数理解析研究所講究録
第 692 巻 1989 年 79-87

Schrödinger 半群に対する長時間漸近形と正値解

東京都立大 村田實 (Minoru Murata)

定常 Schrödinger 方程式 $(-\Delta+V)u \equiv Hu = 0$
の正値解と Schrödinger 半群 e^{-tH} の $t\to\infty$ での
漸近行動との関わりを論じたい。

§1. 問題設定

Ω : R^n の領域

V : $L_{p,loc}(\Omega)$ に属する実数値関数 $(^{\exists}p>n/2)$

$$c \equiv \inf_{\substack{\varphi\in C_0^\infty(\Omega)\\ \|\varphi\|_2=1}} \int_\Omega |\nabla\varphi|^2+V|\varphi|^2\,dx > -\infty$$

$\{\Omega_j\}_{j=1}^\infty$: regular な境界を持つ Ω の領域の列で、$\Omega_j \subset\subset \Omega_{j+1}$, $\bigcup_j \Omega_j = \Omega$

H_j : $(-\Delta+V)$ on $C_0^\infty(\Omega_j)$ の $L_2(\Omega_j)$ での Friedrichs ext.

H : $(-\Delta+V)$ on $C_0^\infty(\Omega)$ の $L_2(\Omega)$ での Friedrichs ext.

Fact 1° $\quad {}^\forall \lambda \leq c \quad {}^\exists G_j(x, y; \lambda)$: positive Green function for $H_j - \lambda$ (i.e. G_j : レゾルヴェント $(H_j - \lambda)^{-1}$ の核関数, Ω_j で正値)

2° $\quad {}^\forall \lambda < c \quad {}^\exists G(x, y, \lambda)$: pos. Green f. for $(H - \lambda)$ with $G = \lim\limits_{j \to \infty} G_j$

3° $\quad \lim\limits_{j \to \infty} G_j(\cdot, y; c) \equiv \infty$ または

〃 〃 $\not\equiv G(\cdot, y; c) \in L^1_{loc}(\Omega)$

第1の場合 $(H - c, \Omega)$ は critical,
第2 〃 $(H - c, \Omega)$ は subcritical と呼ぶ。
$G(x, y : c)$ を minimal Green function と呼ぶ。
〃 を積分核とする作用素は $L_2(\Omega)$ での有界作用素ではない事に注意せよ。

4° $\quad {}^\exists$ positive sol. u of $(H - \lambda)u = 0$ in Ω

$\Longleftrightarrow \quad H - \lambda \geq 0 \quad$ i.e. $\quad \lambda \leq c$

5° $\quad U_j(t, x, y)$: kernel for e^{-tH_j}

$U(t, x, y)$: 〃 e^{-tH}

$$\Longrightarrow \lim_{j \to \infty} U_j(t, x, y) = U(t, x, y),$$

$$G(x, y, \lambda) = \int_0^\infty U(t, x, y) e^{-\lambda t} dt \qquad ({}^\forall \lambda < c)$$

《問題》 $U(t,x,y)$ の $t\to\infty$ での漸近形を求めよ。

命題 $^\forall \delta>0 \ ^\forall k=1,2,\cdots \ ^\exists m, ^\exists M>0$ s.t.

$$m e^{-(c+\delta)t} \leqq \sup_{(x,y)\in\Omega_k^2} U(t,x,y) \leqq M e^{-ct}$$
$$(\forall t>1)$$

以下、簡単のために $c=\inf\sigma(H)=0$ とする。

§2. Criticality & Subcriticality

定理 (i) $\int_1^\infty U(t,x,y)\,dt<\infty \iff (H,\Omega)$: subcrit.

$\iff {}^\exists q\geqq 0,\ q\not\equiv 0$ s.t. $H-q\geqq 0$

(ii) $\int_1^\infty U(t,x,y)\,dt\equiv\infty \iff (H,\Omega)$: crit.

$\iff H-q \not\geqq 0 \quad {}^\forall q\geqq 0,\ q\not\equiv 0$

$\Rightarrow$ $Hu=0$ in Ω の正値解は定数倍を除いて一意的

系 0 : eigenvalue $\Rightarrow (H,\Omega)$: critical

定理 $\Omega=\mathbb{R}^n$ とする。

(i) $^\exists$ pos. sol. v of $Hv=0$ in $\mathbb{R}^n$ s.t.

$$\int_1^\infty r^{1-n}\left[\int_{S^{n-1}} v^2(r\omega)\,d\omega\right]^{-1} dr = \infty$$

$\Rightarrow$ $(H, \mathbb{R}^n)$: critical

(ii) $\exists$ pos. sol. u of $Hu = 0$ in $\mathbb{R}^n$ s.t.

$$\int_1^\infty r^{1-n}\, u^{-2}(r\omega)\,dr < \infty \qquad {}^\forall \omega \in U$$

for a Borel subset U of S^{n-1} with $|U| > 0$

$\Rightarrow$ $(H, \mathbb{R}^n)$: subcrit.

証明には、上記定理と $(H\varphi, \varphi) = \int \left|\nabla\left(\frac{\varphi}{v}\right)\right|^2 v^2\,dx$ を用いよ。これは市原（Publ. RIMS, Kyoto Univ. 14 (1978), 441–486）による対称拡散過程の transience & recurrence の判定法からも証明される。

(H, Ω) が critical な場合，弱い意味で

$$U(t,x,y) \sim U(t,x_0,y_0)\,\frac{v(x)}{v(x_0)}\,\frac{v(y)}{v(y_0)} \quad \text{as } t \to \infty$$

が言える。　ここで x_0, y_0 は固定点，v は"唯1つ"の正値解。即ち次の定理が成立する。

定理 (H, Ω) : critical, $T > 0$, $(x_0, y_0) \in \Omega^2$

v : pos. sol. of $Hv = 0$ in Ω

$$\Rightarrow \int_T^\infty U(t,x,y)\, e^{-\alpha t}\, dt$$

$$= \frac{v(x)}{v(x_0)} \cdot \frac{v(y)}{v(y_0)} \int_T^\infty U(t,x_0,y_0)\, e^{-\alpha t}\, dt \left[1 + o(1)\right]$$

as $\alpha \downarrow 0$ uniformly on each compact subset of Ω^2

証明には Y. Pinchover (Preprint 1988) の observation

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} G(x,y;\alpha)/G(x_0,y_0;\alpha) = v(x)\, v(y)/v(x_0)\, v(y_0)$$

を用いる。

注意 v : L_2 固有関数

$$\Rightarrow U(t,x,y) = v(x)\, v(y)\left[1 + o(1)\right] \quad \text{as } t \to \infty$$

on $\forall K \subset\subset \Omega^2$

(H, Ω) が subcritical な場合, e^{-tH} の $t \to \infty$ での漸近形はかなり複雑である。以下 $\Omega = \mathbb{R}^n$ として 2, 3 の考察をする。

§3. 1-dimensional case

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V \quad \text{on } L_2(\mathbb{R}), \quad \inf \sigma(H) = 0$$

<u>定理</u> $(H, \mathbb{R})$: subcrit.

$\Longleftrightarrow$ $^\exists \psi_1, \psi_2$: pos. sol. s.t.

$$\lim_{x \to \pm\infty} (\psi_1(x)/\psi_2(x))^{\pm 1} = 0$$

<u>定理</u> $(H, \mathbb{R})$: subcrit. $\Rightarrow$ $\{F_{jk}(t)\}_{j,k=1}^{2}$ s.t.

$$U(t, x, y) = \sum_{j,k=1}^{2} F_{jk}(t)\psi_j(x)\psi_k(y)\,[1 + o(1)]$$

$$\text{as } t \to \infty \quad \text{on } {}^\forall K \subset\subset \mathbb{R}^2$$

$$F_{11} + F_{22} > 0, \quad F_{12}^2 \leq F_{11}F_{22}, \quad F_{12} = F_{21}$$

$$F_{jj} \geq 0, \quad \liminf_{t \to \infty} F_{12}(t) \geq 0$$

最後の結論 $\liminf F_{12}(t) \geq 0$ の証明には ま定理 を用いる。他は Titchmarsh - Kodaira の固有関数展開から導かれる。

<u>例 1</u> V の $+\infty$ と $-\infty$ での漸近行動が同程度でないと，"弱い方" の正値解だけが漸近公

式に現われる。例えば $V(x) = \begin{cases} 0 & (x > 0) \\ 1 & (x \leq 0) \end{cases}$
の場合,

$$U(t,x,y) \cong \text{Const. } t^{-3/2} \psi(x)\psi(y) \quad \text{as } t \to \infty$$

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 + x & (x > 0) \\ e^{x} & (x \leq 0) \end{cases}$$

例2　$U(t,x,y)$ の漸近形に2つの同等でない関数 F_{11} と F_{22} が現われる様なポテンシャル V を Gelfand-Levitan のスペクトル逆問題に対する理論を用いて構成できる。即ち,

$$^{\exists}V(x) = \begin{cases} V_{\pm}(x), & \pm x \geq 1 \\ k, & 0 \leq x < 1 \\ 2k, & -1 < x < 0 \end{cases} \quad (k \gg 1).$$

s.t.

$$e^{-t(-d^2/dx^2 + V)} \text{ の kernel } U(t,x,y)$$
$$\cong F_1(t)\chi_1(x)\chi_1(y) + F_2(t)\chi_2(x)\chi_2(y)$$

$$F_1(t) \cong t^{-3/4} \exp(-2\sqrt{t})$$
$$F_2(t) \cong \quad 〃 \qquad 〃 \quad [2 + \cos\log\sqrt{t}\,]$$
χ_1, χ_2 : linearly independent pos. sol.

§4. 球対称ポテンシャル

$V = V(|x|)$, $H = -\Delta + V$, $(H, \mathbb{R}^n)$: subcrit.
このとき (cf. M. Murata, Duke Math. J. 53 (1986), 869−943) 次の(i)又は(ii)が成立。

(i) 正値解 $K(x,\infty)$ が存在して, 任意の正値解は $K(x,\infty)$ の定数倍。

(ii) 単位球面 S^{n-1} で parametrize された正値解の族 $\{K(x,\omega)\}_{\omega\in S^{n-1}}$ が存在して

$^\forall u$: pos. sol. $\quad ^{\exists 1}\mu$: finite Borel measure on S^{n-1}

s.t.
$$u(x) = \int_{|\omega|=1} K(x,\omega)\,\mu(d\omega)$$

<u>Conjecture</u> $\quad ^\exists F_0(t)$ s.t.

$$U(t,x,y) \doteqdot F_0(t)\,\Phi(x,y) \quad \text{as } t\to\infty$$

$$\Phi(x,y) = \begin{cases} K(x,\infty)\,K(y,\infty) & \text{for the case (i)} \\ \displaystyle\int_{S^{n-1}} K(x,\omega)\,K(y,\omega)\,d\omega & \quad \text{〃} \quad \text{(ii)} \end{cases}$$

この予想は第1の場合と、第2の場合の Special case には成立することが確められている。

§5. いくつかの注意と問題

1° テンサー積や摂動法を用いて既知の事実から情報を引き出せる。例えば、Very Schort Range Potentials に関しては M. Murata [J. Funct. Anal. 56 (1984), 300–310] を見よ。

2° 問題

$$U(t,x,y) \underset{?}{\cong} \sum_{j=1}^{N} F_j(t)\,\Phi_j(x,y) \quad \text{as } t\to\infty$$

$$(1\leq N\leq\infty,\ \Phi_j(\cdot,y) : \text{pos. sol.})$$

$\{\Phi_j(\cdot,y)\}_j$ の Martin 理論での特徴づけ？

$F_j(t)$ の decay rate と $\Phi_j(\cdot,y)$ の growth rate の関係？