

## 特異点除去に対応する de Rham 系の積分 の計算

新潟大・教養 田島慎一 (Shinichi TAJIMA)

東大・理 内田素夫 (Motoo UCHIDA)

序. — 以下,  $X$  を複素多様体,  $\mathcal{O}_X$ :  $X$  上の正則函数の層,  $\mathcal{D}_X$ :  $X$  上の微分作用素の層,  $Y \subset X$  の subvariety (特異点を許す),  $I_Y$ :  $Y$  の定義 ideal とする。

$Y$  に台を持つ  $d$ -次の algebraic local cohomology は, Grothendieck 流には  $d$ -次で定義される:

$$H_{[Y]}^e(\mathcal{O}_X) = \varinjlim_k \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^e(\mathcal{O}_X/I_Y^k, \mathcal{O}_X).$$

これは左  $\mathcal{D}_X$ -加群の構造を持つが,  $\mathcal{D}_X$  上 coherent であり, さらに holonomic 系となることが知られている。(柏原 [8])

$Y$  が non singular submfd の場合は,  $\text{codim}_{\mathbb{C}} Y = d$  とすると,  $H_{[Y]}^i(\mathcal{O}_X) = 0$  ( $i \neq d$ ) であり, 残った  $H_{[Y]}^d(\mathcal{O}_X)$  の構造も簡単である。(例としては Hotta [6], 柏原 [9] 等参照。)

それに加えて  $\gamma$  が特異点を持つ場合は,  $\gamma$  に台を持つ alg. loc. cohomology の  $\mathcal{D}_X$ -加群構造はそれほど簡単ではない。しかしながら, 柏原, Mebkhout に依ると, 一般に次が成立することが知られている。ここでこの図 2 のコホモロジー群を扱う代わりに  $\mathcal{D}_X$ -加群の複体  $\mathbb{R}\Gamma_{[\gamma]}(\mathcal{O}_X)$  を考えている。

定理 (柏原 [1], Mebkhout [12])

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathbb{R}\Gamma_{[\gamma]}(\mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X) \cong \mathbb{C}_\gamma$$

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathbb{R}\Gamma_{[\gamma]}(\mathcal{O}_X)) \cong \mathbb{R}\Gamma_\gamma \mathbb{C}_X$$

従って subvariety  $\gamma$  を考える際に, 対応する  $\mathcal{D}_X$ -複体  $\mathbb{R}\Gamma_{[\gamma]}(\mathcal{O}_X)$  又は  $\mathcal{H}e_{[\gamma]}^d(\mathcal{O}_X)$  ( $d \in \mathbb{Z}$ ) たちの  $\mathcal{D}_X$ -加群としての構造を調べる面白そうである。又, Riemann-Hilbert 対応の理論 (柏原 [1]) によると,  $\gamma$  の交叉 cohomology に対応する  $X$  上の holonomic 系が存在するか, それは  $\gamma$  に台を持つ  $\gamma$  の特異点集合の外では  $\mathcal{R}\gamma_{!X} = \mathcal{H}e_{[\gamma]}^d(\mathcal{O}_X)$  ( $d = \text{codim } \gamma$ ) と一致する。この意味でも  $\gamma$  に台を持つ holonomic 系を調べることは面白そうである。

そこで私達は,  $\gamma$  が簡単な特異点を持つ場合に  $\mathcal{H}e_{[\gamma]}^d(\mathcal{O}_X)$  の  $\mathcal{D}_X$ -加群構造を具体的に計算してみることにした。以下  $\gamma$  は超曲面とするので,  $d=1$  以外は消えて,  $\mathcal{H}e_{[\gamma]}^1(\mathcal{O}_X)$  だけが問題となる。

その為に, まず  $\gamma$  の resolution  $\tilde{\gamma}$  をとり,  $\tilde{\gamma}$  上の正則関

数のなす層  $\mathcal{O}_{\tilde{Y}}$  を  $\mathcal{D}_{\tilde{Y}}$ -加群と見做す (これを de Rham 系  
と号ぶ)。次にその (写像  $\tilde{Y} \rightarrow X$  に沿った) 積分

$\int_{X \leftarrow \tilde{Y}} \mathcal{O}_{\tilde{Y}}$  の  $\mathcal{D}_X$ -加群としての構造を調べる, という方  
針をとった。

§1 で,  $Y = \{y^3 - x^5 = 0\}$  の場合を例にとり, 平面曲  
線に台を持つ alg. loc. cohomology を調べる。(cf. 田島 [6])

§2 で,  $\mathcal{D}_X$ -ideal の Gröbner basis の復習をした後に,  
 $H^1_{[Y]}(\mathcal{O}_X)$  (§1 で計算したものの) の characteristic cycle の  
計算をした。

最後に §3 に於て,  $A_1$  型有理二重点を特異点とする曲面:  
 $z^2 - xy = 0$  の場合の計算を行った。

Gröbner basis については野村正俊氏に教えて頂いた事  
が多かった。ありがとうございました。

§1. 平面曲線に台を持つ algebraic local cohomology  
 この節では,  $F = \{y^3 - x^5 = 0\}$  の場合を例にとり,  
 平面曲線  $F \subset X = \mathbb{C}^2$  に台を持つ alg. loc. cohomology  
 $\mathcal{H}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X)$  の  $\mathcal{O}_X$ -加群としての構造を調べる。

Tajima [6] で考えたように  $F$  の normalization  $T$  を導  
 入しよう。  $T \xrightarrow{\pi} F \subset \mathbb{C}^2$  。

$$\begin{array}{ccc} T (= \mathbb{C}_t) & & \\ \pi \downarrow & \searrow f & \\ F & \hookrightarrow & \mathbb{C}^2 \end{array} \quad f(t) = (t^3, t^5)$$

と定める。

$\mathcal{O}_T$ -加群  $\mathcal{O}_T$  の de Rham 複体  $^*\mathcal{D}_T$  の  $f$  による直写像は

$$Rf_* (\mathcal{D}_T) = \mathcal{D}_F$$

となるが, Verdier duality を用いると, (cf. Verdier [9])

$$Rf_* (\mathcal{D}_T) = \mathcal{D}_F \cong R\Gamma_F(\mathcal{O}_X) [2]$$

となる。一方,  $\mathcal{m} = \mathcal{H}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X)$  の de Rham 複体は  
 はじめに述べた柏原, Melikow による結果を用いると,

$$\begin{aligned} R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{m}) &= R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, R\Gamma_{[F]}(\mathcal{O}_X) [1]) \\ &\cong R\Gamma_F \mathcal{O}_X [1] \end{aligned}$$

であるが, Riemann-Hilbert 対応の理論により,

$$\int_f \mathcal{O}_T = \mathcal{H}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X)$$

となることが分かる。(これは左辺の積分を計算した後、直接  
右辺の積分を計算する。) )

\*  $\mathcal{D}_T$ -加群  $\mathcal{M}$  に対し、 $\mathcal{R}\mathcal{H}\mathcal{O}\mathcal{M}_{\mathcal{D}_T}(\mathcal{O}_T, \mathcal{M})$  を  $\mathcal{M}$  の  
de Rham 複体とよぶ。

従って、 $\mathcal{O}_T$  の  $f$  に対し、 $\mathcal{M}$  積分を計算するとよい。そのために  
 $f$  を埋め込みと projection に分解しよう：

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\tau} & T \times \mathbb{C}^2 \\ \pi \downarrow & \searrow f & \downarrow \mathcal{R} \\ F & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C}^2 \end{array} \quad \tau(t) = (t, t^3, t^5)$$

$\tau$  による direct image は、 $\tau(T)$  に対し、 $\mathcal{D}$ -複体の層に  
なる：

$$\begin{aligned} \int_T \mathcal{O}_T &= \mathcal{D}_{T \times \mathbb{C}^2} \delta_{\tau(T)} \\ &= \mathcal{D}_{T \times \mathbb{C}^2} / \mathcal{I} \end{aligned}$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{D}_{T \times \mathbb{C}^2} (x - t^3, y - t^5, \frac{\partial}{\partial t} + 3t^2 \frac{\partial}{\partial x} + 5t^4 \frac{\partial}{\partial y}).$$

この方程式系を  $\tilde{\mathcal{M}}$  とおく。  $\tilde{\mathcal{M}}$  は  $\mathcal{D}_x$  上  $1, t, t^2$  で  
生成され、 $\mathcal{D}_x$  の作用は、

$$(*) \begin{cases} xt^2 = y, & yt^2 = x^2t \\ x^3t = y^2, & yt = x^2, & x^5 = y^3 \end{cases}$$

で与えられることに注意しておく。

$\tilde{\mathcal{M}}$  を  $\mathcal{R}$  に送ると、 $\mathcal{M}$  積分がとれる。

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{m} = H^0 \int_{\mathbb{R}} \tilde{m} = \tilde{m} / \frac{\partial}{\partial t} \tilde{m}$$

となるから。

$\tilde{m} / \frac{\partial}{\partial t} \tilde{m}$  の  $\mathcal{D}_X$ -加群としての構造を計算すればよい。

$\tilde{m}$  に関する  $t^7 = x^2 t$  は  $\mathbb{1}$  から  $\mathcal{D}_X$  上生成されないけれど

も、 $\tilde{m}$  に関する等式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} t^8 &= 8t^7 + t^8 \left( -3t^2 \frac{\partial}{\partial x} - 5t^4 \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= 8t^7 - \left( 3y^2 \frac{\partial}{\partial x} + 5x^4 \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

に注意すると、 $m = \tilde{m} / \frac{\partial}{\partial t} \tilde{m}$  に関する等式

$$8t^7 = 3y^2 \frac{\partial}{\partial x} + 5x^4 \frac{\partial}{\partial y}$$

が成立することから分かる。

同様に  $\tilde{m}$  に関する等式

$$\frac{\partial}{\partial t} t^2 = 2t - \left( 3t^4 \frac{\partial}{\partial x} + 5x^2 \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} t^3 = 3t^2 - \left( 3y \frac{\partial}{\partial x} + 5t^7 \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} t^5 = 5t^4 - \left( 3t^7 \frac{\partial}{\partial x} + 5x^3 \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

を考える。左辺は  $\text{mod } \frac{\partial}{\partial t} \tilde{m}$  で零だから、以上の4式を

$t, t^2, t^4$  に関する線形結合として

$$80t = 27y^2 D_x^3 + 45x^4 D_x^2 D_y + 480x^3 D_x D_y + 1100x^2 D_y,$$

$$24t^2 = 15y^2 D_x D_y + 25x^4 D_y^2 + 54y D_x,$$

$$40t^4 = 9y^2 D_x^2 + 15x^4 D_x D_y + 100x^3 D_y$$

を得る。(  $m$  に関する等式として成立しない。  $D_x = \frac{\partial}{\partial x}, D_y = \frac{\partial}{\partial y}$  )

従って、 $\mathcal{M}$  は  $\mathbb{D}_x$  上  $u = \int_{\mathbb{R}^2} (1 \bmod \tilde{\mathcal{G}})$  から生成されること分かる。

引き続き  $\mathcal{M}$  の関係式を導出しよう。既に  $D_t t^2 = 0$  と  $D_t t^3 (= x D_t) = 0$  は考えたので、残りは。

$$D_t = 0, \quad D_t \cdot t = 0$$

を考えるとい。まず、後者は、

$$\begin{aligned} D_t \cdot t &= t D_t + 1 \\ &= -(3x D_x + 5y D_y + 7) = 0 \end{aligned}$$

となる。前者は  $\bmod \tilde{\mathcal{G}}$  で、

$$D_t = -(3t^2 D_x + 5t^4 D_y)$$

なのでこの右辺の  $t^2, t^4$  に前に求めてある式を代入すると、

$$\begin{aligned} &3t^2 D_x + 5t^4 D_y \\ &= \frac{1}{8} D_x (15y^2 D_x D_y + 25x^4 D_y^2 + 54y D_x) \\ &\quad + \frac{1}{8} D_y (9y^2 D_x^2 + 15x^4 D_x D_y + 100x^3 D_y) \\ &= 3y^2 D_x^2 D_y + 5x^4 D_x D_y^2 + 25x^3 D_y^2 + 9y D_x^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

を得る。以上で全ての関係式が求められた。

( $t^k$  ( $k \neq 1, 2, 4, 7$ ) は  $x^a y^b$  ( $a, b \in \mathbb{N}$ ) の形になることに注意せよ。)

またあると、 $F = \{y^3 - x^5 = 0\}$  のとき、

$$H^1_{[F]}(\mathcal{O}_X) = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X(P_1, P_2, P_3),$$

$$P_1 = y^3 - x^5,$$

$$P_2 = 3x D_x + 5y D_y + 7,$$

$$P_3 = 3y^2 D_x^2 D_y + 5x^4 D_x D_y^2 + 25x^3 D_y^2 + 9y D_x^2$$

となることが分かる。

注意  $u = \int \delta(t^3 - x) \delta(y - t^5) dt$  を計算してみる。

$$\begin{aligned} \delta(t^3 - x) &= \frac{1}{3} x^{-2/3} \left\{ \delta(t - x^{1/3}) + \omega \delta(t - \omega x^{1/3}) \right. \\ &\quad \left. + \omega^2 \delta(t - \omega^2 x^{1/3}) \right\} \\ &\quad (\omega^3 = 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= \int \delta(t^3 - x) \delta(y - t^5) dt \\ &= \frac{1}{3} x^{-2/3} \left\{ \delta(y - x^{5/3}) + \omega \delta(y - \omega^2 x^{5/3}) \right. \\ &\quad \left. + \omega^2 \delta(y - \omega x^{5/3}) \right\} \\ &= xy \delta(y^3 - x^5) \end{aligned}$$

次節では上の具体的な表示を用いて、 $H^1_{[F]}(\mathcal{O}_X)$  の char. cycle の計算を行なってみる。

同様の方法で、 $F = \{y^2 - x^m = 0\}$  ( $m: \text{odd}$ )、 $F = \{y^3 - x^4 = 0\}$  の場合の alg. loc. cohomology  $H^1_{[F]}(\mathcal{O}_X)$  の  $\mathcal{D}_X$ -加群構造は次のようになる：

$$\mathcal{H}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X) = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X(P_1, P_2, P_3),$$

但し、 $F = \{y^2 - x^m = 0\}$  ( $m = 2k+1, k \geq 1$ ) のとき、

$$P_1 = y^2 - x^m$$

$$P_2 = 2x D_x + m y D_y + (m+1)$$

$$P_3 = \frac{2}{k!} y D_x^{k+1} + \sum_{j=0}^k \frac{m}{j!} D_x^j \cdot x^{k+j} D_y$$

$F = \{y^3 - x^4 = 0\}$  のときは、

$$P_1 = y^3 - x^4$$

$$P_2 = 3x D_x + 4y D_y + 6$$

$$P_3 = 3y^2 D_x^3 + 4x^3 D_x^2 D_y + 32x^2 D_x D_y + 48x D_y.$$

この節の最後に次のことに注意しておく。一般に、

$F$  を  $X = \mathbb{C}^2$  の既約な平面曲線とすると、 $F$  に台を持つ  $\text{alg. loc. cohomology } \mathcal{M} = \mathcal{H}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X)$  について、

命題 1 ①  $\mathcal{M}$  は  $\mathcal{B}_{F^0|X^0}$  の minimal extension である

$$(F^0 = F \cap X^0, X^0 = X \setminus \{(0,0)\})$$

②  $\mathcal{M}_{(0,0)}$  は  $\mathcal{D}_{(0,0)}$ -加群として simple.

が成立つ。証明は  $F$  の resolution  $\tilde{F} \xrightarrow{\pi} F$  に対し

この節のはじめと同じ考察を行うとよい。(cf. [16] 基本

予想 B)

§ 2. まず "Gröbner base" の定義から始める。はじめに (形式的)  $\wedge$  多項式環の場合について述べる。

$R = K[[x]]$  ( $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\text{char } K = 0$ ) とする。

$f \in R$ ,  $f = \sum_a a_a x^a$  に対して。

$$N(f) = \{ a \in \mathbb{N}^n \mid a_a \neq 0 \}$$

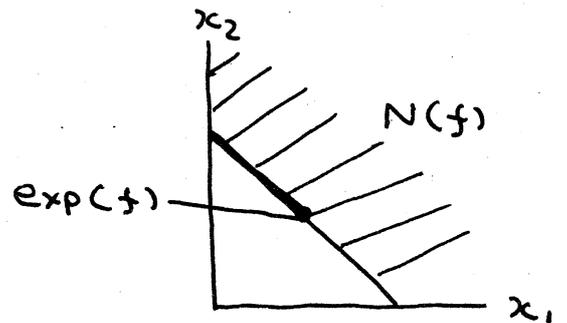
$$\text{ord}(f) = \min \{ |a| \mid a \in N(f) \}$$

$$\text{exp}(f) = \min \{ a \in \mathbb{N}^n \mid a \in N(f), |a| = \text{ord } f \}$$

と置く。ここに  $<$  は  
逆辞書式順序を表わす。

すなわち、 $a < b \iff$

$$\exists i \ a_i < b_i, \ a_{i+1} = b_{i+1}, \\ \dots, \ a_n = b_n.$$



$\mathcal{I}$  は  $R$  の ideal  $\mathcal{I} = R(f_1, \dots, f_m)$  をとり、

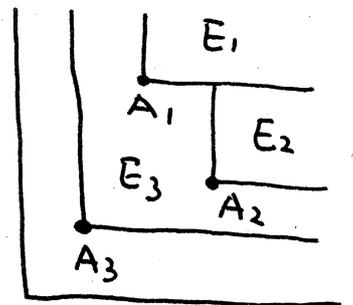
$$E = E(\mathcal{I}) = \{ \text{exp}(f) \mid f \in \mathcal{I}, f \neq 0 \}$$

$$A_i = \text{exp}(f_i)$$

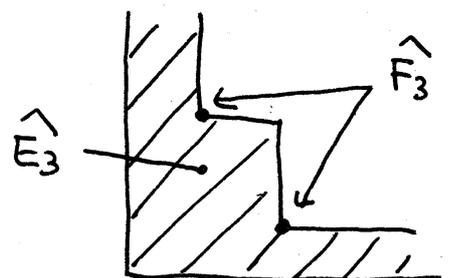
$$E_i = (A_i + \mathbb{N}^n) \setminus \bigcup_{j < i} E_j$$

$$\hat{E}_i = E_i - A_i$$

$$\hat{F}_i = \mathbb{N}^n \setminus \hat{E}_i \text{ の生成系} \\ \text{で最小のもの}$$



と定める。



このとき、 $(f_1, \dots, f_m)$  が  $I$  の Gröbner base である

とは、 $\forall f \in I$  が

$$\exists g_i \in R \quad f = \sum g_i f_i, \quad N(g_i) \subset \hat{E}_i$$

の形に割り切れることである。これは  $f_1, \dots, f_m$  の順序によらないこと、また任意の ideal  $I$  に Gröbner base の存在することから知られている。ideal の生成元

が Gröbner base であるかどうかの判定法として、

Buchberger [3] は  $R$ : 多項式環の場合に証明した。

定理 2  $(f_1, \dots, f_m)$  が  $I$  の Gröbner base であるためには、

$$\forall \alpha \in \hat{F}_i \quad \alpha f_i = g_1 f_1 + \dots + g_m f_m$$

$$(\exists g_j \in R \quad N(g_j) \subset \hat{E}_j)$$

と割り切れることが必要十分。

定理 3  $(f_1, \dots, f_m)$  が  $I$  の Gröbner base である

とき、 $\{f_i\}$  の関係式は、(定理 2 の  $g_j = g_j^{(\alpha, i)}$  を用いて)

$$\alpha f_i - \sum_j g_j^{(\alpha, i)} f_j = 0 \quad (\alpha \in \hat{F}_i, i=1, \dots, m)$$

によって生成される。

注意 定理 3 は定理 2 の類似を  $\mathcal{O}_X$  の左 ideal についていふことに必要になる。

次に微分作用素の環  $\mathcal{D}$  の場合を考えよう。

$$P = \sum_{|d| \leq m} a_d(x) D^d \in \mathcal{D}_x \text{ に対し,}$$

$$\sigma_{\text{total}}(P)(x, \xi) = \sum_{|d| \leq m} a_d(x) \xi^d,$$

$$\sigma(P)(x, \xi) = \sum_{|d|=m} a_d(x) \xi^d$$

を  $\mathbb{C}[[x, \xi]]$  の元とみなし,

$$N(P) = N(\sigma_{\text{total}}(P))$$

$$\exp(P) = \exp(\sigma(P))$$

とある。このとき Weierstrass- $\hat{\mathcal{D}}$  中の割り算定理の類似が  $\mathcal{D}$  についても成立し、 $\mathcal{D}$  の左 ideal  $I$  の Gröbner basis を同様に定義できる。ここで次に注意する:

$$P = \sum Q_i P_i, \quad N(Q_i) \in \hat{E}_i(P_i)$$

と割り切れているとき、 $\text{ord } P = m$ ,  $\text{ord } P_i = m_i$  とすると、

$$\sigma_m(P) = \sum \sigma_{m-m_i}(Q_i) \sigma_{m_i}(P_i).$$

従って、 $(P_1, \dots, P_m)$  が  $I$  の Gröbner basis ならば、

$\sigma(P_1), \dots, \sigma(P_m)$  は  $\hat{\mathcal{D}}$  上の ideal  $\text{gr } I \subset \text{gr } \mathcal{D}$  を

生成する。

この定理 2, 3 を認めるとこれは  $\mathcal{D}$  の場合に拡張することが出来る (Castro [4], Noumi [4], 等参照)。  
Takayama [17]

定理 2'  $I \subset \mathcal{D}$  ideal とする。  $(P_1, \dots, P_m)$  が  $I$  の

Gröbner base であるためには、

$$\forall (\alpha, \delta) \in \hat{E}_i \quad x^\alpha D^\delta P_i = Q_1 P_1 + \dots + Q_m P_m$$

$$(\exists Q_j \in \mathcal{D} \quad N(Q_j) \subset \widehat{E}_j)$$

と割り切れることが必要十分。

この定理 2' を用いて、§1 で計算した  $\mathcal{L}_2(P_1, P_2, P_3)$  が Gröbner-basis of  $\mathcal{I} = \mathcal{D}_x(P_1, P_2, P_3)$  であることを確認してみよう。

$$P_1 = y^3 - x^5$$

$$P_2 = 3x D_x + 5y D_y + 7$$

$$P_3 = 3y^2 D_x^2 D_y + 5x^4 D_x D_y^2 + 25x^3 D_y^2 + 9y D_x^2$$

であった。  $\exp(P)$  に対応する leading term はそれぞれ、

$\exp(P_1) = y^3$ ,  $\exp(P_2) = 3x\xi$ ,  $\exp(P_3) = 3y^2\xi^2\eta$  である。  $E_i, \widehat{E}_i, \widehat{F}_i$  は次のように定める：

$$E_1 = \{y \geq 3\}, \quad \widehat{E}_1 = \mathbf{N}^4$$

$$E_2 = \{x \geq 1, y = 0, 1, 2, \xi \geq 1\}, \quad \widehat{E}_2 = \{y = 0, 1, 2\}$$

$$E_3 = \{x = 0, y = 2, \xi \geq 2, \eta \geq 1\}, \quad \widehat{E}_3 = \{x = y = 0\}$$

$$\widehat{F}_2 = \{y^3\}$$

$$\widehat{F}_3 = \{x, y\}$$

従って、定理 2' によれば、 $y^3 P_2, x P_3, y P_3 \in \mathcal{I}$  が  $P_1, P_2, P_3$  で割り切れることよ。割り算を実行すると、

$$y^3 P_2 = (3x D_x + 5y D_y - 8) P_1 + x^5 P_2$$

$$xP_3 = -5D_x D_y^2 P_1 + (y^2 D_x D_y + 3y D_x) P_2$$

$$yP_3 = 3D_x^2 D_y P_1 + (x^4 D_x D_y + 5x^3 D_y) P_2$$

と割り切られる。従って、 $P_1, P_2, P_3$  は  $I$  の Gröbner base であり、特に、 $\mathfrak{g}_2 I$  は  $\sigma(P_1), \sigma(P_2), \sigma(P_3)$  で生成される：

$$f_1 = \sigma(P_1) = y^3 - x^5,$$

$$f_2 = \sigma(P_2) = 3x\xi + 5y\eta,$$

$$f_3 = \sigma(P_3) = 3y^2\xi^2\eta + 5x^4\xi\eta^2.$$

今  $(0, 0, \xi, \eta) \in T_{(0,0)}^* X$  ( $\xi \neq 0, \eta \neq 0$ ) のまわりで考えると、

$$\mathcal{O}_{T^*X} \otimes_{\mathfrak{g}_2 \mathfrak{D}} \mathfrak{g}_2 I = \mathcal{O}_{T^*X} (f_2, y^2)$$

である。

従って、 $m = \mathfrak{D}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X)$  の characteristic cycle は  $[\text{ch}(m)] = 2T_{(0,0)}^* X + T_{F=0}^* X$  であることがわかる。

§3.  $A_1$  型 rational double point の場合の計算

この例では,  $V = \{z^2 = xy\} \subset X = \mathbb{C}^3$  に台をとり alg.

loc. cohomology  $\mathcal{H}_{[V]}^1(\mathcal{O}_X)$  の計算を行なう。

$V$  の resolution  $\tilde{V} \xrightarrow{\pi} V$  を次のように定める:

$$\tilde{V} = \{(u, v, [z, \eta]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid u\eta^2 = v z^2\},$$

$$\pi(u, v, [z, \eta]) = \begin{cases} (u, u \cdot (\frac{\eta}{z})^2, u \cdot \frac{\eta}{z}) & (z \neq 0) \\ (v \cdot (\frac{z}{\eta})^2, v, v \cdot \frac{z}{\eta}) & (\eta \neq 0) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V} & & \\ \pi \downarrow & \searrow f & \\ V & \hookrightarrow & X = \mathbb{C}^3 \end{array}$$

この場合、原点の fibre が  $\mathbb{P}^1$  となるので、§1 と同じ計算を

すると、 $P_0 = (0, 0, 0)$  とおくと、

$$\int_f \mathcal{O}_{\tilde{V}} = \mathcal{H}_{[V]}^1(\mathcal{O}_X) \oplus \mathcal{B}_{P_0} \otimes \mathcal{O}_X.$$

これは  $H^i(\mathbb{P}^1; \mathbb{C}) = 0$  ( $i \neq 0, 2$ ),  $\mathbb{C}$  ( $i = 0, 2$ ) に対応している。

$\int_f \mathcal{O}_{\tilde{V}}$  を計算する為に、 $f$  を有理数  $\mathbb{C}$  と projection に分解する。次のようにするとよい:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V} & \xrightarrow{\tau} & X \times \mathbb{P}^1 \\ \pi \downarrow & \searrow f & \downarrow \rho \\ V & \hookrightarrow & X \end{array} \quad \begin{array}{l} p = (u, v, [z, \eta]) \in \tilde{V} \\ \tau(p) = (f(p), [z, \eta]) \\ \text{と定める。} \end{array}$$

このとき,  $\tau(\tilde{V}) = \{(x, y, z, [\xi, \eta]) \mid x\eta = z\xi, y\xi = z\eta\}$ .  
 以下  $\tilde{X} = X \times \mathbb{P}^1$  とかく。  $\tilde{X}$  の開集合  $\tilde{U} = \{\xi \neq 0\}$  と  
 おく。  $\tilde{U}$  上の affine 座標  $(x, y, z, \eta (= \eta/\xi))$  とする。 同様に  
 $\tilde{U}' = \{\eta \neq 0\}$ ,  $\eta' = \xi/\eta$  とおく。  $\tilde{U} \cap \tilde{U}'$  上は  $\eta\eta' = 1$  である。

$\tilde{m} = \int_{\tilde{U}} \Theta_{\tilde{U}}$  は  $\delta 1$  と同様に  $\tau(\tilde{V})$  に沿った  $\delta$ -函数の  
 層になるが、今度は global な生成元のない  $\delta 1$  と異なる。  
 すなわち。

$$\tilde{U} \text{ 上では, } \tilde{m} \cong \mathbb{D}_{\mathbb{C}^4} \delta(y - \eta z) \delta(z - \eta x),$$

$$\tilde{U}' \text{ 上では, } \tilde{m} \cong \mathbb{D}_{\mathbb{C}^4} \delta(x - \eta' z) \delta(z - \eta' y),$$

となる。

次に  $\tilde{m} \in \mathcal{R}(\tilde{p})$  に沿って積分すると、

$$\int_{\mathcal{R}} \tilde{m} \cong \mathbb{R}\mathbb{P}_* (0 \rightarrow \tilde{m} \xrightarrow{\Theta_{\tilde{X}}} \tilde{m} \otimes \Omega_{\tilde{X}/X} \rightarrow 0).$$

ここは  $\Omega_{\tilde{X}/X}$  は  $\tilde{X} \rightarrow X$  の fibre に沿った  $1$ -form を表わ  
 す。 右辺を計算するために、まず  $\mathbb{R}\mathbb{P}_* \tilde{m}$ ,  $\mathbb{R}\mathbb{P}_* (\tilde{m} \otimes \Omega_{\mathbb{P}^1})$   
 を計算してみる。

$\tilde{U}$  上の  $\tilde{m}$  の section は、

$$\sum_{k, \ell \geq 1} \sum_{m \geq 0} f_{k\ell m}(x, y, z) \frac{\eta^m}{(y - \eta z)^k (z - \eta x)^\ell}$$

の形にかけられる。 但し、 $|f_{k\ell m}| \leq C_\varepsilon \varepsilon^m$  ( $\forall \varepsilon > 0$ ) と  $\varepsilon$  増  
 大度評価を満足し、 $k, \ell$  については有限和である。

$\tilde{U} \cap \tilde{U}'$  上の  $\tilde{m}$  の section は上の形、 $m \in \mathbb{Z}$  を走らせ

$T=0$  の形にかける。

$g = \frac{1}{g'}$  を代入すると。

$$\frac{g^m}{(y-gz)^k(z-gx)^e} = (\pm) \frac{g'^{k+e-m}}{(z-g'y)^k(x-g'z)^e}.$$

従って、 $m \geq 0$  の部分は  $\tilde{U}$  上の section に、 $k+e-m \geq 0$  の部分は  $\tilde{U}'$  上の section にのびる。

以上の考察で  $H^1(\tilde{X}, \tilde{m}) = 0$  が分かる。

同様に、 $\tilde{U} \cap \tilde{U}'$  上で

$$\frac{g^m}{(y-gz)^k(z-gx)^e} dg = (\pm) \frac{g'^{k+e-m-2}}{(z-g'y)^k(x-g'z)^e} dg'$$

に注意すると、 $H^1(\tilde{X}, \tilde{m} \otimes \Omega_{\mathbb{P}^1}) = 0$  が分かる。

0次コホモロジ-は同様の考察により、

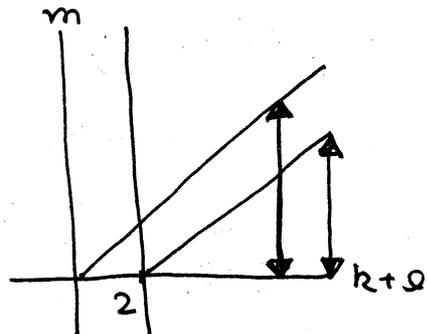
$$H^0(\tilde{X}, \tilde{m}) = \left\{ \sum_{\substack{k, e \geq 1 \\ 0 \leq m \leq k+e \\ f_{ini}}} f_{k, e, m} \frac{g^m}{(y-gz)^k(z-gx)^e} \right\},$$

$$H^0(\tilde{X}, \tilde{m} \otimes \Omega_{\mathbb{P}^1}) = \left\{ \sum_{\substack{k, e \geq 1 \\ 0 \leq m \leq k+e-2 \\ f_{ini}}} f_{k, e, m} \frac{g^m}{(y-gz)^k(z-gx)^e} dg \right\}$$

にかける。

従って、

$$H^i \int_{\mathbb{P}^1} \tilde{m} = 0 \quad (i \neq 0),$$



$$(1) H^0 \int_{P^2} \tilde{m} = \frac{H^0(\tilde{X}, \tilde{m} \otimes \Omega_{P^1})}{dH^0(\tilde{X}, \tilde{m})}$$

となる。右辺を計算する前に、 $dH^0(\tilde{X}, \tilde{m}) \subset H^0(\tilde{X}, \tilde{m} \otimes \Omega_{P^1})$  を確認しておく。

$m \leq k+2-1$  のときはそのまま微分するとよい。

$m = k+2$  のときは

$$(2) d_g \left( \frac{g^m}{(y-gz)^k (z-gx)^2} \right) = k y \frac{g^{m-1}}{\binom{\cdot}{k+1} \binom{\cdot}{2}^{2+2}} dg + 2z \frac{g^{m-1}}{\binom{\cdot}{k} \binom{\cdot}{2+1}} dg$$

となる。これは global section になる。

(1) の右辺の  $\mathcal{D}_X$ -加群構造を計算しよう。まず

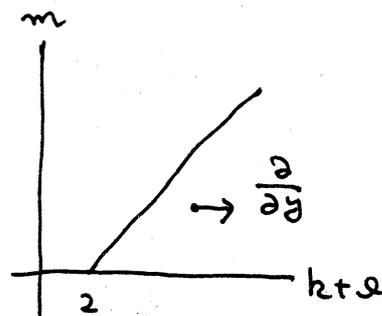
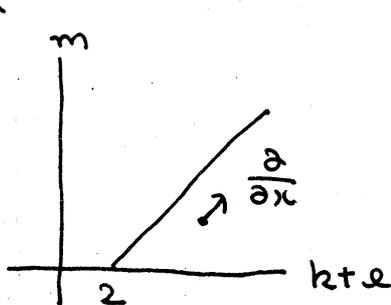
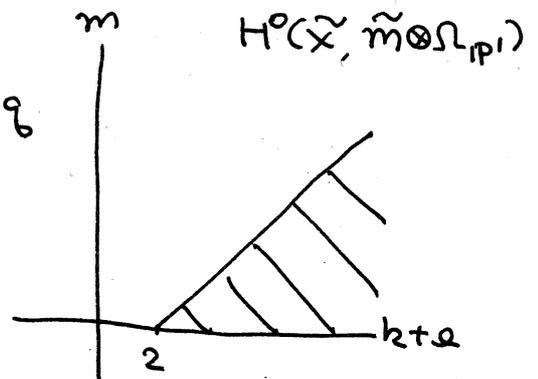
$H^0(\tilde{X}, \tilde{m} \otimes \Omega_{P^1})$  の  $\mathcal{D}_X$  上の生成元を調べる。

以下

$$u_{k,2}^m = \frac{g^m}{(y-gz)^k (z-gx)^2} dg$$

となる

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} u_{k,2}^m = 2 u_{k,2+1}^{m+1} \\ \frac{\partial}{\partial y} u_{k,2}^m = -k u_{k+1,2}^m \end{cases}$$

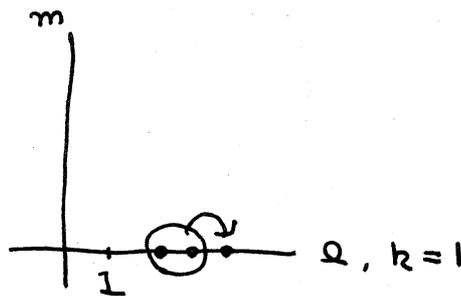
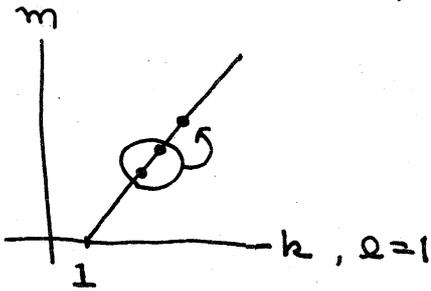


に注意すると。

$\{u_{k,q}^m; m=k-1, q=1 \text{ 又は } m=0, k=1, q \geq 1\}$  から生成される。これが分子。次に。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} u_{k,1}^m &= k u_{k+1,1}^{m+1} - u_{k,2}^m \\ &= k u_{k+1,1}^{m+1} - \frac{\partial}{\partial x} u_{k,1}^{m-1} \\ &= k u_{k+1,1}^{m+1} + \frac{1}{k-1} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u_{k-1,1}^{m-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} u_{1,q}^0 &= u_{2,q}^1 - q u_{1,q+1}^1 \\ &= -\frac{\partial}{\partial y} u_{1,q}^1 - q u_{1,q+1}^1 \\ &= -\frac{1}{q-1} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u_{1,q-1}^0 - q u_{1,q+1}^1 \end{aligned}$$



であるから。  $H^0(\tilde{X}, \tilde{m} \otimes \Omega_{P^1})$  は

$$u = u_{1,1}^0, v = u_{2,1}^1, w = u_{1,2}^0$$

から生成される。 (但し、  $D_z u = v - w$  という関係がある)。

$u, v, w$  の  $D_x$  の作用を計算しよう。

今、  $g$  を定数とすると、

$$\begin{cases} v = -g D_y u \\ w = v - D_z u \\ (y - g z) u = (z - g x) u = 0 \\ D_x u - g w = 0 \quad (\Leftrightarrow (D_x + g^2 D_y + g D_z) u = 0) \end{cases}$$

これらの関係式から  $q$  を消去したものを求めるとよい。

$$\begin{aligned} (z - q_x)w &= (z - q_x)(v - D_z u) \\ &= -(z - q_x)(q D_y u + D_z u) \\ &= -(q D_y + D_z)(z - q_x)u + u = u \end{aligned}$$

となるから、

$$x(D_{z_c} u - q w) = x D_{z_c} u - z w + u$$

$$\therefore (x D_x + 1)u = z w$$

が得られる。他も同様にして、結局、

$$\begin{cases} x v = -z D_y u \\ z v = -(y D_y + 1)u \\ y w = z D_x u \\ z w = (x D_{z_c} + 1)u \\ (xy - z^2)u = 0 \\ D_z u = v - w \end{cases}$$

が得られる。  $v$  を消去して整理すると、

$$(3) \begin{cases} (xy - z^2)u = 0 \\ (x D_{z_c} + y D_y + z D_z + 2)u = 0 \\ x w + (x D_z + z D_y)u = 0 \\ y w - z D_x u = 0 \\ z w - (x D_{z_c} + 1)u = 0 \end{cases}$$

を得る。これは  $dH^0(\tilde{X}; \tilde{m})$  で零化子として生ずる関係

係式で表すことができる。前と同様に  $H^0(\tilde{X}; \tilde{m})$  は  $\mathbb{D}_X$  上

$\frac{z^m}{(y-z^2)(z-yx)}$  ( $m=0, 1, 2$ ) から生成されることから、  
新しい関係式は (2) に注意して、

$$\left. \begin{aligned} 0 &= d_z \left( \frac{1}{(y-z^2)(z-yx)} \right) = -z D_y u + x w \\ 0 &= d_z \left( \frac{z}{(y-z^2)(z-yx)} \right) = u + x D_x u + z v \\ &= (1 + x D_x + z D_z) u + z w \\ 0 &= d_z \left( \frac{z^2}{(y-z^2)(z-yx)} \right) = y v + z D_x u \\ &= (y D_z + z D_x) u + y w \end{aligned} \right\} (4)$$

の3つである。以上から、(1)の右辺は  $\mathbb{D}_X$  上  $u, w$  で生成され、関係式は (3)(4) で与えられることから、 $t=0$

(3)(4) を  $u_0 = w + \frac{1}{2} D_z u (= \frac{1}{2}(v+w))$  とおいて、

整理すると、

$$(5) \left\{ \begin{aligned} (xy - z^2) u &= 0 \\ (x D_x + y D_y + z D_z + 2) u &= 0 \\ (x D_z + 2z D_y) u &= 0 \\ (y D_z + 2z D_x) u &= 0 \\ (x D_x - y D_y) u &= 0 \\ x u_0 = y u_0 = z u_0 &= 0 \end{aligned} \right.$$

を得る。

$\int_{\mathcal{F}} \mathcal{O}_{\tilde{X}} = \mathbb{D}_X u \oplus \mathbb{D}_X u_0$  であるから、 $\mathbb{D}_X u_0$  は



付録 Buchberger の論文は余り読みがくなくないのて、定理 2 の証明を付けておく。定理 3 は、以下の証明の系として、同様に示される。以下  $R = K[[x]]$  とする。

定理 (= 定理 2)  $R$  の ideal  $I = R(f_1, \dots, f_m)$  について、

$$\forall i \forall \alpha \in \widehat{F}_i \exists q_{ij}^\alpha \in R \quad (j=1, \dots, m)$$

$$x^\alpha f_i = \sum_j q_{ij}^\alpha f_j, \quad N(q_{ij}^\alpha) \subset \widehat{E}_j$$

を満たすと仮定する。このとき、 $(f_1, \dots, f_m)$  は  $I$  の Gröbner basis である。

(証明) はじめに次のことに注意しておく。

(1) 定理の仮定の  $q_{ij}^\alpha$  は一意的に定まり、

(2)  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$  ( $\varepsilon_i > 0$ ) に対し、

$$v_\varepsilon(f) = \min \{ \langle \varepsilon, \alpha \rangle \mid \alpha \in N(f) \} \quad (f \in R)$$

と置く。  $\varepsilon$  をうまくとると、

$$f_i = x^{A_i} + R_i, \quad v_\varepsilon(R_i) > v_\varepsilon(x^{A_i})$$

$$A_i = \exp(f_i) \quad (\forall i)$$

となるようにする。

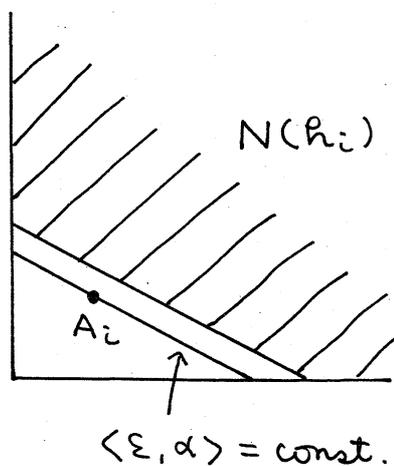
このとき、 $\delta > 0$  があって、 $q_{ij}^\alpha$  は、

$$v(q_{ij}^\alpha) \geq v(\alpha) + v(f_i) - v(f_j) + \delta \varepsilon_j \geq \varepsilon_j$$

$$-v(f_j) + \delta \varepsilon_j \geq \varepsilon_j$$

を満たす。但し、

$$\varepsilon_j \geq \varepsilon_i \quad (j \geq i), \quad 0 \quad (j < i).$$



( $(\widehat{F}_i + A_i) \cap E_j = \phi$  ( $i \leq j$ ) に注意せよ。)

定理を証明するには、 $\forall k \forall f \in R$   $f_k$  に対して、

$\exists g_j \in R$  ( $j = 1, \dots, k$ )

$$f - \sum_{j=1}^k g_j f_j \in R(f_{k+1}, \dots, f_m), \quad N(g_j) \subset \widehat{E}_j$$

となることをいふことである。

その為には、 $\forall k$  に対して、

(\*)<sub>k</sub>:  $R \rightarrow R$  の  $K$  線型写像  $T_k, \widetilde{P}_{jk}$  ( $j = 1, \dots, m$ )  
がある。

$$v(T_k(g)) \geq v(g),$$

$$v(\widetilde{P}_{jk}(g)) \geq v(g) + v(f_k) - v(f_j) + \delta \in j \geq k,$$

$$N(\widetilde{P}_{jk}(g)) \subset \widehat{E}_j \quad (j \leq k),$$

とし、

$$g f_k = \sum_j \widetilde{P}_{jk}(T_k(g)) f_j \quad (\forall g \in R)$$

をみたす

ことをいふことが、(\*)<sub>k</sub> を帰納法的に証明する。

$k=1$  のとき、 $T_1 = \text{id}$ 、 $\widetilde{P}_{j1} = \delta_{j1}$  とおくとよい。

$k=2$  の場合を示す。  $g \in R$  とし、

$$g = g \widehat{E}_2 + \sum_{\alpha \in \widehat{F}_2} \sigma_\alpha(g) x^\alpha, \quad N(g \widehat{E}_2) \subset \widehat{E}_2$$

と分解する。但し、 $g \mapsto (g \widehat{E}_2, \sigma_\alpha(g))$  は線型になる

ように定めることができる。

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in F_2^{\wedge}} \sigma_{\alpha}(g) x^{\alpha} f_2 &= \sum_{\alpha} \sum_j \sigma_{\alpha}(g) q_{2j}^{\alpha} f_j \\ &= \sum_j P_{j2}(g) f_j \end{aligned}$$

とかくと、 $P_{j2}(g)$  の order について、

$$\begin{aligned} v(P_{j2}(g)) &\geq \min v(\sigma_{\alpha}(g) q_{2j}^{\alpha}) \\ &\geq v(g) + v(f_2) - v(f_j) + \delta \in j \geq 2 \end{aligned}$$

が成り立つ。特に  $v(P_{22}(g)) \geq v(g) + \delta$  に注意する。

$$g f_2 = g \hat{E}_2 f_2 + \sum_j P_{j2}(g) f_j$$

と分解されたが、この分解を  $P_{22}(g) f_2$  に対して繰り返してゆく。  $P_{22}$  は order を上げることには注意される。

$$T_2(g) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{22}^k(g)$$

は4又束として、 $R \rightarrow R$  の線型写像を定める。そして、

$$g f_2 = T_2(g) \hat{E}_2 f_2 + \sum_{j \neq 2} P_{j2}(T_2(g)) f_j$$

と分解される。  $P_{j2}^{\sim} = ( ) \hat{E}_2$  ( $j=2$ )、 $P_{j2}$  ( $j \neq 2$ ) とかくと (\*)  $k=2$  が示された。

次に  $k=3$  の場合を示す。一般の  $k \mapsto k+1$  の step も同様に示される。

まず  $k=2$  の場合と同様に、

$$g f_3 = g \hat{E}_3 f_3 + \sum_j P_{j3}(g) f_j,$$

$\nu(\rho_{j3}(g)) \geq \nu(g) + \nu(f_3) - \nu(f_j) + \delta \in_j \geq 3$   
 と分解する。  $\rho_{23}(g) f_2$  に対して  $(*)_{k=2}$  を用いると、

$$\rho_{23}(g) f_2 = \sum_j \tilde{\rho}_{j2} (T_2(\rho_{23}(g))) f_j .$$

これを代入して、

$$\begin{aligned} g f_3 &= g \hat{E}_3 f_3 + \sum_{j \neq 2} (\rho_{j3} + \tilde{\rho}_{j2} \circ T_2 \circ \rho_{23})(g) f_j \\ &\quad + \tilde{\rho}_{22} \circ T_2 \circ \rho_{23}(g) f_2 \\ &= g \hat{E}_3 f_3 + \sum_j \rho'_{j3}(g) f_j \end{aligned}$$

と書く。ここで、

$$\begin{aligned} \nu(\rho'_{j3}(g)) &\geq \nu(\tilde{\rho}_{j2} \circ T_2 \circ \rho_{23}(g)) \wedge \nu(\rho_{j3}(g)) \\ &\geq \min \{ \nu(\rho_{23}(g) + \nu(f_2) - \nu(f_j) + \delta \in_j > 2, \\ &\quad \nu(g) + \nu(f_3) - \nu(f_j) + \delta \in_j \geq 3 \\ &\geq \nu(g) + \nu(f_3) - \nu(f_j) + \delta \in_j \geq 3 \quad , \end{aligned}$$

$$N(\rho'_{j3}(g)) \subset \hat{E}_j \quad (j=1, 2)$$

と書く。特に  $\nu(\rho'_{33}(g)) \geq \nu(g) + \delta$  .

この分解を  $\rho'_{33}(g) f_3$  に対して繰り返して、

$$T_3(g) = \sum_{k=0}^{\infty} (\rho'_{33})^k(g)$$

と書く。

$$g f_3 = T_3(g) \hat{E}_3 f_3 + \sum_{j \neq 3} \rho'_{j3}(T_3(g)) f_j$$

と分解される。

$\tilde{\rho}_{j3} = ( ) \hat{E}_3$  ( $j=3$ ),  $\rho'_{j3}$  ( $j \neq 3$ ) と書く。  $(*)_{k=3}$  が示すように。  
 Q.E.D.

大南大

- 1] J. L. Brylinski, La classe fondamentale d'une variété algébrique engendre le D-module qui calcule sa cohomologie d'intersection, *Astérisque* 130 (1985), 260-271.
- 2] J. L. Brylinski et M. Kashiwara, Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems, *Invent. math.* 64 (1981), 387-410.
- 3] B. Buchberger, A criterion for detecting unnecessary reductions in the construction of Gröbner-bases, *Lect. notes in computer sciences* 72 (1979), 3-21.
- 4] F. Castro, Calculs effectifs pour les idéaux d'opérateurs différentiels, *Géométrie algébrique et applications III* (édité par J.-M. Aroca, T. Sanchez-Giralda, J.-L. Vicente), *Travaux en Cours* 24 (1987), 1-19.
- 5] M. G. M. van Doorn et A. R. P. van den Essen,  $D_n$ -modules with support on a curve, *Publ. RIMS. Kyoto Univ.*, 23 (1987), 937-953.
- 6] J. Hotta, Introduction to D-modules, *Lect. notes of Inst. Math. Sci., Madras*, 1987.
- 7] M. Kashiwara, B-functions and holonomic systems, *Invent. math.*, 38 (1976), 33-53.
- 8] ———, On the holonomic systems of linear differential equations II, *Invent. math.*, 49 (1978), 121-135.
- 9] ———, *Cours Univ. Paris-Nord, Progress in Maths.*, Birkhäuser, 1983.
- 10] R. MacPherson and K. Vilonen, Perverse sheaves with singularities along the curve  $y^n = x^m$ , reprint.

- [11] P. Maisonobe, Faisceaux pervers dont le support singulier est une courbe plane, *Composito math.* 62 (1987), 215-261.
- [12] Z. Mebkhout, Local cohomology of analytic spaces, *Publ. RIMS. Kyoto Univ.* 12 suppl. (1977), 247-256
- [13] L. N. Macarro, Faisceaux pervers dont le support singulier est une courbe plane irréductible, *Thèse, Univ. Paris VII.*
- [14] M. Noumi, Higher dimensional analogue of the  $m$ -truncated KP hierarchy, *数理解析講究録* 638 (1988)
- [15] S. P. Smith, Curves, differential operators, and finite dimensional algebras, *Lect. notes in Math.* 1296 (1987), 156-176
- [16] S. Tazima, 平面曲線に付する holonomic 系の Rosenlicht 型構造定理について, *数理解析講究録* 660 (1988)
- [17] N. Takayama, Gröbner basis and the problem of contiguous relations, *Japan J. Appl. Math.*, 6 (1989) 147-160.
- [18] K. Vilonen, Intersection homology D-module on local complete intersections with isolated singularities *Invent. math.* 81 (1985), 107-114.
- [19] J. L. Verdier, Dualité dans les espaces localement compacts, *Sém. Bourbaki*, exp. 300, (1965-66).
- [20] M. Kashiwara, The Riemann-Hilbert Problem for holonomic systems, *Publ. RIMS. Kyoto Univ.*, 20 (1984), 319-365.