

Todorov曲面の混合Torelli問題

高知大理 白井三平 (USUI Sampei)

- 目次: (1) Clemens-Schmid列  
(2) Mixed version  
(3) おだやかな退化の例  
(4) Todorov曲面の一般退化  
(5) 帰納法の条件の遺伝  
(6) Todorov型 K 3 曲面  
(7) 混合周期写像とその拡張  
(8) 極小および局所混合Torelli定理  
(9) 問題点

(0) 退化を利用してTorelli問題を解決しようという試みは、曲線の場合には浪川氏が、K 3 曲面の場合にはFriedman氏が成功している。

Todorov曲面に対しては  $H^2(X)$  上のHodge構造を用いての周期写像は正次元のファイバーをもつので、 $H^2(X - C)$ ,  $C$  は  $X$  の標準因子, 上の混合Hodge構造を用いる必要がある。またTodorov曲面どろしはおだやかな退化でつながっている。この退化を利用して混合Torelli問題を帰納的に解決したいというのが目標とする問題である。最終結果にはまだ到達していない。

上のようなおだやかな退化はより広い一般型曲面でも観測される現象であり、上記の試みは退化を利用しての帰納的な(混合)Torelli問題に対するひな型としての意味がある。

(1) Clemens-Schmid列

$f : X \rightarrow \Delta$  をコンパクト複素多様体の半安定退化とし、 $X_t := f^{-1}(t)$  ( $t \in \Delta$ ),  $X^* := X - X_0$  とする。局所 cohomology 列と "Wang列" を組み合わせてつきの図式がえられる:

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^{q-1}(X) & \dashrightarrow & H^{q-1}(X_t) & \xrightarrow{N} & H^{q-1}(X_t) & \dashrightarrow & H^{q+1}(X, X^*) \rightarrow H^{q+1}(X) \\
 & \searrow & \nearrow & & \searrow & \nearrow & \\
 & & H^q(X^*) & & H^q(X^*) & & \\
 & \nearrow & \searrow & & \nearrow & \searrow & \\
 H^{q-2}(X_t) & \dashrightarrow & H^q(X, X^*) & \longrightarrow & H^q(X) & \dashrightarrow & H^q(X_t) \xrightarrow{N} H^q(X_t)
 \end{array}$$

ここで  $N := \log T$ ,  $T$  は local monodromy. また双対定理により  $H^q(X, X^*) \cong H_{2n+2-q}(X_0)$ ,  $n = \text{rel. dim } f$ .

定理(Clemens)  $X$  が Kähler のとき、上図式の横列は  $\mathbb{Q}$  上の混合 Hodge 構造 (MHS と略記する) の完全列である ■

この証明には混合 Hodge 構造の purity, i.e.,  $\text{Gr}_k^W H^{q+1}(X, X^*) = 0$  ( $k \leq q$ ),  $\text{Gr}_k^W H^q(X_0) = 0$  ( $k > q$ ), が使われる。

(2) Mixed version

(1) と同じ記号を用いる。さらに  $Y$  を  $X$  中の非特異な超曲面とし、 $Y + X_0$  が SNC で、 $f$  の制限により  $Y \rightarrow \Delta$  も半安定退化になっているとする。  $X, X_t, X_0$  を各々  $\overset{\circ}{X} := X - Y, \overset{\circ}{X}_t := X_t \cap \overset{\circ}{X}, \overset{\circ}{X}_0 := X_0 \cap \overset{\circ}{X}$  に置き換えて、(1) と同様の図式が得られる。今の場合 purity が崩れるので従来の証明法は使えないが、Thom-Gysin列と Clemens-Schmid列を組合わせた図式と双対定理を使い次を得る。

定理  $X$  が Kähler のとき、次は  $\mathbb{Q}$  上の MHS の完全列である。

$$0 \rightarrow H^1(\overset{\circ}{X}_0) \rightarrow H^1(\overset{\circ}{X}_t) \xrightarrow{N} H^1(\overset{\circ}{X}_t) \rightarrow H_{2n-1}(X_0, Y_0),$$

$$0 \rightarrow H^0(\dot{X}_t) \rightarrow H_{2n}(X_0, Y_0) \rightarrow H^2(\dot{X}_0) \xrightarrow{N} H^2(\dot{X}_t) \rightarrow H^2(\dot{X}_t) \blacksquare$$

(3) おだやかな退化の例

曲面の2重被覆の退化として次のような例がある。

分岐因子 の退化	対の半安定退化の特異 ファイバー $(X_0, Y_0)$ , $X_0 = V + W$	主因子 $V$ の $(p_g, q, c_1^2)$ の変化	$H^2(X_t)$ 上の 局所モノド ロミーの型
-------------	---	---------------------------------------	---------------------------------

(I<sub>1</sub>)

孤立分岐点  
となっている  
 $A_1$  を  
genericに  
通す

種数は1下がる  
(base ext. 不用)

$(0, 0, -1)$  I

[Todorov曲面, 超楕円曲  
面の退化で観測]

(I<sub>2</sub>)

$D_4$  を  
generic  
に通す

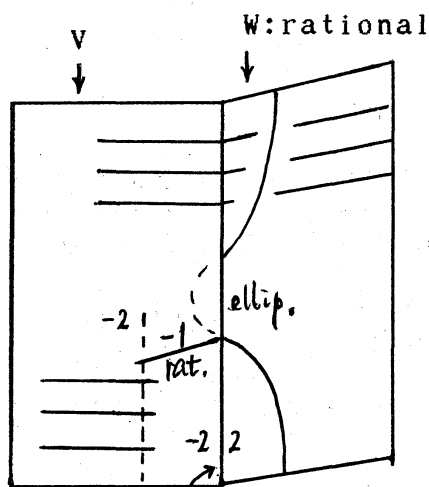
section of fibration on  
on  $V$ ,  $\tilde{E}_8$  on  $V$   
(2:1 の base ext. 1 回)

$(0, +1, -1)$  I

(Kunev曲面の退化で観測)

(II)

通常4重点  
を持たず

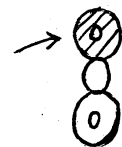


$(-1, 0, -1)$

II

Noether線  $c_1^2 = 2p_g - 4$   
 から  $c_1^2 = 2p_g - 3$  への  
 退化で観測

genus 2 curves による  
 fibration の sing.fiber  
 の片割,  $\tilde{E}_g$  on V



(2:1 の base ext. 1 回)

(4) Todorov曲面の一般退化

**定義** Todorov曲面  $\bar{X}$  とは、 $\chi(O_{\bar{X}}) = 2$  なる標準曲面であり  
 位数 2 の自己同型  $\sigma$  を持ち  $\bar{X}/\sigma$  が有理 2 重点のみを持つ K3 曲面  
 となるもののことである ■

**定義** numerical K3 曲面 とは、 $p_g = 1, q = 0, c_1^2 = 0$  なる  
 極小曲面のことである ■

X を Todorov 曲面  $\bar{X}$  の極小モデルとし C を X の標準因子とする。

**定理** (Todorov-Morrison-Usui) Todorov 曲面の変形型は  $(l, \alpha) = (c_1^2(X), \log_2 \#(2\text{-torsion of Pic}(X)))$  で決り、これらは下の値をとる。また一般退化は (3) の  $(I_1)$ -型であり、下で  $\downarrow$  または  $\rightarrow \curvearrowright$

1段下がる。↓か→かはcode理論で統制できどちらへも自由にいける。なお(2,1)→(0,1)は2段下がる。

$(\emptyset, \alpha) = (8, 5)$

(7, 4)

(6, 3)

(5, 2) (4, 2)

(4, 1) (3, 1) (2, 1) : ~~(1, 1)~~ (0, 1)

(3, 0) (2, 0) (1, 0) : (0, 0) (-1, 0) ← K3 blown up 1 point

Todorov

起こらない



numerical K3 with 2



double fibers



numerical K3 with 1 double fiber ■

上の一般退化を利用して、Todorov曲面に対する混合Torelli問題を考えようというのが目標である。

(5) 帰納法の条件の遺伝

(2) の記号を用いる。  $f : (X, C) \rightarrow \Delta$  をTodorov曲面とその標準因子の対の  $(I_1)$ -型の半安定退化とする。  $H^2(\overset{\circ}{X}_0)$  上の functorial MHS と  $H^2(\overset{\circ}{X}_t)$  上の limiting filtered MHS の weight filtrations は次のようになっている。

(5.1)  $H^2(\overset{\circ}{X}_0)$  の weight filtrations.

Gysin filtration (open分):

$G_1 = 0 \subset G_2 = H^2(X_0)/H^0(C_0) \subset G_3 = H^2(\overset{\circ}{X}_0).$

Mayer-Vietoris filtration (singularity分):

$L_0 = 0 \subset L_1 = H^1(\overset{\circ}{D}) \subset L_2 = H^2(\overset{\circ}{X}_0),$

ここで  $\overset{\circ}{D} = \overset{\circ}{V} \cap \overset{\circ}{W}, \quad \overset{\circ}{X}_0 = \overset{\circ}{V} + \overset{\circ}{W}.$

Weight filtration: G-filtration の長さが2という特殊性により、

convolution  $W_k = (G * L)[2]_k := \sum_{i+j=k+2} G_i \cap L_j$  となっている。

$$W_1 = 0 \subset W_2 = G_2 + L_1 \subset W_3 = H^2(\overset{\circ}{X}_0).$$

F を Hodge filtration とすると  $(H^2(\overset{\circ}{X}_0, \mathbb{Q}), W, F)$  が functorial MHS である ■

(5.2)  $H^2(\overset{\circ}{X}_0)$  の weight filtrations.

Gysin filtration (open分):

$$G_1 = 0 \subset G_2 = H^2(X_t)/H^0(C_t) \subset G_3 = H^2(\overset{\circ}{X}_t).$$

N-filtration  $L = L(N)$  (monodromy分):

$$L_0 = 0 \subset L_1 = \text{Im } N \subset L_2 = \text{Ker } N \subset L_3 = H^2(\overset{\circ}{X}_t).$$

G-relative N-filtration  $M = M(G, N)$ : (5.1)と同様の特殊性によ

り、convolution  $M = (G * L)[2]$  となっている。

$$M_1 = 0 \subset M_2 = G_2 + L_1 \subset M_3 = L_2 \subset M_4 = H^2(\overset{\circ}{X}_t).$$

F を limiting Hodge filtration とすると  $(H^2(\overset{\circ}{X}_t, \mathbb{Q}), G, M, F)$  が limiting filtered MHS である ■

Key Lemma  $(I_1)$ -型半安定退化に対し、Gysin filtrations と  
うし、また Mayer-Vietoris filtration と N-filtration は両立し、  
混合Clemens-Schmid列と共に次の MHS の同型を与える:

$$H^2(\overset{\circ}{V})/\mathbb{Z}[D] \xrightarrow{\sim} \text{Gr}_2^L H^2(\overset{\circ}{X}_t) \quad \text{isom. over } \mathbb{Z} \text{ mod. torsion} \blacksquare$$

(6) Todorov型 K 3 曲面

$(\emptyset, \alpha)$ -型Todorov曲面  $\bar{X}$  にたいし、次の図式を考える:

$$\begin{array}{ccc} \bar{C} \subset \bar{X} & \longleftarrow & \hat{X} \\ \downarrow & \downarrow \pi & \downarrow \hat{\pi} \\ \bar{B} \subset \bar{Y} & \longleftarrow \mu & Y \end{array} \quad \begin{array}{l} \bar{Y} := \bar{X}/\sigma, \quad \bar{C}: \text{ the canonical divisor of } X, \\ \bar{B} := \pi(\bar{C}), \quad \mu: \text{ the minimal resolution,} \\ \hat{X} := \bar{X} \times_{\bar{Y}} Y. \end{array}$$

そうすると次のことが分る (Morrison):

2重被覆  $\hat{\pi}$  の分岐因子は  $\mu^*\bar{B} + E$ , ここで  $E = \sum E_i$  は互いに交わらない  $\ell + 8$  本の  $(-2)$ -曲線の和集合, となる。この  $E$  を distinguished  $(-2)$ -curves と呼ぶ。

$(\bar{B})^2 = 2\ell$  であり、カップ積から引き起こされる写像  
 $f : (\text{primitive span of } \sum \mathbb{Z}[E_i] \text{ in } H^2(Y, \mathbb{Z})) \rightarrow \text{Hom}(\sum \mathbb{Z}[E_i], \mathbb{F}_2)$ ,  
 $\mathbb{F}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , に対し  $\alpha = \dim_{\mathbb{F}_2} \text{Im } f$  となる。 $\alpha$  を  $(Y, E)$  の 2-index と呼ぶ ■

定義 (Morrison)  $(\ell, \alpha)$ -Todorov型 K 3 曲面とは次の条件を満たす 3 つ組  $(\bar{Y}, L, E)$  のことである:

- $\bar{Y}$ : 有理 2 重点 (RDP と略記) のみをもつ K 3 曲面,
- $L$ :  $(L)^2 = 2\ell$  を満たす  $\bar{Y}$  上の ample 束,
- $E$ :  $\bar{Y}$  の minimal resolution  $Y$  上の互いに交わらない  $(-2)$ -曲線の和集合で、 $\alpha = (2\text{-index of } (Y, E))$  となるもの ■

そうすると次の対応がある (Morrison):

$\{ \bar{X} \mid (\ell, \alpha)\text{-型 Todorov 曲面} \} / \text{isom.}$

$\downarrow$  bijective

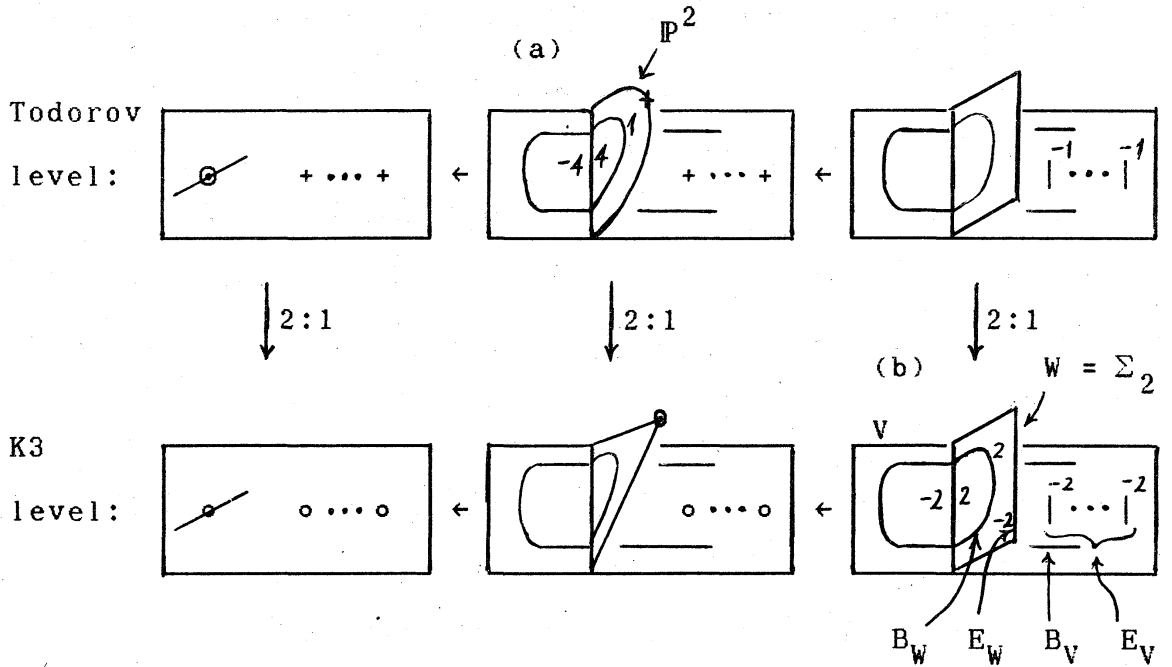
$\{ (\bar{Y}, \bar{B}, E) \mid (\bar{Y}, \mathcal{O}_{\bar{Y}}(\bar{B}), E) \text{ は } (\ell, \alpha)\text{-Todorov 型 K 3 曲面であり、} \bar{B} \text{ は次の条件 (*) を満たす} \} / \text{isom.}$

条件 (\*): minimal resolution  $Y$  上で  $B := \mu^*\bar{B}$  は被約で高々単純特異点のみを持ちかつ  $B \cap E = \emptyset$  である ■

Todorov 曲面とその標準因子の対の  $(I_1)$ -型半安定退化

$f : (X, C) \rightarrow \Delta$  に対して次のように Todorov 型 K 3 曲面の半安定退化  $g : (Y, B+E) \rightarrow \Delta$  が対応している:

特異ファイバーの図



以下 (a) のかわりに (b) の段階で混合周期写像とその拡張を定式化する。

(7) 混合周期写像とその拡張

$(\ell, \alpha)$ -Todorov型 K 3 曲面の極小モデルとその上の非特異分岐因子の対  $(Y, B+E)$  を一つ取ってきて、 $\mathbb{Z}$  上の Thom-Gysin列を次のように記す:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \rightarrow & H^0(B) & \oplus & H^0(E) & \rightarrow & H^2(Y) & \rightarrow & H^2(\overset{\circ}{Y}) & \rightarrow & H^1(B) & \rightarrow & 0 \\
 (\Lambda) & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
 & & \Lambda_B & & \Lambda_E & & \Lambda_Y & & \Lambda & & \Lambda_3 & & 
 \end{array}$$

ここで  $\overset{\circ}{Y} := Y - (B + E)$  であり、 $(\Lambda)$  の最初の直和分解は区別する。

定義  $(\ell, \alpha)$ -Todorov型 K 3 曲面の極小モデルと非特異分岐因子の対  $(Y', B'+E')$  の印付けとは Thom-Gysin列の同型

$$(\eta) = (\eta_B, \eta_E, \eta_Y, \eta, \eta_3) : \text{Gysin}(Y, B+E) \xrightarrow{\sim} (\Lambda)$$



のことである ■

大域モノドロミーを次のように定義する:

$$\Gamma = \Gamma_{(\ell, \alpha)} := \text{Im}\{\text{Aut}(\Lambda) \longrightarrow \text{Aut}(\Lambda/\text{torsion})\},$$

$$\Gamma_Y = \Gamma_{Y, (\ell, \alpha)} := \text{Im}\{\text{Aut}(\Lambda) \longrightarrow \text{Aut}(\Lambda_Y)\}.$$

また

$$D, D_2, D_3$$

を各々  $\Lambda, \Lambda^{\perp(\Lambda_B, \Lambda_E)}, \Lambda_3$  上の Hodge filtrations の分類空間とする。そうすると、Todorov型 K 3 曲面に対する Torelli 定理と周期写像の全射性により普遍  $\Lambda_Y$ -印付き族

$$f : \bar{Y} \longrightarrow D_2$$

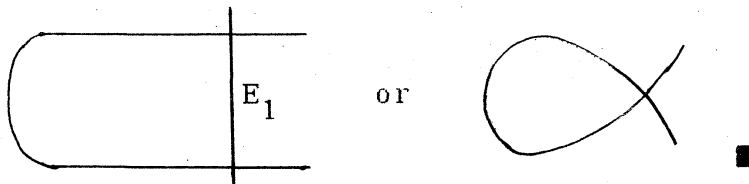
と  $\bar{Y}$  上の  $f$ -ample 束  $L$  が構成できる。

$U := U_{(\ell, \alpha)} \subset \mathbb{P}(f_*L)$ : 次の条件  $(*_0)$  を満たす  $(\bar{Y}, \bar{B}, E)$  の成す Zariski 開集合。

条件  $(*_0)$ : minimal resolution  $Y \xrightarrow{\mu} \bar{Y}$  上で、 $B := \mu^*\bar{B}$  は非特異でかつ  $B \cap E = \emptyset$  ■

$\bar{U} := \bar{U}_{(\ell, \alpha)} \subset \mathbb{P}(f_*L)$ :  $U$  に次の条件  $(*_1)$  を満たす  $(\bar{Y}, \bar{B}, E)$  を付け加えた部分コンパクト化。

条件  $(*_1)$ :  $\bar{Y}$  は  $\ell + 8$  個の通常 2 重点のみを持ち、その minimal resolution  $Y$  上で  $B$  は下のどちらかの形の NCD:



すると、Todorov型 K 3 曲面に対する Torelli 定理により、幾何を介して、 $\Gamma_Y$  は  $\mathbb{P}(f_*L)$  に固有不連続に作用して

$U/\Gamma_Y$ : Todorov曲面の分類空間,

$\cap$

$\bar{U}/\Gamma_Y$ : 部分コンパクト化

となっている (Morrison)。そして混合周期写像とその拡張

$$\begin{array}{ccc}
 U/\Gamma_Y & \xrightarrow{\Phi} & D/\Gamma & \Phi(\bar{Y}, \bar{B}, E) := \text{Hodge filtration} \\
 \cap & & \cap & \text{on } H^2(Y - (B+E)) \\
 \bar{U}/\Gamma_Y & \xrightarrow{\bar{\Phi}} & \overline{D/\Gamma} & 
 \end{array}$$

が得られる。実際今考えている退化は実質的に曲線の退化と同じであり、局所モノドロミーの作用は

1 . . . 1	0 . .
0 . .	1 . . 1

であり、部分コンパクト化  $\overline{D/\Gamma}$  は  $D_2 \times D_3$  上局所的に次のように構成できる:

$$\begin{aligned}
 D &= \Delta^{13-\ell} \times (H \times \Delta^{2\ell+1}) \times \mathbb{C}^{(13-\ell)(2\ell+1)} \\
 &\downarrow \text{exp} \\
 D/\langle T \rangle &= \Delta^{13-\ell} \times (\Delta^* \times \Delta^{2\ell+1}) \times \mathbb{C}^{(13-\ell)(2\ell+1)} \\
 &\cap \\
 \overline{D/\langle T \rangle} &= \Delta^{13-\ell} \times (\Delta \times \Delta^{2\ell+1}) \times \mathbb{C}^{(13-\ell)(2\ell+1)} \\
 &\downarrow \\
 &\overline{D/\Gamma}
 \end{aligned}$$

(8) 極小および局所混合 Torelli 定理

(7)の記号を用いる。

(8.1) 極小混合 Torelli 定理.

内点:  $(\bar{Y}, \bar{B}, E) \in U$  に対応する  $(Y, B+E)$  に対して

$$H^1(T_Y(-\log(B+E))) \longrightarrow \text{Hom}(H^1(\Omega_Y^1(\log(B+E))), H^2(O_Y)).$$

injective

法線方向:  $\text{Gr}_3^G$  をとって曲線の場合に帰着さす。実際、境界点における局所座標  $t_1, t_2, \dots, t_{12}$  ( $t_1 = 0$  が境界  $\bar{U} - U$ ) を使って  $\text{Gr}_3^{G \circ \Phi}$  を書き下せば、

$$\text{Gr}_3^{G \circ \Phi}(t) \text{ mod } \langle T \rangle =$$

*	$t_1 \exp 2\pi i s(t)$
period of $B_V$	*

となり、右上のブロックの  $t_1$  のべきが 1 だからよし。

局所自明方向: 今考えている範囲内での局所自明方向の小変形では、(6) のどの段階での変形を考えても同値である、i.e., ODP や Todorov involution 等の影響はない。(a) の変形で考えたとき、それは主因子の変形で決ってしまう。また (a) の主因子の変形は (b) のそれで決ってしまう。これに対しても Key Lemma が成立し、内点のときと同様に次がいえる:

$$H^1(T_V(-\log(B+E+D))_V) \longrightarrow \text{Hom}(H^1(\Omega_V^1(\log(B+E+D))_V), H^2(O_V)).$$

injective

実際  $H^2(V-(B+E))_V^{\perp[D]} \subset H^2(V-(B+E+D))_V$  の違いは  $F^2$  のところのみ影響するからよし。

(8.2) 一般境界点における局所混合 Torelli 定理.

Nikulin の埋め込み定理と symplectic automorphisms の分類を使い次を得る:

補題  $(\ell, \alpha) \neq (8, 5)$  のとき、一般の Todorov 型 K 3 曲面は自明な自己同型しか持たない ■

これにより、 $(\ell, \alpha) \neq (8, 5)$  のとき、 $D_2/\Gamma_Y$  の一般点の近傍上では、 $\bar{U}/\Gamma_Y \cong \bar{U} \subset \mathbb{P}(f_*L)$  となっている。また  $\overline{D/\Gamma}$  は V-manifold であり、局所モノドロミーの対数  $N$  の作用が primitive であることにより、一般境界点の像  $\bar{\phi}(\bar{Y}, \bar{B}, E)$  で  $\overline{D/\Gamma}$  は非特異である。

以上により、 $(\ell, \alpha) \neq (8, 5)$  のとき  $\bar{\phi}$  に対し一般境界点での局所混合 Torelli 定理が得られた。

### (9) 問題点

当初の目標であった、Todorov 曲面のおだやかな退化を利用して帰納的に混合 Torelli 問題を解こうという試みに関し、次の2つの問題点が残っている：

(9.1) extension data と  $B \subset Y$  の位置の関係 ■

(9.2) 帰納法の進行問題 ■

Todorov 曲面の分類空間は、すべての  $(\ell, \alpha)$  に対して  $\dim(U/\Gamma_Y)_{(\ell, \alpha)} = 12$  であり、 $(U/\Gamma_Y)_{(\ell, \alpha)}$  の  $(I_1)$ -型退化の境界として現れるのは  $(U/\Gamma_Y)_{(\ell-1, \alpha')}$ ,  $\alpha' = \alpha$  or  $\alpha - 1$ , の超曲面である。従って「一般境界点において」という形のままでは帰納法は進行しない。

他の問題として、

(9.3) 混合 Clemens-Schmid 列の一般化 ■