

特異点除去に対応する de Rham 系の積分 の計算

新潟大・教養 田島慎一 (Shinichi TAJIMA)

東 大・理 内田素夫 (Motoo UCHIDA)

序. — 以下, X を複素多様体, \mathcal{O}_X : X 上の正則函数の層, \mathcal{D}_X : X 上の微分作用素の層, $Y \subset X$ の subvariety (特異点を許す), I_Y : Y の定義 ideal とする。

Y に台を持つ d -次の algebraic local cohomology は, Grothendieck 流には d -次で定義される:

$$H_{[Y]}^e(\mathcal{O}_X) = \varinjlim_k \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^e(\mathcal{O}_X/I_Y^k, \mathcal{O}_X).$$

これは左 \mathcal{D}_X -加群の構造を持つが, \mathcal{D}_X 上 coherent であり, さらに holonomic 系となることが知られている。(柏原 [8])

Y が non singular submfd の場合は, $\text{codim}_{\mathbb{C}} Y = d$ とすると, $H_{[Y]}^i(\mathcal{O}_X) = 0$ ($i \neq d$) であり, 残った $H_{[Y]}^d(\mathcal{O}_X)$ の構造も簡単である。(例としては Hotta [6], 柏原 [9] 等参照。)

それに加えて γ が特異点を持つ場合は, γ に台を持つ alg. loc. cohomology の \mathcal{D}_X -加群構造はそれほど簡単ではない。しかしながら, 柏原, Mebkhout に依ると, 一般に次が成立することが知られている。ここでこの図 2 のコホモロジー群を扱う代わりに \mathcal{D}_X -加群の複体 $\mathbb{R}\Gamma_{[\gamma]}(\mathcal{O}_X)$ を考えている。

定理 (柏原 [1], Mebkhout [12])

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathbb{R}\Gamma_{[\gamma]}(\mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X) \cong \mathbb{C}_\gamma$$

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathbb{R}\Gamma_{[\gamma]}(\mathcal{O}_X)) \cong \mathbb{R}\Gamma_\gamma \mathbb{C}_X$$

従って subvariety γ を考える際に, 対応する \mathcal{D}_X -複体 $\mathbb{R}\Gamma_{[\gamma]}(\mathcal{O}_X)$ 又は $\mathcal{H}e^q_{[\gamma]}(\mathcal{O}_X)$ ($q \in \mathbb{Z}$) たちの \mathcal{D}_X -加群としての構造を調べる面白そうである。又, Riemann-Hilbert 対応の理論 (柏原 [1]) によると, γ の交叉 cohomology に対応する X 上の holonomic 系が存在するか, それは γ に台を持つ γ の特異点集合の外では $\mathcal{R}\gamma_{!X} = \mathcal{H}e^d_{[\gamma]}(\mathcal{O}_X)$ ($d = \text{codim } \gamma$) と一致する。この意味でも γ に台を持つ holonomic 系を調べることは面白そうである。

そこで私達は, γ が簡単な特異点を持つ場合に $\mathcal{H}e^q_{[\gamma]}(\mathcal{O}_X)$ の \mathcal{D}_X -加群構造を具体的に計算してみることにした。以下 γ は超曲面とするので, $q=1$ 以外は消えて, $\mathcal{H}e^1_{[\gamma]}(\mathcal{O}_X)$ だけが問題となる。

その為に, まず γ の resolution $\tilde{\gamma}$ をとり, $\tilde{\gamma}$ 上の正則関

数のなす層 $\mathcal{O}_{\tilde{Y}}$ を $\mathcal{D}_{\tilde{Y}}$ -加群と見做す (これを de Rham 系
と呼ぶ)。次にその (写像 $\tilde{Y} \rightarrow X$ に沿った) 積分

$\int_{X \leftarrow \tilde{Y}} \mathcal{O}_{\tilde{Y}}$ の \mathcal{D}_X -加群としての構造を調べる, という方
針をとった。

§1 で, $Y = \{y^3 - x^5 = 0\}$ の場合を例にとり, 平面曲
線に台を持つ alg. loc. cohomology を調べる。(cf. 田島 [6])

§2 で, \mathcal{D}_X -ideal の Gröbner basis の復習をした後に,
 $H^1_{[Y]}(\mathcal{O}_X)$ (§1 で計算したものの) の characteristic cycle の
計算をした。

最後に §3 に於て, A_1 型有理二重点を特異点とする曲面:
 $z^2 - xy = 0$ の場合の計算を行った。

Gröbner basis については野村正俊氏に教えて頂いた事
が多かった。ありがとうございました。

§1. 平面曲線に台を持つ algebraic local cohomology
 この節では, $F = \{y^3 - x^5 = 0\}$ の場合を例にとり,
 平面曲線 $F \subset X = \mathbb{C}^2$ に台を持つ alg. loc. cohomology
 $\mathcal{H}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X)$ の \mathcal{O}_X -加群としての構造を調べる。

Tajima [6] で考えたように F の normalization T を導
 入しよう。 $T \xrightarrow{\pi} F$ 。

$$\begin{array}{ccc} T (= \mathbb{C}_t) & & \\ \pi \downarrow & \searrow f & \\ F & \hookrightarrow & \mathbb{C}^2 \end{array} \quad f(t) = (t^3, t^5)$$

と定める。

\mathcal{O}_T -加群 \mathcal{O}_T の de Rham 複体 $^*\mathcal{D}_T$ の f による直写像は

$$Rf_* (\mathcal{D}_T) = \mathcal{D}_F$$

となるが, Verdier duality を用いると, (cf. Verdier [9])

$$Rf_* (\mathcal{D}_T) = \mathcal{D}_F \cong R\Gamma_F(\mathcal{O}_X) [2]$$

となる。一方, $\mathcal{m} = \mathcal{H}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X)$ の de Rham 複体は
 はじめに述べた柏原, Melikow による結果を用いると,

$$\begin{aligned} R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{m}) &= R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, R\Gamma_{[F]}(\mathcal{O}_X) [1]) \\ &\cong R\Gamma_F \mathcal{O}_X [1] \end{aligned}$$

であるから, Riemann-Hilbert 対応の理論により,

$$\int_f \mathcal{O}_T = \mathcal{H}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X)$$

となつていふことが分る。(これは左辺の積分を計算した後、直接
右辺の積分を計算する。))

* \mathcal{D}_T -加群 \mathcal{M} に対し、 $\mathcal{R}Hom_{\mathcal{D}_T}(\mathcal{O}_T, \mathcal{M})$ を \mathcal{M} の
de Rham 複体とよぶ。

従つて、 \mathcal{O}_T の f に対し、 \mathcal{M} の積分を計算するとよい。そのために
 f を \mathbb{C} の x, y の projection に分解しよう。

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\tau} & T \times \mathbb{C}^2 \\ \pi \downarrow & \searrow f & \downarrow \mathcal{R} \\ F & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C}^2 \end{array} \quad \tau(t) = (t, t^3, t^5)$$

τ による direct image は、 $\tau(T)$ に対し、 \mathcal{D} -複体の層に
なる。

$$\begin{aligned} \int_T \mathcal{O}_T &= \mathcal{D}_{T \times \mathbb{C}^2} \delta_{\tau(T)} \\ &= \mathcal{D}_{T \times \mathbb{C}^2} / \mathcal{I} \end{aligned}$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{D}_{T \times \mathbb{C}^2} (x - t^3, y - t^5, \frac{\partial}{\partial t} + 3t^2 \frac{\partial}{\partial x} + 5t^4 \frac{\partial}{\partial y}).$$

この方程式系を \mathcal{M} とおく。 \mathcal{M} は \mathcal{D}_x 上 $1, t, t^2$ で
生成され、 \mathcal{D}_x の作用は、

$$(*) \begin{cases} xt^2 = y, & yt^2 = x^2t \\ x^3t = y^2, & yt = x^2, & x^5 = y^3 \end{cases}$$

で与えられることに注意して置く。

\mathcal{M} を \mathcal{R} に送る、と積分すると、

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{m} = H^0 \int_{\mathbb{R}} \tilde{m} = \tilde{m} / \frac{\partial}{\partial t} \tilde{m}$$

となるから.

$\tilde{m} / \frac{\partial}{\partial t} \tilde{m}$ の \mathcal{D}_X -加群としての構造を計算すればよい。

\tilde{m} に関する $t^7 = x^2 t$ は $\mathbb{1}$ から \mathcal{D}_X 上生成されないけれど

も、 \tilde{m} に関する等式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} t^8 &= 8t^7 + t^8 \left(-3t^2 \frac{\partial}{\partial x} - 5t^4 \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= 8t^7 - \left(3y^2 \frac{\partial}{\partial x} + 5x^4 \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

に注意すると、 $m = \tilde{m} / \frac{\partial}{\partial t} \tilde{m}$ に関する等式

$$8t^7 = 3y^2 \frac{\partial}{\partial x} + 5x^4 \frac{\partial}{\partial y}$$

が成立することから分かる。

同様に \tilde{m} に関する等式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} t^2 &= 2t - \left(3t^4 \frac{\partial}{\partial x} + 5x^2 \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} t^3 &= 3t^2 - \left(3y \frac{\partial}{\partial x} + 5t^7 \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} t^5 &= 5t^4 - \left(3t^7 \frac{\partial}{\partial x} + 5x^3 \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

を考える。左辺は $\text{mod } \frac{\partial}{\partial t} \tilde{m}$ で零だから、以上の4式を

t, t^2, t^4 に関する線形結合として

$$80t = 27y^2 D_x^3 + 45x^4 D_x^2 D_y + 480x^3 D_x D_y + 1100x^2 D_y,$$

$$24t^2 = 15y^2 D_x D_y + 25x^4 D_y^2 + 54y D_x,$$

$$40t^4 = 9y^2 D_x^2 + 15x^4 D_x D_y + 100x^3 D_y$$

を得る。(m に関する等式として成立しない。 $D_x = \frac{\partial}{\partial x}, D_y = \frac{\partial}{\partial y}$)

従って、 \mathcal{M} は \mathbb{D}_x 上 $u = \int_{\mathbb{R}^2} (1 \bmod \tilde{\mathcal{G}})$ から生成されること分かる。

引き続き \mathcal{M} の関係式を導出しよう。既に $D_t t^2 = 0$ と $D_t t^3 (= x D_t) = 0$ は考えたので、残りは、

$$D_t = 0, \quad D_t \cdot t = 0$$

を考えるとい。まず、後者は、

$$\begin{aligned} D_t \cdot t &= t D_t + 1 \\ &= -(3x D_x + 5y D_y + 7) = 0 \end{aligned}$$

となる。前者は $\bmod \tilde{\mathcal{G}}$ で、

$$D_t = -(3t^2 D_x + 5t^4 D_y)$$

なのでこの右辺の t^2, t^4 に前に求めてある式を代入すると、

$$\begin{aligned} &3t^2 D_x + 5t^4 D_y \\ &= \frac{1}{8} D_x (15y^2 D_x D_y + 25x^4 D_y^2 + 54y D_x) \\ &\quad + \frac{1}{8} D_y (9y^2 D_x^2 + 15x^4 D_x D_y + 100x^3 D_y) \\ &= 3y^2 D_x^2 D_y + 5x^4 D_x D_y^2 + 25x^3 D_y^2 + 9y D_x^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

を得る。以上で全ての関係式が求められた。

(t^k ($k \neq 1, 2, 4, 7$) は $x^a y^b$ ($a, b \in \mathbb{N}$) の形になることに注意せよ。)

またあると、 $F = \{y^3 - x^5 = 0\}$ のとき、

$$H^1_{[F]}(\mathcal{O}_X) = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X(P_1, P_2, P_3),$$

$$P_1 = y^3 - x^5,$$

$$P_2 = 3x D_x + 5y D_y + 7,$$

$$P_3 = 3y^2 D_x^2 D_y + 5x^4 D_x D_y^2 + 25x^3 D_y^2 + 9y D_x^2$$

となることが分かる。

注意 $u = \int \delta(t^3 - x) \delta(y - t^5) dt$ を計算してみる。

$$\begin{aligned} \delta(t^3 - x) &= \frac{1}{3} x^{-2/3} \left\{ \delta(t - x^{1/3}) + \omega \delta(t - \omega x^{1/3}) \right. \\ &\quad \left. + \omega^2 \delta(t - \omega^2 x^{1/3}) \right\} \\ &\quad (\omega^3 = 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= \int \delta(t^3 - x) \delta(y - t^5) dt \\ &= \frac{1}{3} x^{-2/3} \left\{ \delta(y - x^{5/3}) + \omega \delta(y - \omega^2 x^{5/3}) \right. \\ &\quad \left. + \omega^2 \delta(y - \omega x^{5/3}) \right\} \\ &= xy \delta(y^3 - x^5) \end{aligned}$$

次節では上の具体的な表示を用いて、 $H^1_{[F]}(\mathcal{O}_X)$ の char. cycle の計算を行なってみる。

同様の方法で、 $F = \{y^2 - x^m = 0\}$ ($m: \text{odd}$)、 $F = \{y^3 - x^4 = 0\}$ の場合の alg. loc. cohomology $H^1_{[F]}(\mathcal{O}_X)$ の \mathcal{D}_X -加群構造は次のようになる：

$$\mathcal{H}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X) = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X(P_1, P_2, P_3),$$

但し、 $F = \{y^2 - x^m = 0\}$ ($m = 2k+1, k \geq 1$) のとき、

$$P_1 = y^2 - x^m$$

$$P_2 = 2x D_x + m y D_y + (m+1)$$

$$P_3 = \frac{2}{k!} y D_x^{k+1} + \sum_{j=0}^k \frac{m}{j!} D_x^j \cdot x^{k+j} D_y$$

$F = \{y^3 - x^4 = 0\}$ のときは、

$$P_1 = y^3 - x^4$$

$$P_2 = 3x D_x + 4y D_y + 6$$

$$P_3 = 3y^2 D_x^3 + 4x^3 D_x^2 D_y + 32x^2 D_x D_y + 48x D_y.$$

この節の最後に次のことに注意しておく。一般に、

F を $X = \mathbb{C}^2$ の既約な平面曲線とすると、 F に台を持つ $\text{alg. loc. cohomology } \mathcal{M} = \mathcal{H}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X)$ について、

命題 1 ① \mathcal{M} は $\mathcal{B}_{F^0|X^0}$ の minimal extension である

$$(F^0 = F \cap X^0, X^0 = X \setminus \{(0,0)\})$$

② $\mathcal{M}_{(0,0)}$ は $\mathcal{D}_{(0,0)}$ -加群として simple.

が成立つ。証明は F の resolution $\tilde{F} \xrightarrow{\pi} F$ に対し

この節のはじめと同じ考察を行うとよい。(cf. [16] 基本

予想 B)

§2. まず "Gröbner base" の定義から始める。はじめに (形式的) \wedge 多項式環の場合について述べる。

$R = K[[x]]$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$, $\text{char } K = 0$) とする。

$f \in R$, $f = \sum_a a_a x^a$ に対して。

$$N(f) = \{ a \in \mathbb{N}^n \mid a_a \neq 0 \}$$

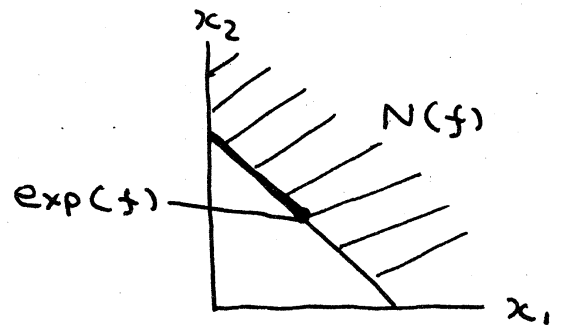
$$\text{ord}(f) = \min \{ |a| \mid a \in N(f) \}$$

$$\text{exp}(f) = \min \{ a \in \mathbb{N}^n \mid a \in N(f), |a| = \text{ord } f \}$$

と置く。ここに $<$ は
逆辞書式順序を表す。

すなわち、 $a < b \iff$

$$\exists i \ a_i < b_i, \ a_{i+1} = b_{i+1}, \\ \dots, \ a_n = b_n.$$



\mathcal{I} は R の ideal $\mathcal{I} = R(f_1, \dots, f_m)$ をとり、

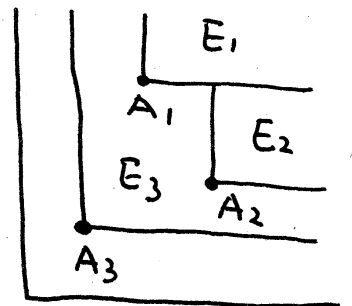
$$E = E(\mathcal{I}) = \{ \text{exp}(f) \mid f \in \mathcal{I}, f \neq 0 \}$$

$$A_i = \text{exp}(f_i)$$

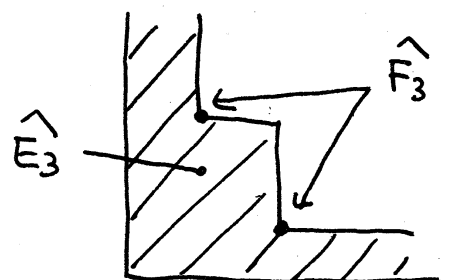
$$E_i = (A_i + \mathbb{N}^n) \setminus \bigcup_{j < i} E_j$$

$$\hat{E}_i = E_i - A_i$$

$$\hat{F}_i = \mathbb{N}^n \setminus \hat{E}_i \text{ の生成系} \\ \text{で最小のもの}$$



と定める。



このとき、 (f_1, \dots, f_m) が I の Gröbner base である

とは、 $\forall f \in I$ が

$$\exists g_i \in R \quad f = \sum g_i f_i, \quad N(g_i) \subset \hat{E}_i$$

の形に割り切れることである。これは f_1, \dots, f_m の順序によらないこと、また任意の ideal I に Gröbner base の存在することから知られている。ideal の生成元

が Gröbner base であるかどうかの判定法として、

Buchberger [3] は R : 多項式環の場合に証明した。

定理 2 (f_1, \dots, f_m) が I の Gröbner base であるためには、

$$\forall \alpha \in \hat{F}_i \quad \alpha f_i = g_1 f_1 + \dots + g_m f_m$$

$$(\exists g_j \in R \quad N(g_j) \subset \hat{E}_j)$$

と割り切れることが必要十分。

定理 3 (f_1, \dots, f_m) が I の Gröbner base である

とき、 $\{f_i\}$ の関係式は、(定理 2 の $g_j = g_j^{(\alpha, i)}$ を用いて)

$$\alpha f_i - \sum_j g_j^{(\alpha, i)} f_j = 0 \quad (\alpha \in \hat{F}_i, i=1, \dots, m)$$

によって生成される。

注意 定理 3 は定理 2 の類似を \mathcal{O}_X の左 ideal についていふことに必要になる。

次に微分作用素の環 \mathcal{D} の場合を考えよう。

$$P = \sum_{|d| \leq m} a_d(x) D^d \in \mathcal{D}_x \text{ に対し.}$$

$$\sigma_{\text{total}}(P)(x, \xi) = \sum_{|d| \leq m} a_d(x) \xi^d,$$

$$\sigma(P)(x, \xi) = \sum_{|d|=m} a_d(x) \xi^d$$

を $\mathbb{C}[[x, \xi]]$ の元とみなし.

$$N(P) = N(\sigma_{\text{total}}(P))$$

$$\exp(P) = \exp(\sigma(P))$$

とある。このとき Weierstrass - 冪中の割り算定理の類似が \mathcal{D} についても成立し、 \mathcal{D} の左 ideal I の Gröbner basis を同様に定義する。ここで次に注意する:

$$P = \sum Q_i P_i, \quad N(Q_i) \in \widehat{E}_i(P_i)$$

と割り切れているとせよ。 $\text{ord } P = m$, $\text{ord } P_i = m_i$ とすると.

$$\sigma_m(P) = \sum \sigma_{m-m_i}(Q_i) \sigma_{m_i}(P_i).$$

従って、 (P_1, \dots, P_m) が I の Gröbner basis ならば:

$\sigma(P_1), \dots, \sigma(P_m)$ は $\widehat{\text{gr}} I \subset \widehat{\text{gr}} \mathcal{D}$ を

生成する。

この定理 2, 3 を認めるとこれは \mathcal{D} の場合に拡張することが出来る (Castro [4], Noumi [4], 等参照)。
Takayama [17]

定理 2' $I \subset \mathcal{D}$ ideal とする。 (P_1, \dots, P_m) が I の

Gröbner base であるためには.

$$\forall (\alpha, \delta) \in \widehat{E}_i \quad x^\alpha D^\delta P_i = Q_1 P_1 + \dots + Q_m P_m$$

$$(\exists Q_j \in \mathcal{D} \quad N(Q_j) \subset \widehat{E}_j)$$

と割り切れることが必要十分。

この定理 2' を用いて、§1 で計算した $\mathcal{L}_2(P_1, P_2, P_3)$ が Gröbner-basis of $\mathcal{I} = \mathcal{D}_x(P_1, P_2, P_3)$ であることを確認してみよう。

$$P_1 = y^3 - x^5$$

$$P_2 = 3x D_x + 5y D_y + 7$$

$$P_3 = 3y^2 D_x^2 D_y + 5x^4 D_x D_y^2 + 25x^3 D_y^2 + 9y D_x^2$$

であった。 $\exp(P)$ に対応する leading term はそれぞれ、

$\exp(P_1) = y^3$, $\exp(P_2) = 3x\xi$, $\exp(P_3) = 3y^2\xi^2\eta$ である。 $E_i, \widehat{E}_i, \widehat{F}_i$ は次のように定める：

$$E_1 = \{y \geq 3\}, \quad \widehat{E}_1 = \mathbf{N}^4$$

$$E_2 = \{x \geq 1, y = 0, 1, 2, \xi \geq 1\}, \quad \widehat{E}_2 = \{y = 0, 1, 2\}$$

$$E_3 = \{x = 0, y = 2, \xi \geq 2, \eta \geq 1\}, \quad \widehat{E}_3 = \{x = y = 0\}$$

$$\widehat{F}_2 = \{y^3\}$$

$$\widehat{F}_3 = \{x, y\}$$

従って、定理 2' によれば、 $y^3 P_2, x P_3, y P_3 \in \mathcal{I}$ が P_1, P_2, P_3 で割り切れることよ。 割り算を実行すると、

$$y^3 P_2 = (3x D_x + 5y D_y - 8) P_1 + x^5 P_2$$

$$xP_3 = -5D_x D_y^2 P_1 + (y^2 D_x D_y + 3y D_x) P_2$$

$$yP_3 = 3D_x^2 D_y P_1 + (x^4 D_x D_y + 5x^3 D_y) P_2$$

と割り切られる。従って、 P_1, P_2, P_3 は I の Gröbner base であり、特に、 $\mathfrak{g}_2 I$ は $\sigma(P_1), \sigma(P_2), \sigma(P_3)$ で生成される：

$$f_1 = \sigma(P_1) = y^3 - x^5,$$

$$f_2 = \sigma(P_2) = 3x\xi + 5y\eta,$$

$$f_3 = \sigma(P_3) = 3y^2\xi^2\eta + 5x^4\xi\eta^2.$$

今 $(0, 0, \xi, \eta) \in T_{(0,0)}^* X$ ($\xi \neq 0, \eta \neq 0$) のまわりで考えると。

$$\mathcal{O}_{T^*X} \otimes_{\mathfrak{g}_2 \mathfrak{D}} \mathfrak{g}_2 I = \mathcal{O}_{T^*X} (f_2, y^2)$$

である。

従って、 $m = \mathfrak{D}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X)$ の characteristic cycle は $[\text{ch}(m)] = 2T_{(0,0)}^* X + T_{F=0}^* X$ であることがわかる。

§3. A_1 型 rational double point の場合の計算

この例では, $V = \{z^2 = xy\} \subset X = \mathbb{C}^3$ に台をとり alg.

loc. cohomology $\mathcal{H}_{[V]}^1(\mathcal{O}_X)$ の計算を行なう。

V の resolution $\tilde{V} \xrightarrow{\pi} V$ を次のように定める:

$$\tilde{V} = \{(u, v, [z, \eta]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid u\eta^2 = v z^2\},$$

$$\pi(u, v, [z, \eta]) = \begin{cases} (u, u \cdot (\frac{\eta}{z})^2, u \cdot \frac{\eta}{z}) & (z \neq 0) \\ (v \cdot (\frac{z}{\eta})^2, v, v \cdot \frac{z}{\eta}) & (\eta \neq 0) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V} & & \\ \pi \downarrow & \searrow f & \\ V & \hookrightarrow & X = \mathbb{C}^3 \end{array}$$

この場合、原点の fibre が \mathbb{P}^1 となるので、§1 と同じ計算を

すると、 $P_0 = (0, 0, 0)$ とおくと、

$$\int_f \mathcal{O}_{\tilde{V}} = \mathcal{H}_{[V]}^1(\mathcal{O}_X) \oplus \mathcal{B}_{P_0} \otimes \mathcal{O}_X.$$

これは $H^i(\mathbb{P}^1; \mathbb{C}) = 0$ ($i \neq 0, 2$), \mathbb{C} ($i = 0, 2$) に対応している。

$\int_f \mathcal{O}_{\tilde{V}}$ を計算する為に、 f を有理数 \mathbb{C} と projection に分解する。次のようにするとよい:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V} & \xrightarrow{\tau} & X \times \mathbb{P}^1 \\ \pi \downarrow & \searrow f & \downarrow \rho \\ V & \hookrightarrow & X \end{array}$$

$p = (u, v, [z, \eta]) \in \tilde{V}$
 $\tau(p) = (f(p), [z, \eta])$
と定める。

このとき, $\tau(\tilde{V}) = \{(x, y, z, [\xi, \eta]) \mid x\eta = z\xi, y\xi = z\eta\}$.
 以下 $\tilde{X} = X \times \mathbb{P}^1$ とかく。 \tilde{X} の開集合 $\tilde{U} = \{\xi \neq 0\}$ と
 おく。 \tilde{U} 上の affine 座標 $(x, y, z, \eta (= \eta/\xi))$ とする。 同様に
 に, $\tilde{U}' = \{\eta \neq 0\}$, $\eta' = \xi/\eta$ とおく。 $\tilde{U} \cap \tilde{U}'$ 上は $\eta\eta' = 1$ である。

$\tilde{m} = \int_{\tilde{U}} \Theta_{\tilde{U}}$ は $\delta 1$ と同様に $\tau(\tilde{V})$ に沿った δ -函数の
 層になるが, 今度は global な生成元のない $\delta 1$ と異なる。
 すなわち,

$$\tilde{U} \text{ 上では, } \tilde{m} \cong \mathbb{D}_{\mathbb{C}^4} \delta(y - \eta z) \delta(z - \eta x),$$

$$\tilde{U}' \text{ 上では, } \tilde{m} \cong \mathbb{D}_{\mathbb{C}^4} \delta(x - \eta' z) \delta(z - \eta' y),$$

となる。

次に $\tilde{m} \in \mathcal{R}(\tilde{p})$ に沿って積分すると,

$$\int_{\mathcal{R}} \tilde{m} \cong \mathbb{R}\mathbb{P}_* (0 \rightarrow \tilde{m} \xrightarrow{\Theta_{\tilde{X}}} \tilde{m} \otimes \Omega_{\tilde{X}/X} \rightarrow 0).$$

ここに $\Omega_{\tilde{X}/X}$ は $\tilde{X} \rightarrow X$ の fibre に沿った 1 -form を表わ
 す。 右辺を計算するために, まず $\mathbb{R}\mathbb{P}_* \tilde{m}$, $\mathbb{R}\mathbb{P}_* (\tilde{m} \otimes \Omega_{\mathbb{P}^1})$
 を計算してみる。

\tilde{U} 上の \tilde{m} の section は,

$$\sum_{k, \ell \geq 1} \sum_{m \geq 0} f_{k\ell m}(x, y, z) \frac{\eta^m}{(y - \eta z)^k (z - \eta x)^\ell}$$

の形にかける。 但し, $|f_{k\ell m}| \leq C_\varepsilon \varepsilon^m$ ($\forall \varepsilon > 0$) とし \pm 増
 大度評価を満足し, k, ℓ については有限和とする。

$\tilde{U} \cap \tilde{U}'$ 上の \tilde{m} の section は上の形, $m \in \mathbb{Z}$ を与えて

$T=0$ の形にかける。

$g = \frac{1}{g'}$ を代入すると。

$$\frac{g^m}{(y-gz)^k(z-gx)^e} = (\pm) \frac{g'^{k+e-m}}{(z-g'y)^k(x-g'z)^e}.$$

従って、 $m \geq 0$ の部分は \tilde{U} 上の section に、 $k+e-m \geq 0$ の部分は \tilde{U}' 上の section にのびる。

以上の考察で $H^1(\tilde{X}, \tilde{m}) = 0$ が分かる。

同様に、 $\tilde{U} \cap \tilde{U}'$ 上で

$$\frac{g^m}{(y-gz)^k(z-gx)^e} dg = (\pm) \frac{g'^{k+e-m-2}}{(z-g'y)^k(x-g'z)^e} dg'$$

に注意すると、 $H^1(\tilde{X}, \tilde{m} \otimes \Omega_{\mathbb{P}^1}) = 0$ が分かる。

0次コホモロジ-は同様の考察により、

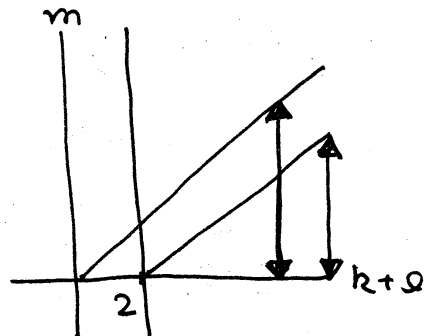
$$H^0(\tilde{X}, \tilde{m}) = \left\{ \sum_{\substack{k, e \geq 1 \\ 0 \leq m \leq k+e \\ f_{ini}}} f_{k, e, m} \frac{g^m}{(y-gz)^k(z-gx)^e} \right\},$$

$$H^0(\tilde{X}, \tilde{m} \otimes \Omega_{\mathbb{P}^1}) = \left\{ \sum_{\substack{k, e \geq 1 \\ 0 \leq m \leq k+e-2 \\ f_{ini}}} f_{k, e, m} \frac{g^m}{(y-gz)^k(z-gx)^e} dg \right\}$$

にかける。

従って、

$$H^i \int_{\mathbb{P}^1} \tilde{m} = 0 \quad (i \neq 0),$$



$$(1) H^0 \int_{P^2} \tilde{m} = \frac{H^0(\tilde{X}, \tilde{m} \otimes \Omega_{P^1})}{dH^0(\tilde{X}, \tilde{m})}$$

となる。右辺を計算する前に、 $dH^0(\tilde{X}, \tilde{m}) \subset H^0(\tilde{X}, \tilde{m} \otimes \Omega_{P^1})$ を確認しておく。

$m \leq k+2-1$ のときはそのまま微分するとよい。

$m = k+2$ のときは、

$$(2) d_g \left(\frac{g^m}{(y-gz)^k (z-gx)^2} \right) = k y \frac{g^{m-1}}{\binom{\cdot}{k+1} \binom{\cdot}{2}^{2+2}} d^{k+2} z + \frac{g^{m-1}}{\binom{\cdot}{k} \binom{\cdot}{2+1}} d^k x$$

となる。これは global section になる。

(1) の右辺の \mathcal{D}_X -加群構造を計算しよう。まず、

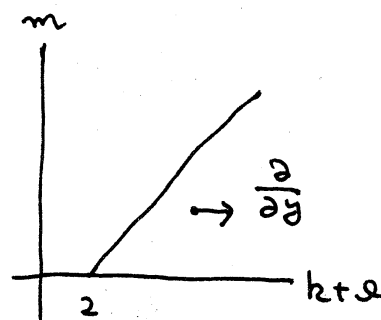
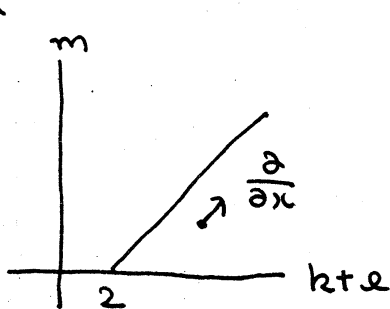
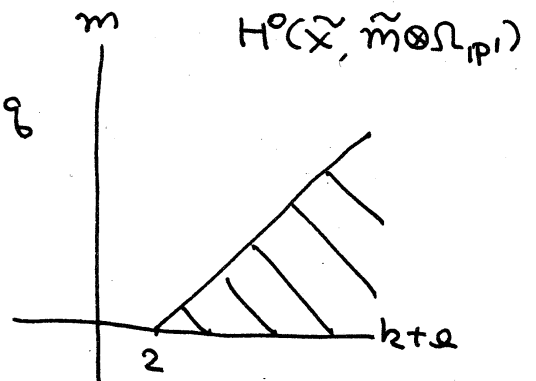
$H^0(\tilde{X}, \tilde{m} \otimes \Omega_{P^1})$ の \mathcal{D}_X 上の生成元を調べよう。

以下、

$$u_{k,2}^m = \frac{g^m}{(y-gz)^k (z-gx)^2} d^k z$$

となる。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} u_{k,2}^m = 2 u_{k,2+1}^{m+1} \\ \frac{\partial}{\partial y} u_{k,2}^m = -k u_{k+1,2}^m \end{cases}$$

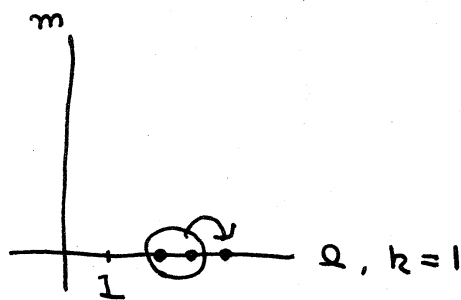
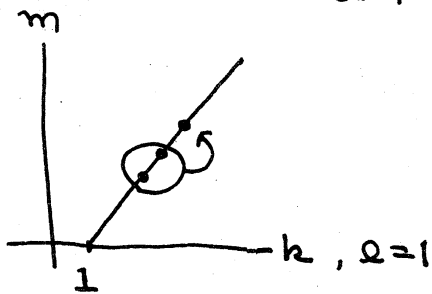


に注意すると、

$\{u_{k,q}^m; m=k-1, q=1 \text{ 又は } m=0, k=1, q \geq 1\}$ から生成されることを分子。次に。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} u_{k,1}^m &= k u_{k+1,1}^{m+1} - u_{k,2}^m \\ &= k u_{k+1,1}^{m+1} - \frac{\partial}{\partial x} u_{k,1}^{m-1} \\ &= k u_{k+1,1}^{m+1} + \frac{1}{k-1} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u_{k-1,1}^{m-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} u_{1,q}^0 &= u_{2,q}^1 - q u_{1,q+1}^1 \\ &= -\frac{\partial}{\partial y} u_{1,q}^1 - q u_{1,q+1}^1 \\ &= -\frac{1}{q-1} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u_{1,q-1}^0 - q u_{1,q+1}^1 \end{aligned}$$



であるから、 $H^0(\tilde{X}, \tilde{m} \otimes \Omega_{P^1})$ は

$$u = u_{1,1}^0, v = u_{2,1}^1, w = u_{1,2}^0$$

から生成される。ただし、 $D_z u = v - w$ という関係がある。

u, v, w の D_x の作用を計算しよう。

今、 g を適当にとる。

$$\begin{cases} v = -g D_y u \\ w = v - D_z u \\ (y - g z) u = (z - g x) u = 0 \\ D_x u - g w = 0 \quad (\Leftrightarrow (D_x + g^2 D_y + g D_z) u = 0) \end{cases}$$

これらの関係式から q を消去したものを求めるとよい。

$$\begin{aligned} (z - qz)w &= (z - qz)(v - D_z u) \\ &= -(z - qz)(qD_y u + D_z u) \\ &= -(qD_y + D_z)(z - qz)u + u = u \end{aligned}$$

となるから、

$$x(D_{z,c} u - qw) = xD_{z,c} u - zw + u$$

$$\therefore (xD_x + 1)u = zw$$

が得られる。他も同様にして、結局、

$$\begin{cases} xz = -zD_y u \\ z v = -(yD_y + 1)u \\ yw = zD_x u \\ zw = (xD_{z,c} + 1)u \\ (xy - z^2)u = 0 \\ D_z u = v - w \end{cases}$$

が得られる。 v を消去して整理すると、

$$(3) \begin{cases} (xy - z^2)u = 0 \\ (xD_{z,c} + yD_y + zD_z + 2)u = 0 \\ xw + (xD_z + zD_y)u = 0 \\ yw - zD_x u = 0 \\ zw - (xD_{z,c} + 1)u = 0 \end{cases}$$

を得る。これは $dH^0(\tilde{X}; \tilde{m})$ で零化するとして生ずる関係

係式で記述される。前と同様に $H^0(\tilde{X}; \tilde{m})$ は \mathbb{D}_X 上

$\frac{z^m}{(y-z)(z-zy)}$ ($m=0, 1, 2$) から生成されることから、

新しい関係式は (2) に注意して、

$$\left. \begin{aligned} 0 &= d_z \left(\frac{1}{(y-z)(z-zy)} \right) = -z D_y u + x w \\ 0 &= d_z \left(\frac{z}{(y-z)(z-zy)} \right) = u + x D_x u + z v \\ &= (1 + x D_x + z D_z) u + z w \\ 0 &= d_z \left(\frac{z^2}{(y-z)(z-zy)} \right) = y v + z D_x u \\ &= (y D_z + z D_x) u + y w \end{aligned} \right\} (4)$$

の3つである。以上から、(1)の右辺は \mathbb{D}_X 上 u, w で生成され、関係式は (3)(4) で与えられることから、

(3)(4) を $u_0 = w + \frac{1}{2} D_z u (= \frac{1}{2}(v+w))$ とおいて、

整理すると、

$$(5) \left\{ \begin{aligned} (xy - z^2) u &= 0 \\ (x D_x + y D_y + z D_z + 2) u &= 0 \\ (x D_z + 2z D_y) u &= 0 \\ (y D_z + 2z D_x) u &= 0 \\ (x D_x - y D_y) u &= 0 \\ x u_0 = y u_0 = z u_0 &= 0 \end{aligned} \right.$$

を得る。

$\int_{\tilde{f}} \mathcal{O}_{\tilde{X}} = \mathbb{D}_X u \oplus \mathbb{D}_X u_0$ であるから、 $\mathbb{D}_X u_0$ は

$\mathbb{R}[x, y]$ に対応し、 $\mathbb{R}[x, y]$ の $\partial_x u$ が $\mathcal{H}'_{[V]}(\mathcal{O}_x)$ に対応する:

$$\mathcal{H}'_{[V]}(\mathcal{O}_x) = \partial_x u,$$

u の満たす方程式は (5) の最初の 5 つで与えられる。

注意.
$$\int \delta(y-z) \delta(z-xy) dx$$

$$= \frac{1}{z^2 - xy} \int \{ z \delta(y-z) - x \delta(z-xy) \} dx$$

$$= \delta(z^2 - xy)$$

§2 と同じ計算により、(5) で与えられる方程式はこれらの生成する ideal の Gröbner base になる、ということが確かめられる。

付録 Buchberger の論文は余り読みがくなくないのて、定理 2 の証明を付けておく。定理 3 は、以下の証明の系として、同様に示される。以下 $R = K[[x]]$ とする。

定理 (= 定理 2) R の ideal $I = R(f_1, \dots, f_m)$ に対し、

$$\forall i \forall \alpha \in \widehat{F}_i \exists q_{ij}^\alpha \in R \quad (j=1, \dots, m)$$

$$x^\alpha f_i = \sum_j q_{ij}^\alpha f_j, \quad N(q_{ij}^\alpha) \subset \widehat{E}_j$$

を満足すると仮定する。このとき、 (f_1, \dots, f_m) は I の Gröbner basis である。

(証明) はじめに次のことに注意しておく。

(1) 定理の仮定の q_{ij}^α は一意的に定まり、

(2) $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ ($\varepsilon_i > 0$) に対し、

$$v_\varepsilon(f) = \min \{ \langle \varepsilon, \alpha \rangle \mid \alpha \in N(f) \} \quad (f \in R)$$

と置く。 ε をうまくとると、

$$f_i = x^{A_i} + R_i, \quad v_\varepsilon(R_i) > v_\varepsilon(x^{A_i})$$

$$A_i = \exp(f_i) \quad (\forall i)$$

となるようにする。

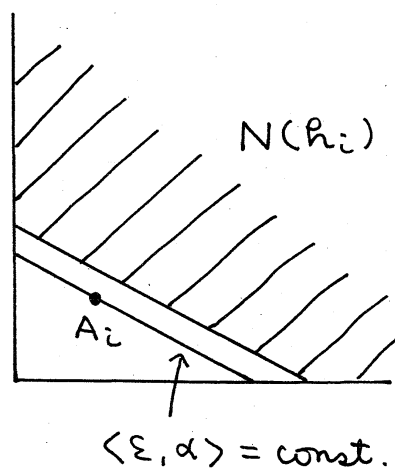
このとき、 $\delta > 0$ があって、 q_{ij}^α は、

$$v(q_{ij}^\alpha) \geq v(\alpha) + v(f_i) - v(f_j) + \delta \varepsilon_j \geq \varepsilon_j$$

$$-v(f_j) + \delta \varepsilon_j \geq \varepsilon_j$$

を満足する。但し、

$$\varepsilon_j \geq \varepsilon_i \quad (j \geq i), \quad 0 \quad (j < i).$$



($(\widehat{F}_i + A_i) \cap E_j = \phi$ ($i \leq j$) に注意せよ。)

定理を証明するには、 $\forall k \forall f \in R$ f_k に対して、

$\exists g_j \in R$ ($j = 1, \dots, k$)

$$f - \sum_{j=1}^k g_j f_j \in R(f_{k+1}, \dots, f_m), \quad N(g_j) \subset \widehat{E}_j$$

となることをいふことである。

その為には、 $\forall k$ に対して、

(*)_k: $R \rightarrow R$ の K 線型写像 T_k, \widetilde{P}_{jk} ($j = 1, \dots, m$)
がある。

$$v(T_k(g)) \geq v(g),$$

$$v(\widetilde{P}_{jk}(g)) \geq v(g) + v(f_k) - v(f_j) + \delta \in j \geq k,$$

$$N(\widetilde{P}_{jk}(g)) \subset \widehat{E}_j \quad (j \leq k),$$

とし、

$$g f_k = \sum_j \widetilde{P}_{jk}(T_k(g)) f_j \quad (\forall g \in R)$$

をみたす

ことをいふことが、(*)_k を帰納法的に証明する。

$k=1$ のとき、 $T_1 = \text{id}$ 、 $\widetilde{P}_{j1} = \delta_{j1}$ とおくとよい。

$k=2$ の場合を示す。 $g \in R$ とし、

$$g = g \widehat{E}_2 + \sum_{\alpha \in \widehat{F}_2} \sigma_\alpha(g) x^\alpha, \quad N(g \widehat{E}_2) \subset \widehat{E}_2$$

と分解する。但し、 $g \mapsto (g \widehat{E}_2, \sigma_\alpha(g))$ は線型になる

ように定めることができる。

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in F_2^{\wedge}} \sigma_{\alpha}(g) x^{\alpha} f_2 &= \sum_{\alpha} \sum_j \sigma_{\alpha}(g) q_{2j}^{\alpha} f_j \\ &= \sum_j P_{j2}(g) f_j \end{aligned}$$

とかくと、 $P_{j2}(g)$ の order について、

$$\begin{aligned} v(P_{j2}(g)) &\geq \min v(\sigma_{\alpha}(g) q_{2j}^{\alpha}) \\ &\geq v(g) + v(f_2) - v(f_j) + \delta \quad \epsilon_{j \geq 2} \end{aligned}$$

が成り立つ。特に $v(P_{22}(g)) \geq v(g) + \delta$ に注意する。

$$g f_2 = g \hat{E}_2 f_2 + \sum_j P_{j2}(g) f_j$$

と分解されたが、この分解を $P_{22}(g) f_2$ に対して繰り返してゆく。 P_{22} は order を上げることには注意される。

$$T_2(g) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{22}^k(g)$$

は4又束として、 $R \rightarrow R$ の線型写像を定める。そして、

$$g f_2 = T_2(g) \hat{E}_2 f_2 + \sum_{j \neq 2} P_{j2}(T_2(g)) f_j$$

と分解される。 $P_{j2}^{\sim} = () \hat{E}_2$ ($j=2$)、 P_{j2} ($j \neq 2$) とかくと (*) $k=2$ が示された。

次に $k=3$ の場合を示す。一般の $k \mapsto k+1$ の step も同様に示される。

まず $k=2$ の場合と同様に、

$$g f_3 = g \hat{E}_3 f_3 + \sum_j P_{j3}(g) f_j,$$

$\nu(\rho_{j3}(g)) \geq \nu(g) + \nu(f_3) - \nu(f_j) + \delta \in_j \geq 3$
 と分解する。 $\rho_{23}(g) f_2$ に対して $(*)_{k=2}$ を用いると、

$$\rho_{23}(g) f_2 = \sum_j \tilde{\rho}_{j2} (T_2(\rho_{23}(g))) f_j .$$

これを代入して、

$$\begin{aligned} g f_3 &= g \hat{E}_3 f_3 + \sum_{j \neq 2} (\rho_{j3} + \tilde{\rho}_{j2} \circ T_2 \circ \rho_{23})(g) f_j \\ &\quad + \tilde{\rho}_{22} \circ T_2 \circ \rho_{23}(g) f_2 \\ &= g \hat{E}_3 f_3 + \sum_j \rho'_{j3}(g) f_j \end{aligned}$$

と書く。ここで、

$$\begin{aligned} \nu(\rho'_{j3}(g)) &\geq \nu(\tilde{\rho}_{j2} \circ T_2 \circ \rho_{23}(g)) \wedge \nu(\rho_{j3}(g)) \\ &\geq \min \{ \nu(\rho_{23}(g)) + \nu(f_2) - \nu(f_j) + \delta \in_j > 2, \\ &\quad \nu(g) + \nu(f_3) - \nu(f_j) + \delta \in_j \geq 3 \\ &\geq \nu(g) + \nu(f_3) - \nu(f_j) + \delta \in_j \geq 3 \quad , \end{aligned}$$

$$N(\rho'_{j3}(g)) \subset \hat{E}_j \quad (j=1, 2)$$

と書く。特に $\nu(\rho'_{33}(g)) \geq \nu(g) + \delta$.

この分解を $\rho'_{33}(g) f_3$ に対して繰り返して、

$$T_3(g) = \sum_{k=0}^{\infty} (\rho'_{33})^k(g)$$

と書く。

$$g f_3 = T_3(g) \hat{E}_3 f_3 + \sum_{j \neq 3} \rho'_{j3}(T_3(g)) f_j$$

と分解される。

$\tilde{\rho}_{j3} = () \hat{E}_3$ ($j=3$), ρ'_{j3} ($j \neq 3$) と書く。 $(*)_{k=3}$ が示した通り。
 Q.E.D.

大南大

- 1] J. L. Brylinski, La classe fondamentale d'une variété algébrique engendre le D-module qui calcule sa cohomologie d'intersection, *Astérisque* 130 (1985), 260-271.
- 2] J. L. Brylinski et M. Kashiwara, Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems, *Invent. math.* 64 (1981), 387-410.
- 3] B. Buchberger, A criterion for detecting unnecessary reductions in the construction of Gröbner-bases, *Lect. notes in computer sciences* 72 (1979), 3-21.
- 4] F. Castro, Calculs effectifs pour les idéaux d'opérateurs différentiels, *Géométrie algébrique et applications III* (édité par J.-M. Aroca, T. Sanchez-Giralda, J.-L. Vicente), *Travaux en Cours* 24 (1987), 1-19.
- 5] M. G. M. van Doorn et A. R. P. van den Essen, D_n -modules with support on a curve, *Publ. RIMS. Kyoto Univ.*, 23 (1987), 937-953.
- 6] J. Hotta, Introduction to D-modules, *Lect. notes of Inst. Math. Sci., Madras*, 1987.
- 7] M. Kashiwara, B-functions and holonomic systems, *Invent. math.*, 38 (1976), 33-53.
- 8] ———, On the holonomic systems of linear differential equations II, *Invent. math.*, 49 (1978), 121-135.
- 9] ———, *Cours Univ. Paris-Nord, Progress in Maths.*, Birkhäuser, 1983.
- 10] R. MacPherson and K. Vilonen, Perverse sheaves with singularities along the curve $y^n = x^m$, reprint.

- [11] P. Maisonobe, Faisceaux pervers dont le support singulier est une courbe plane, *Composito math.* 62 (1987), 215-261.
- [12] Z. Mebkhout, Local cohomology of analytic spaces, *Publ. RIMS. Kyoto Univ.* 12 suppl. (1977), 247-256
- [13] L. N. Macarro, Faisceaux pervers dont le support singulier est une courbe plane irréductible, *Thèse, Univ. Paris VII.*
- [14] M. Noumi, Higher dimensional analogue of the m -truncated KP hierarchy, *数理解析講究録* 638 (1988)
- [15] S. P. Smith, Curves, differential operators, and finite dimensional algebras, *Lect. notes in Math.* 1296 (1987), 156-176
- [16] S. Tazima, 平面曲線に付いて holonomic 系の Rosenlicht 型構造定理について, *数理解析講究録* 660 (1988)
- [17] N. Takayama, Gröbner basis and the problem of contiguous relations, *Japan J. Appl. Math.*, 6 (1989) 147-160.
- [18] K. Vilonen, Intersection homology D-module on local complete intersections with isolated singularities *Invent. math.* 81 (1985), 107-114.
- [19] J. L. Verdier, Dualité dans les espaces localement compacts, *Sém. Bourbaki*, exp. 300, (1965-66).
- [20] M. Kashiwara, The Riemann-Hilbert Problem for holonomic systems, *Publ. RIMS. Kyoto Univ.*, 20 (1984), 319-365.