数理解析研究所講究録
第692巻 1989年 163-175

複素ポテンシャルに対する固有関数展開

東大教養　北田　均(Hitoshi Kitada)

序.　空間次元 $n \geqq 2$ の時の Schrödinger 作用素に対する固有関数展開は池部晃生[1]による結果が最初のものであろう。その後黒田成俊[2]，加藤敏夫-黒田成俊[3,4]，Agmon[5]等によってポテンシャルの減衰に対する仮定が改善された。これらの方法はSchrödinger作用素 $H = H_0+V(x) =-\Delta/2+V(x)$のリゾルベント$R(z)=(H-z)^{-1}$の実軸上への境界値$R(\mu\pm i0)$を用い、Lippmann-Schwinger方程式

$$\phi_{\pm}(x,\xi) = e^{ix\xi} - R_0(\mu\pm i0)V\phi_{\pm}(\cdot,\xi)$$

を解いて、

$$\phi_{\pm}(x,\xi) = (I + R_0(\mu\pm i0)V)^{-1}(e^{ix\xi})$$

と固有関数$\phi_{\pm}(x,\xi)$を求めるものである。但し、$R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}$.
この方向で望月清[6]は複素ポテンシャルを論じた。

他方、Jäger[7]は$(R(\mu\pm i0)f)(x)$の$|x| \to \infty$の漸近展開の第一項から固有関数が得られることを示した。この方法は斎藤義実[8]，Agmon[9]等によって長距離力まで拡張された。

以上の二方法は、非常にきつい仮定のもとでFadeev方程式を解く場合を除いて（例えば谷島賢二[10]）、本質的に二体問題に限定されるが固有関数、波動作用素の完全性までいえる点では強力な方法である。

本稿では完全性は散乱理論の問題として残し、本質的に波動作用素$W_\pm$の存在とintertwining propertyのみを仮定して、$\mathcal{R}(W_\pm)$上の固有関数展開を複素ポテンシャルに対し構成する。方法はSchrödinger方程式の基本解e^{-itH}の $t \to \infty$の漸近挙動（即ち、$W_\pm$の存在）から、固有関数を$W_\pm$の積分核として構成するものである。固有関数の性質は intertwining propertyから得られる。この方法の特徴は、微分方程式$(H-\mu)\phi_\pm=0$の解の存在が波動作用素$W_\pm$の存在に帰着されることを指摘している点である。

本稿では簡単のため二体短距離力の場合のみ考えるが、少し変更すれば多体や長距離力の場合も同様に扱える。詳細は[11,12,13]を見られたい。なお本稿の方法によれば特異点を持ったポテンシャルも扱える。([14])

1． 仮定と一般的結果．

考えるSchrödinger作用素は

$$(1) \qquad H = H_0 + V(x), \quad H_0 = -\frac{1}{2}\Delta = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\partial^2/\partial x_j^2 , \quad n \geq 1$$

で、ポテンシャル$V(x)$は$\mathbb{C}$-値でよいが、次の仮定を満たすとする。

仮定　Ｉ．　任意の多重指数αに対し、$\sup_x |\partial_x^\alpha V(x)| < \infty$.

この仮定の下に、Schrödinger方程式

$$(2)\qquad (D_t + H)U(t) = 0, \quad U(0) = I \qquad (D_t = -i\partial/\partial t)$$

の解U(t)は、

$$(3)\qquad U(t) = e^{-itH_0}\left(I+\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{\nu-1}} dt_\nu V(t_1)\cdots V(t_\nu)\right),$$

$$V(t) = e^{itH_0}V(x)e^{-itH_0}$$

と一意的に構成され、ｔについて群をなす。したがって、$U(t) = e^{-itH}$と書く。更に仮定より、

$$(4)\qquad \|U(t)\|_{B(\mathcal{H})} \leqq e^{Mt} \qquad (M > 0,\ \mathcal{H} \equiv L^2(R^n))$$

だから、$|\mathrm{Im}\ z| > M$なら、ｚはＨのリゾルベント集合$\rho(H)$に属する。

次の仮定は波動作用素の存在とintertwining propertyに関するものである。$E_0(\Delta)$でH_0のスペクトル測度を表す。

仮定　ＩＩ．　あるBorel集合$\Delta \subset R^1$と有界な（直交とは限らない）$\mathcal{H}$での

射影作用素$P_{\pm}(\Delta)$があって次のｉ）－ｖ）を満たす：

i)　$P_{\pm}(\Delta)H \subset HP_{\pm}(\Delta)$.

ii)　$\sup_{t} \| e^{-itH}P_{\pm}(\Delta)\| < \infty$.

iii)　次の強極限が存在する：

$$W_{\pm}(\Delta) = \operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} P_{\pm}(\Delta)e^{itH}e^{-itH_0}E_0(\Delta),$$

$$Y_{\pm}(\Delta) = \operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} P_{\pm}(\Delta)^{*}e^{itH^{*}}e^{-itH_0}E_0(\Delta).$$

iv)　$W_{\pm}(\Delta)H_0 \subset HW_{\pm}(\Delta)$,　$Y_{\pm}(\Delta)H_0 \subset H^{*}Y_{\pm}(\Delta)$.

v)　$P_{\pm}(\Delta) = W_{\pm}(\Delta)Y_{\pm}(\Delta)^{*}$,　$E_0(\Delta) = Y_{\pm}(\Delta)^{*}W_{\pm}(\Delta)$.

$V(x)$は$\mathbb{C}$-値かもしれないので、波動作用素$W_{\pm}(\Delta)$は部分等距離作用素とは限らない。しかし、仮定　ＩＩ－ｖ）より、$W_{\pm}(\Delta)\restriction_{E_0(\Delta)\mathcal{H}}$は可逆で、逆$Y_{\pm}(\Delta)^{*}\restriction_{P_{\pm}(\Delta)\mathcal{H}}$を持つ。特に、

(5) $$\mathscr{R}(W_{\pm}(\Delta)\restriction_{E_0(\Delta)\mathscr{H}}) = P_{\pm}(\Delta)\mathscr{H}.$$

$\mathscr{H} = L^2(R^n_x)$から$\hat{\mathscr{H}} = L^2(R^n_\xi)$へのＦｏｕｒｉｅｒ変換を$\mathscr{F}$で表し、一般化されたＦｏｕｒｉｅｒ変換を次で定義する。

定義． $\mathscr{F}_{\pm}(\Delta) = \mathscr{F}Y_{\pm}(\Delta)^*$, $\tilde{\mathscr{F}}_{\pm}(\Delta) = W_{\pm}(\Delta)\mathscr{F}^{-1}$.

すると、

(6) $$\tilde{\mathscr{F}}_{\pm}(\Delta)\mathscr{F}_{\pm}(\Delta) = P_{\pm}(\Delta),$$

$$\mathscr{F}_{\pm}(\Delta)\tilde{\mathscr{F}}_{\pm}(\Delta) = \hat{E}_0(\Delta) \quad (\equiv \mathscr{F}E_0(\Delta)\mathscr{F}^{-1}).$$

$\Gamma(\Delta) = \{\xi \in R^n \mid \xi^2/2\ \Delta\}$とおき、$\hat{\mathscr{H}}_0(\Delta) = \hat{E}_0(\Delta)\hat{\mathscr{H}} = L^2(\Gamma(\Delta))$と書く。

また、$H^k_s = H^k_s(R^n) = \{f \in \mathscr{S} \mid \|\langle x\rangle^s\langle D_x\rangle^k f\| < \infty\}$, $L^2_s(\Gamma(\Delta)) = \{f \in L^2_{loc} \mid \|\langle x\rangle^s f\|_{L^2(\Gamma(\Delta))} < \infty\}$.

定理． 任意の偶整数$m_0 > n/2$,整数$k \geqq 0$,実数$s > n/2$に対し、$H^k_s(R^n_x) \otimes L^2_{-m_0-k}(\Gamma(\Delta))$に属する関数$\tilde{\phi}_{\pm}(x,\xi)$, $\phi_{\pm}(x,\xi)$が存在して次を満たす。

i)任意のf, $g \in \mathscr{S} = \mathscr{S}(R^n)$に対し、

$$(\mathscr{F}_{\pm}(\Delta)f,g) = (2\pi)^{-n/2}\langle\tilde{\phi}_{\pm}(x,\xi),\ \overline{g(x)}\otimes\hat{E}_0(\Delta)f(\xi)\rangle,$$

$$(f,\mathscr{F}_{\pm}(\Delta)g) = (2\pi)^{-n/2}\langle\overline{\phi_{\pm}(x,\xi)},\ \overline{g(x)}\otimes\hat{E}_0(\Delta)f(\xi)\rangle.$$

この条件によって、$\tilde{\phi}_{\pm}$, $\phi_{\pm}$は一意に定まる。

ii) $(H - \xi^2/2)\tilde{\phi}_{\pm}(x,\xi) = 0$, $(H - \xi^2/2)\phi_{\pm}(x,\xi) = 0.$

証明． 他の場合も同様なので、$\mathscr{F}_{+}(\Delta)$に対してのみ示す。m_0を偶整数で $> n/2$とし、$\chi_0(\xi) = \langle\xi\rangle^{-m_0} \in \hat{\mathscr{H}}$とおく。$f \in \mathscr{H}$とし、

(7) $$Z(t)f(x) = \chi_0(D_x)W_{+}(t)E_0(\Delta)f(x),$$

$$W_{+}(t) = e^{itH}P_{+}(\Delta)e^{-itH_0}$$

とおくと、仮定 II－ii) より$W_{+}(t)$は t について一様有界な作用素である。そして、

(8) $$\mathscr{F}_{+}(\Delta)\mathscr{F}f(x) = W_{+}(\Delta)f(x) = \langle D_x\rangle^{m_0}\ \underset{t\to\infty}{\text{s-lim}}\ Z(t)f(x).$$

但し、 s-lim は$H^{m_0}(R^n)$での強収束。

$\chi_0 \in \hat{\mathcal{H}}$なので、$g \in \mathcal{H}$に対し、

(9) $$\chi_0(D_x)g(x) = (2\pi)^{-n/2}\int e^{ix\xi}\chi_0(\xi)(\mathcal{F}g)(\xi)d\xi$$

$$= (2\pi)^{-n/2}(\mathcal{F}g,\ e^{-ix\xi}\chi_0(\xi))_{\hat{\mathcal{H}}}\ .$$

したがって、(7)より、

(10) $$Z(t)f(x) = (2\pi)^{-n/2}(\mathcal{F}W_+(t)E_0(\Delta)f,\ e^{-ix\xi}\chi_0(\xi))_{\hat{\mathcal{H}}}\ .$$

よって、

(11) $$\sup_{t,x}|Z(t)f(x)| \leqq C\|\chi_0\|\|E_0(\Delta)f\|.$$

ゆえに、Riesz lemmaより、任意のt, xに対し、関数$b_{\chi_0}(t,x,\xi) \in \hat{\mathcal{H}}_0(\Delta)$が存在して、

(12) $$Z(t)f(x) = (2\pi)^{-n/2}\int\hat{E}_0(\Delta)\hat{f}(\xi)b_{\chi_0}(t,x,\xi)d\xi,$$

$$\sup_{t,x}\|b_{\chi_0}(t,x,\xi)\|_{\hat{\mathcal{H}}_0(\Delta)} \leqq C\|\chi_0\|$$

を満たす。

次に、ある数列$t_k \to \infty$,零集合$N \subset R^n$があって、任意の$x \in R^n - N$に対し、$\hat{\mathcal{H}}_0(\Delta)$における弱極限

$$(13) \qquad b^+_{\chi_0}(x,\xi) = \underset{k \to \infty}{\text{w-lim}}\, b_{\chi_0}(t_k,x,\xi)$$

が存在することを示す。実際、(8)の強収束は$\mathcal{H} = L^2(R^n)$でのものだから対角線論法により、与えられた可算な$\mathcal{H}$のdense subset Dに対し、数列$t_k \to \infty$と零集合Nがあって、任意の$x \in R^n - N$, $f \in D$に対し、極限

$$\lim_{k\to\infty} Z(t_k)f(x)$$

が存在して、

$$(15) \qquad \chi_0(D_x)W_+(\Delta)f(x)$$

に等しいことがいえる。一般の$f \in \mathcal{H}$に対しては、任意に与えられた$\varepsilon > 0$に対し、(11)より$h \in D$を

$$(16) \qquad \sup_{t,x} |Z(t)f(x) - Z(t)h(x)| < \varepsilon/3$$

ととれる。したがって、

$$(17) \qquad |Z(t_k)f(x) - Z(t_m)f(x)| < 2\varepsilon/3 + |Z(t_k)h(x) - Z(t_m)h(x)|.$$

右辺は(14)と$h \in D$より、$x \in R^n - N$に対し、$k, m \to \infty$の時、漸近的に$< \varepsilon$となる。したがって、任意の$f \in \mathcal{H}$, $x \in R^n - N$に対し、極限

$$(18) \qquad \lim_{k\to\infty} Z(t_k)f(x) = \lim_{k\to\infty} (2\pi)^{-n/2}\int b_{\chi_0}(t_k,x,\xi)\hat{E}_0(\Delta)\hat{f}(\xi)d\xi$$

の存在がいえた。$f \in \mathcal{H}$は任意なので、弱極限(13)の存在がいえる。(18)はa.e. xに対し、

$$(19) \qquad \chi_0(D_x)W_+(\Delta)f(x)$$

に等しい。

(13)が存在すれば、(12)より、$x \in R^n - N$に対し、

$$(20) \qquad \|b^+_{\chi_0}(x,\cdot)\|_{\hat{\mathcal{H}}_0(\Delta)} \leqq C\|\chi_0\|.$$

よって、$s > n/2$なら

$$(21) \qquad b^+_{\chi_0}(x,\xi) \in L^\infty(R^n,\hat{\mathcal{H}}_0(\Delta)) \subset H^0_{-s}(R^n_x)\otimes L^2(\Gamma(\Delta)).$$

(8)に戻って、(12), (13)より、

$$(22) \qquad \mathcal{F}_+(\Delta)\mathcal{F}f(x)=(2\pi)^{-n/2}\int\langle D_x\rangle^{m_0} b^+_{\chi_0}(x,\xi)\hat{E}_0(\Delta)\hat{f}(\xi)d\xi.$$

但し、この等式は$b^{+}_{\chi_0}(x,\xi)$を(x,ξ)についての超関数と考えてのものである。よって、

$$\tilde{\phi}_{+}(x,\xi) = \langle D_x\rangle^{m_0} b^{+}_{\chi_0}(x,\xi) \in H^{-m_0}_{-s}(R^n_x)\otimes L^2(\Gamma(\Delta)) \tag{23}$$

とおけば、$\tilde{\phi}_{+}$はHの固有超関数となる。

仮定ＩＩ－ｉｖ）より、$\lambda_0 \in \rho(H)$として、任意の整数$k \geq 0$に対し

$$\tilde{\phi}_{+}(x,\xi)=(\xi^2/2-\lambda_0)^{(m_0+k)/2}(H-\lambda_0)^{-(m_0+k)/2}\langle D_x\rangle^{m_0} b^{+}_{\chi_0}(x,\xi) \tag{24}$$

が導かれる。（ここで仮定Ｉを使った。）$(H-\lambda_0)^{-(m_0+k)/2}\langle D_x\rangle^{m_0}$は$H^0_{-s}$を$H^k_{-s}$に写すから、結局

$$\tilde{\phi}_{+}(x,\xi) \in H^k_{-s}(R^n_x)\otimes L^2_{-m_0-k}(\Gamma(\Delta)) \tag{25}$$

がいえ、証明が終わる。

２． 例． ２体複素短距離力． 仮定Ｉを満たす複素ポテンシャル$V(x)$が、さらに

$$|V(x)| \leqq C\langle x\rangle^{-1-\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0)$$

を満たすとする。次の記号を使う。

$$R_0(z) = (H_0 - z)^{-1},$$

$$A = \langle x\rangle^{-(1+\varepsilon)/2}, \qquad B = \langle x\rangle^{(1+\varepsilon)/2}V(x), \qquad Q(z) = BR_0(z)A$$

黒田[15]より、R^1の閉零集合 N があって、$\mu \in \Delta_0 \equiv R^1 - N$ に対し、逆$(1+Q(\mu \pm i0))^{-1}$が$B(\mathscr{H})$に存在する。したがって、加古－谷島[16]の仮定がすべて満たされる。そこで、有界Borel集合Δを$\overline{\Delta} \subset \Delta_0$ととって、

$$P_{\pm}(\Delta) = E(\Delta) \equiv \underset{\nu \downarrow 0}{\text{w-lim}} \ \frac{1}{2\pi i} (R(\mu+i\nu) - R(\mu-i\nu)) \qquad \text{in} \quad L^2(\Delta,\mathscr{H})$$

とおくと、[16]の結果より仮定ＩＩがすべて満たされる。よって、第1節の定理より、Hの$E(\Delta)\mathscr{H} = \mathscr{R}(W_{\pm}(\Delta)\restriction_{E_0(\Delta)\mathscr{H}})$上の固有関数展開が構成できる。

３．　その他の例．　仮定ＩＩを一般化することによって、以下の場合も扱える。詳細は[11,12,13]を参照。

3.1.　Coulomb特異性を含む2体実長距離力．

3.2.　2体実振動型長距離力．

3.3.　N体実短・長距離力＋2体複素短距離力．

3.4.　N体複素 very short-range small potentials.

文　献

[1] T. Ikebe, Eigenfunction expansions associated with the Schroedinger operators and their applications to scattering theory, Arch. Rational Mech. Anal., 5, 1-34 (1960).

[2] S. T. Kuroda, Perturbation of eigenfunction expansions, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 57, 1213-1217 (1967).

[3] T. Kato and S. T. Kuroda, Theory of simple scattering and eigenfunction expansions, in Functional Analysis and Related Fields, pp 99-131, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1970.

[4] T. Kato and S. T. Kuroda, The abstract theory of scattering, Rocky Mt. J. Math., 1, 127-171 (1971).

[5] S. Agmon, Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory, Ann. Sc. Norm Sup. Pisa, IV Ser.2, 151-218 (1975).

[6] K. Mochizuki, Eigenfunction expansions associated with the Schrödinger operators with a complex potential and the scattering theory, Publ. RIMS, Kyoto Univ., Ser.A, 4, 419-466 (1968).

[7] W. Jäger, Ein gewöhnlicher Differential operator zweiter Ordnung für Funktionen mit Werten in einem Hilbertraum, Math. Z., 113, 68-98 (1970).

[8] Y.Saitō, Spectral representation for Schrödinger operators with long-range potentials, Lecture Notes in Math., 727, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1979.

[9] S. Agmon, Some new results in spectral and scattering theory

for differential operators on R^n, Séminaire Goulaouic-Schwartz, Ecole Pol., Palaiseau, 1978/1979.

[10] K. Yajima, An abstract stationary approach to three-body scattering, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec.IA, 25, 109-132 (1978).

[11] H. Kitada, Fundamental solutions and eigenfunction expansions for Schrödinger operators, I. Fundamental solutions, Math. Z., 198, 181-190 (1988).

[12] A. Jensen and H. Kitada, Fundamental solutions and eigenfunction expansions for Schrödinger operators, II. Eigenfunction expansions, Math. Z., 199, 1-13 (1988).

[13] H. Kitada, Fundamental solutions and eigenfunction expansions for Schrödinger operators, III. Complex potentials, preprint (1989).

[14] H. Kitada, Fundamental solutions and eigenfunction expansions for Schrödinger operators, IV. Singular potentials, in preparation.

[15] S. T. Kuroda, An abstract stationary approach to perturbation of continuous spectra and scattering theory, J. Analyse Math., 20, 57-117 (1967).

[16] T. Kako and K. Yajima, Spectral and scattering theory for a class of non-selfadjoint operators, Sci. Papers Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo, 26, 73-89 (1976).