数理解析研究所講究録
第693巻 1989年 95-111

Jackson q-integral, q-difference system and connection problem

名大・理　青本和彦 (Kazuhiko Aomoto)

1. G.H. Hardy の "Ramanujan" という本の中に証明されている Ramanujan の等式

$$(1.1)\qquad \int_0^\infty x^{s-1}\frac{(1+aqx)(1+aq^2x)\cdots\cdots}{(1+x)(1+qx)(1+q^2x)\cdots}\,dx$$

$$=\frac{\pi}{\sin\pi s}\prod_{m=1}^{\infty}\frac{(1-q^{m-s})(1-aq^m)}{(1-q^m)(1-aq^{m-s})},$$

$$0<q<1,\quad s>0,\quad 0<a<q^{s-1}$$

がある. G.H. Hardy はこれを証明するのに Ramanujan の interpolation formula

$$(1.2)\qquad \int_0^\infty x^{s-1}\{\varphi(0)-x\varphi(1)+x^2\varphi(2)-\cdots\}\,dx$$

$$=\frac{\pi}{\sin\pi s}\varphi(-s)$$

を証明し，それを利用している. (1.1)は次のよ

うに F.H. Jackson 積分を媒介として

(1.3) $$\frac{1}{1-q}\int_q^1 \frac{dy}{y}\int_0^{\infty y} x^{s-1}\frac{(1+aqx)(1+aq^2x)\cdots\cdots}{(1+x)(1+qx)(1+q^2x)\cdots} d_q x$$

の形に書ける. 積分

(1.4) $$\Psi(y)=\int_0^{\infty y} x^{s-1}\frac{(1+aqx)(1+aq^2x)\cdots\cdots}{(1+x)(1+qx)(1+q^2x)\cdots} d_q x$$

は y について q−周期的, $\Psi(y)=\Psi(qy)$, であって Beta 積分の q-analogue を用いて, 次のように書ける:

(1.5) $$\Psi(y)=A(y)\cdot q^s\,\frac{\Gamma_q(s)\Gamma_q(-\alpha)}{\Gamma_q(s-\alpha)},$$

(1.6) $$A(y)=\left(\frac{y}{q}\right)^{s-2}\frac{\Theta(q^{-\alpha})\,\Theta(q^{s-\alpha-3}y)}{\Theta(q^{s-2-\alpha})\,\Theta(q^{-\alpha-1}y)}.$$

ここで $a=q^\alpha$ とおいている. Θ は通常のテータ関数

(1.7) $$\Theta(x)=(q)_\infty(x)_\infty(q/x)_\infty$$

を表わす. こうして (1.1) は楕円曲線上の d-商の留数計算に簡約された事になる. 関係式(1.5) は (1.4) に附随する Jackson 積分の接続公式

を与える．すなわち，積分(1.4)に応ずる積分路(以下"輪体"と呼ぶ) $[0, \infty y]_q$ と $[0, -a^{-1}]_q$ との関係は

$$(1.8) \qquad [0, \infty y]_q \simeq A(y)\,[0, -a^{-1}]_q \quad (\text{ホモローグ})$$

で与えられる．こうして(1.5)は通常の Beta 積分

$$(1.9) \qquad \int_0^{-a^{-1}} x^{s-1} \frac{(-aqx)_\infty}{(-x)_\infty} d_q x = q^s \frac{\Gamma_q(s)\Gamma_q(-\alpha)}{\Gamma_q(s-\alpha)}$$

に帰着する．

これらの事実をいかに高次元に拡張し定式化するかが，以下の試みである．我々は乗法関数によって自然に定義される"ねじれ de Rham コホモロジー"を利用する．

2. q-analogue of b-functions

よく知られているように，代数曲線，或いはもっと一般に Kähler 多様体上の乗法関数(確定，不確定ともに)は，数論にも類似が見出されているし，様々な局面で重要な役割を果している．その積分は"ねじれ de Rham

コホモロジー (twisted de Rham cohomology) ― 当初 [Grothendieck ― Deligne] によって確立され，今や $\mathcal{D}$-モジュールの体系の中に組み込まれている ― として定式化され，多くの興味ある積分を解明するのに役立っている。この報告ではその q-analogue の定式化を試み，且つ 2, 3 の問題を提起し，得られた結果を述べる。

$\mathbb{C}$ 上の楕円曲線 E の n 個の直積 E^n の 1 次元コホモロジー $H^1(E^n, \mathbb{C})$ の Hodge 分解

$$
(2.1) \qquad \begin{cases} H^1(E^n, \mathbb{C}) = H^{1,0}(E^n) \oplus H^{0,1}(E^n) \\ H^{1,0}(E^n) \cong \left(H^{1,0}(E)\right)^n \end{cases}
$$

に対して，$H^{1,0}(E)$ の各成分からとった $H^{1,0}(E^n)$ の基底をなす正則 1 次微分型式を $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ とする。E^n のある基点 O に対して，$\mathcal{P}(E^n)$ を O から発する E^n の中の区分的になめらかな道の集合とおく。すると対

$$
(2.2) \qquad \begin{aligned} H^{1,0}(E^n) \times \mathcal{P}(E^n) &\longmapsto \mathbb{C} \\ (\theta \quad , \quad \omega) &\longmapsto \int_\omega \theta \end{aligned}
$$

が自然に考えられる. $H^{1,0}$ の双対は, こうして $\mathcal{P}(E^n)$ のある同値類 $[\mathcal{P}(E^n)]$ と同一視される:

$$(2.3) \qquad [\mathcal{P}(E^n)] \cong (H^{1,0}(E^n))^*.$$

今 $H_1(E^n, \mathbb{Z}) \cong (H_1(E,\mathbb{Z}))^n$ の基底を, 各 $H_1(E,\mathbb{Z})$ の成分から α_j, β_j をとって, $\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots \beta_n$ とする. ここで

$$(2.4) \qquad \int_{\alpha_k} \theta_j = 2\pi i\, \delta_{jk}, \quad \int_{\beta_k} \theta_j = 2\pi i \tau\, \delta_{jk}$$

$$(\operatorname{Im} \tau > 0)$$

となるように正規化しておく. $[\mathcal{P}(E^n)]$ は格子 $H_1(E^n, \mathbb{Z})$ を含んでいる. A, B 各々 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$; $\beta_1, \dots, \beta_n$ で生成される $H_1(E^n, \mathbb{Z})$ の部分格子を表わす. $\bar{X} = [\mathcal{P}(E^n)]/A$ とおく. すると写像

$$(2.5) \quad \bar{X} \ni \omega \longmapsto \left(q^{\omega_1} = \exp \int_\omega \theta_1, \dots, q^{\omega_n} = \exp \int_\omega \theta_n\right)$$

によって $\bar{X}$ は $(\mathbb{C}^*)^n$ と同一視される. こうして $\bar{X}$ は乗法アーベル群の構造を持つ. すると $X = H_1(E^n, \mathbb{Z})/A$ は $\bar{X}$ の部分アーベル群である.

X, $\bar{X}$ の (2.5) による像を q^X, $q^{\bar{X}}$ ($q=e^{2\pi i\tau}$) と記す. q^X は $\{(q^{\nu_1}, q^{\nu_2}, \cdots, q^{\nu_n}) \mid \nu_j \in \mathbb{Z}\}$ の $(\mathbb{C}^*)^n$ の部分群である. X 上の $\mathbb{Z}$-値線型関数 μ は $\bar{X}$ 上の $\mathbb{C}$-値線型関数 $\bar{\mu}$ に一意に拡張される.

以下 X と q^X, $\bar{X}$ と $q^{\bar{X}}$ とをしばしば同一視する. $q^{\bar{X}} = (\mathbb{C}^*)^n$ 上の有理関数体を $R(\bar{X})$ とおく. X は $R(\bar{X})$ に作用するので, その1-コサイクル

$$(2.6) \qquad e_x(\omega) \in Z^1(X, R(\bar{X})),\ x \in X,\ \omega \in \bar{X}$$

は $R(\bar{X})$ に値を持つ X 上の関数であって, 等式

$$(2.7) \qquad e_{xx'}(\omega) = e_x(\omega)\, e_{x'}(\omega + x)$$

をみたすものとして定義される. $e_x(\omega)$ は 1-次元コホモロジー類 $H^1(X, R(\bar{X}))$ を与えることになる. このコサイクルについて, 次の佐藤幹夫氏の基本定理が成り立つ.

<u>Theorem 1</u>. (佐藤幹夫) ([S1]). <u>$H^1(X, R(\bar{X}))$ は次の形の $e_x(\omega)$ の集合と同型である: いくつかの $\mu_i \in \mathrm{Hom}(X, \mathbb{Z})$ に対して,</u>

$$(2.8)\qquad b_\chi(\omega) = C_\chi \prod_{i=1}^{k} \prod_{\nu=0}^{\mu_i(\chi)-1} \varphi_k(q^{\overline{\mu_i}(\omega)+\nu}).$$

ここで φ_k は1変数の有理関数（特に多項式としてよい），C_χ は $\mathrm{Hom}(X, \mathbb{C}^*)$ の元.

佐藤幹夫氏は $q=1$ のときに，この $b_\chi(\omega)$ を用いて概均質ベクトル空間の不変式や古典的超幾何関数に応用された（[S1]　）が，我々はこれを q-analogue に適用し，超幾何 q-級数を含むより一般な関数を取り扱いたいのである. 定理の直接的帰結として

Theorem 2. 関数方程式

$$(2.9)\qquad \Phi(\omega+\chi)/\Phi(\omega) = b_\chi(\omega)$$

の解は $q^X = (\mathbb{C}^*)^n$ 上の次の形の関数によって表示される：

$$(2.10)\qquad \Phi(\omega) = \prod_{j=1}^{n} q^{\rho_j \omega_j} \cdot \prod_{i=1}^{l} \Gamma_q(q^{\overline{\mu_i}(\omega)} a_i)^{\pm 1}.$$

ここで，$\rho_j \in \mathbb{C}$，$a_i \in \mathbb{C}^*$，$\Gamma_q(s) = (q)_\infty (1-q)^{1-s}/(q^s)_\infty$ (q-analogue of Γ-function). 以下この $\Phi(\omega)$ を "b-function" 又は "乗法関数" と

呼ぶ事にする.

3. 以下 $x_1=q^{\omega_1}, \cdots, x_n=q^{\omega_n}$ とおく. すると $\Phi(\omega)$は$q^X=(\mathbb{C}^*)^n$上の乗法関数になる. q^Xにおける変換 $\hat{Q}_j$ 及び q^X上の関数 $\psi(x)$に対する変換Q_j を, 各々

$$(3.1)\quad \hat{Q}_j(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,qx_j,\cdots,x_n)$$

$$(3.2)\quad Q_j\psi(x)=\psi(\hat{Q}_j x)$$

と記す. ある$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in q^X$に対して $[0,\xi\infty]_q=[0,\xi_1\infty]_q\times\cdots\times[0,\xi_n\infty]_q$ を ξのX軌跡 $X\cdot\xi\subset q^X$として定義する. すなわち

$$(3.3)\quad [0,\xi\infty]_q=\{(\xi_1q^{\nu_1},\cdots,\xi_nq^{\nu_n})\mid \nu_j\in\mathbb{Z}\}.$$

Def (Jackson q-integral). q^X上の関数 $f(x)$ に対して q-積分

$$(3.4)\quad \tilde{f}=\int_{[0,\xi\infty]_q} f(x)\frac{d_qx_1}{x_1}\wedge\cdots\wedge\frac{d_qx_n}{x_n}$$

を Jackson 和

$$(3.5)\qquad (1-q)^n \sum_{(\nu_1,\cdots,\nu_n)\in\mathbb{Z}} f(q^{\nu_1}\xi_1,\cdots,q^{\nu_n}\xi_n)$$

によって定義する. もし $\tilde{f}$ が存在すれば, 明らかに,

$$(3.6)\qquad \widehat{Q_j f} = \tilde{f} \qquad 1\leq j\leq n$$

を満たしている. 今 Φ を (2.10) の乗法関数とする. すると Φ は次のように表わされると言ってもよい:

$$(3.7)\qquad \Phi(x) = \prod_{j=1}^{n} x_j^{\rho_j}\cdot\frac{\prod_{\mu\in M'}(a'_\mu x^\mu)_\infty}{\prod_{\mu\in M}(a_\mu x^\mu)_\infty}.$$

ここで $\rho_j\in\mathbb{C}$; $a'_\mu, a_\mu\in\mathbb{C}^*$, $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_n)\in\mathbb{Z}^n$; M, M' は有限集合. すると (3.4) は Barnes 積分の q-analogue ([S2]) の一般形に他ならない. さて各因子, x^{ρ_j}, $(a'_\mu x^\mu)_\infty$, $(a_\mu x_\mu)_\infty^{-1}$ は各々変換 $\rho_j\mapsto\rho_j+\nu$, $a'_\mu\mapsto a'_\mu q^\nu$, $a_\mu\mapsto a_\mu q^\nu$ $(\nu\in\mathbb{Z})$ を施せば

$$(3.8)\qquad \begin{aligned} &x_j^{\rho_j}\mapsto x_j^{\rho_j}\cdot x_j^\nu,\ (a_\mu x^\mu)_\infty^{-1}\mapsto(a_\mu x^\mu)_\infty^{-1}(a_\mu x^\mu)_\nu,\\ &(a'_\mu x^\mu)_\infty\mapsto(a'_\mu x^\mu)_\infty\cdot(a_\mu x^\mu)_\nu^{-1}\end{aligned}$$

である．そこで V を

$$x_j^{\nu} \quad 1\le j\le n, \quad (a_\mu' x_\mu)_\nu^{-1}, \tag{3.9}$$

$$(a_\mu x^\mu)_\nu, \qquad \nu=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

によって生成される $\mathbb{C}$ 上の代数とおく．明らかに，

Lemma 1. 線型空間 ΦV には Q_j が各々作用する．すなわち ΦV は X－モジュールになる．ΦV は Φ を含む最小の X－モジュールである．

今 $\varphi\in V$ をとって，積分

$$\tilde{\Phi\varphi} = \int_{[0,\xi\infty]_q} \Phi\varphi\,\varpi, \quad \varpi=\frac{d_q x_1}{x_1}\wedge\cdots\wedge\frac{d_q x_n}{x_n} \tag{3.10}$$

が存在するものとすれば，$[0,\xi\infty]_q$ の定義と (3.6) から

$$\int_{[0,\xi\infty]_q} [Q_j(\Phi\varphi)]\varpi = \int_{[0,\xi\infty]_q} \Phi\varphi\,\varpi. \tag{3.11}$$

一方

$$Q_j(\Phi\varphi) = \Phi\, b_{x_j}(\omega)\varphi(\omega) \tag{3.12}$$

（ここで χ_j は $(0,\cdots,0,\overset{j\text{th}}{1},0,\cdots,0)$ に相当する X の基底）であるから、

$$(3.13)\qquad \widetilde{b_{\chi_j}(\omega)T_j\varphi(\omega)} = \widetilde{\varphi(\omega)}.$$

こうして積分 $\tilde{\varphi}$ は φ を

$$(3.14)\qquad H_\Phi(X, d_q) \underset{def}{=} V\Big/\sum_{\chi}(1-b_{\chi}(\omega)Q^{\chi})V$$

（但し $Q^{\chi}=Q_1^{\nu_1}Q_2^{\nu_2}\cdots Q_n^{\nu_n}$, $\chi=\sum_1^n \nu_j\chi_j$）

$$= V\Big/\sum_{\chi_j}(1-b_{\chi_j}(\omega)Q_j)V$$

の元とみなしてもよい。これは"ねじれ de Rham コホモロジー"の q-analogue 版とみられる。

我々の提起する問題の第1はその有限次元性である。

<u>Quest 1.</u> $\dim H_\Phi(X, d_q) < \infty$?

<u>Quest 2.</u> もし $\dim H_\Phi(X, d_q)$ が有限次元ならば そのホロノミック系を求めよ. 又その基底を求めよ. 又 Wronskian を求めよ.

<u>Quest 3.</u> $H_\Phi(X, d_q)$ の双対は $[0, \xi\infty]_q$

を代表元とする，Jackson積分に附随する輪体のなす線型空間であるが，これらの輪体間の従属関係を与える接続公式を求めよ．ちなみに，No.1で示したΦの場合は$\dim H_\Phi(X, d_q)=1$であって，(1.8)は接続公式の例である．

<u>ex1.</u> $n=1$.

$$\Phi = x^{\alpha_0}\prod_{j=1}^{n}\frac{(x/t_j)_\infty}{(xq^{\alpha_j}/t_j)_\infty} \tag{3.15}$$

これはPochhammer積分のq-analogueであって，$H_\Phi(X, d_q)$は$\varphi_j=\dfrac{1}{1-x/t_j}$，$1\le j\le n$によって

張られ，これらが基底をなしている．従てその次元はnである．この場合の差分方程式，接続公式はMimachi([M2])の中で与えられている．

<u>ex2.</u> $n=2$.

$$\Phi = x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\frac{(x_1)_\infty(x_2)_\infty(q^{\gamma'}x_2/x_1)_\infty}{(q^{\beta_1}x_1)_\infty(q^{\beta_2}x_2)_\infty(q^{\gamma}x_2/x_1)_\infty} \tag{3.16}$$

この場合は${}_3\varphi_2$型の超幾何関数を与える．

その次元は3. 基底は

$$\varphi_1 = \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)} \quad \cdots\cdots \quad * \leftarrow 1,\ * \leftarrow 2$$

$$\text{(3.17)} \qquad \varphi_2 = \frac{1}{(1-x_1)(x_1-q^{\gamma'}x_2)} \quad \cdots\cdots \quad * \leftarrow 1 \leftarrow 2$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{(1-x_2)(x_2-q^{1-\gamma}x_1)} \quad \cdots\cdots \quad * \leftarrow 2 \leftarrow 1$$

と選ぶことが出来る. これらは3個の頂点を持つ上記のような directed tree によって代表される. これらは admissible terminal basis として次の例にまで拡張に定義される.

<u>ex. 3</u> $\quad n \geq 3$.

$$\text{(3.18)} \qquad \Phi = \prod_{j=1}^{n} x_j^{\rho_j} \prod_{j=1}^{n} \frac{(x_j)_\infty}{(x_j q^{\gamma_{0j}})_\infty} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(q^{\gamma'_{ij}} x_j / x_i)_\infty}{(q^{\gamma_{ij}} x_j / x_i)_\infty}.$$

<u>Theorem 3.</u> $\tilde{\Phi}$ <u>は</u> $t_1 = q^{\rho_1}, \cdots, t_n = q^{\rho_n}$ <u>の関数として</u> n 個<u>の</u> q<u>-差分方程式</u>

$$\text{(3.19)} \qquad \prod_{j=0}^{r-1} (Q_j - q^{\gamma'_{jr}} Q_r) \prod_{j=r+1}^{n} (Q_r - q^{\gamma_{rj}-1} Q_j)\, \xi_r^{-1} \tilde{\Phi}$$

$$= \prod_{j=0}^{r-1}(Q_j - q^{\gamma_{jr}} Q_r) \prod_{j=r+1}^{n}(Q_r - q^{\gamma'_{rj}-1} Q_j)\tilde{\Phi}$$

$$(1 \leq r \leq n)$$

をみたしている. 但し $Q_0=1$, $\gamma'_{0j}=0$

(3.20) $\quad Q_j\varphi(t_1,\cdots,t_n)=\varphi(t_1,\cdots,qt_j,\cdots,t_n)$

である.

これは超幾何 q-級数のみならず, 組み合わせ論にしばしば登場する q-series ([A1][M] など) を特別な場合として含む興味ある $\tilde{\Phi}$ を与える. この方程式がホロノミックかどうかは $\dim H_{\Phi}(X,\mathcal{O}_q)$ の有限次元性から出る. これについては次の事実が示される.

Theorem 4. α_j, γ_{ij}, γ'_{ij} は generic とする. $H_{\Phi}(X,\mathcal{O}_q)$ の基底は $(n+1)$ 個の頂点を持つ terminal directed tree☆ によって表わされる. その個数は $(n+1)^{n-1}$ である.

(☆"terminal" についてはここでは説明を省く)

条件をいかにゆるめられるかは基本的な問題と考えられる. Theorem 4 において,

$H_\Phi(\overline{X}, d_q)$ の双対である輪体の基底を~~標準的~~に $(n+1)^{n-1}$ 個とる事が出来る．これは(3.19)の解の $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \longmapsto \infty$ の漸近解に対応するもので それらを

$$\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_\mu \quad (\mu = (n+1)^{n-1})$$ と

おくとき 任意の $[0, \xi\infty]_q$ は

(3.21) $$[0, \xi\infty]_q \sim \sum_{j=1}^{\mu} u_j \tau_j$$

と表わされる．各 u_j は ξ に依存するが，ξ について q-周期的であって，Ⓗ関数を用いて表わされる．我々はこれを $n=1$ の場合の Mimachi の公式を用いて計算する事が出来るが，複雑なのでこれを与える事は別の機会にゆずりたい．

[A1] G.E. Andrews, q-series : Their development and application in analysis, number theory, combinatorics, physics and computer algebra, Regional conference series in Math., A.M.S. 1985.

[A2] K. AOMOTO, A note on holonomic

q-difference system, to appear in Algebraic Analysis in honour of Prof. M. Sato, 1989.

[A3] ——, A remark to Askey conjectures, preprint 1988.

[A4] R. Askey, Beta integrals in Ramanujan's papers, his unpublished work and further examples, Ramanujan Revisited, 1988, 561–590.

[H1] L. Habsieger, Une q-intégrale de Selberg et Askey, SIAM J. Math. Anal., 19 (1988), 1475–1489.

[H2] G. Hardy, Ramanujan, Chelsea 1940.

[K] K. Kadell, A proof of Askey's conjectured q-analogue of Selberg's integral and a conjecture of Morris, SIAM J. Math. Anal., 19 (1988), 969–986.

[M1] S.C. Milne, Multiple q-series and U(n) generalizations of Ramanujan's $_1\psi_1$ sum, Ramanujan Revisited, 1988, 473–524.

[M2] K. Mimachi, Connection problem in holonomic q-difference system associated with a Jackson integral of Jordan-Pochhammer, to appear in Nagoya Math. J.

[S1] M. Sato (佐藤幹夫), 概均質ベクトル空間の理論, 数学の歩み, 1970.

[S2] L. J. Slater, Generalized hypergeometric functions, Cambridge Univ. Press, 1966.