{u} = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\partial_i\partial_j\underline{u}+k^2\underline{u}=\underline{f} & \text{in } \Omega \\ Q_k(\partial)\underline{u} = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \nu_i A_{ij}\partial_j\underline{u}+\sqrt{-1}\,k\,B(x)\underline{u}=g & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

参考文献.

1. Y. Shibata and Zheng Sonbmu: On some nonlinear hyperbolic systems with damping boundary conditions, preprint in 1988.
2. Qin Tiehu: The global smooth solutions of second order qusilinear hyperbolic equations with dissipation boundary condition, Chinese Annals of Math., 9B (3) (1988), 251-269.
3. A. Matsumura: Global eixstence and sysmptotic of the solutions of the second order quasilinear hyperbolic equations with the first-order dissipation, Publ. RIMA, Kyoto Univ., 13 (1977), 349-379.