数理解析研究所講究録
第 693 巻 1989 年 165-180

可積分系と量子群

京大理　神保道夫 (Michio Jimbo)

0. はじめに

量子群の概念は Drinfeld によって 1985-86 年頃導入された。ICMの報告集 [D1] に従えば

量子群 := 非可換・非余可換 Hopf 代数
(の"函数環")

と定式化される；そのココロは [D1] に次のように説明されている。

群 G 上の函数環 $A = \mathrm{Fun}\, G$ は、可換環であると共に、G の群構造から来る次の operations（環の射）を担っている：

$$\Delta_A : A \to A \otimes A \qquad f(g) \mapsto f(g_1 g_2)$$

$$S_A : A \to A \qquad f(g) \mapsto f(g^{-1})$$

$$\varepsilon_A : A \to \mathbb{C} \qquad f(g) \mapsto f(e) \qquad (e : 単位元 \in G)$$

これらはしかるべき意味で A の環構造と compatible である。すなわち，

$(A, \Delta_A, S_A, \varepsilon_A)$ は Hopf 代数.

GがLie群であるときは、もう一つの自然なHopf代数が付随している。いまGのLie環$\mathfrak{g}$の包絡環$U\mathfrak{g} = B$をとると、生成元$X \in \mathfrak{g}$に対して環の射を

$$\Delta_B : B \to B \otimes B \qquad X \mapsto X \otimes 1 + 1 \otimes X$$

$$S_B : B \to B \qquad X \mapsto -X$$

$$\varepsilon_B : B \to \mathbb{C} \qquad X \mapsto 0$$

と定めれば

$(B, \Delta_B, S_B, \varepsilon_B)$ は Hopf代数.

両者は自然なpairingに関し（大雑把にいって）dualなHopf代数になっている。

群Gが非可換群ならば、$A = \mathrm{Fun}\,G$は余可換でない：

$$\sigma \circ \Delta_A \neq \Delta_A \qquad (\sigma : A \otimes A \to A \otimes A,\ \sigma\, x \otimes y \underset{\mathrm{def}}{=} y \otimes x).$$

他方定義から直ちに$B = U\mathfrak{g}$は非可換環であるが余可換になっている：

$$\sigma \circ \Delta_B = \Delta_B .$$

可換かつ非余可換なHopf代数は多かれ少なかれ$A = \mathrm{Fun}\,G$の形であり、非可換かつ余可換なHopf代数は同様に$B = U\mathfrak{g}$の形であることがわかっている。そこで、一般に可換でも余可換でもないHopf代数を、仮想的な"量子群"上の"函数環"とみなして、群の概念の一つの拡張と思うことにしよう、というのが量子群の立場である。

このような定義の背景には、並行して興味深い実例の発見があった。一つは C^* 環の理論における Woronowicz の仕事、もう一つは数理物理の可積分系，Yang-Baxter 方程式に源を発する。前者は $\mathrm{Fun}\,G$ の，後者は $U\mathfrak{g}$ の、ともに 1 parameter q を含む deformation である。

C^*-algebra

⇣

Woronowicz [W]

$\underbrace{\text{S matrix　統計物理　QISM}}_{\text{YBE}}$

⇣

Faddeev, Sklyanin, Kulish, Reshetikhin, ⋯
Drinfeld [D2], J. [J1]

本稿では、この背景の一つであった量子逆散乱法（QISM）から $U_q\mathfrak{g} = U\mathfrak{g}$ の q-deformation，が発見されるに至る経緯を紹介し、あわせて $U_q\mathfrak{g}$ に関する研究にふれる。

1. 古典逆散乱法

完全積分可能な古典系の代表例として、次の sine-Gordon 方程式をとりあげよう。

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \frac{m^2}{\beta}\sin\beta\varphi = 0 \qquad (1)$$

（suffix は微分，以下 $m = \beta = 1$ ととる）。基本的な事実は、この方程式が、補助的な線型方程式系の可積分条件の形に書けることである：

$$\left(i\frac{\partial}{\partial x}+L(\lambda)\right)\Psi=0 \qquad (2)$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}+M(\lambda)\right)\Psi=0$$

$$(1)\Leftrightarrow\left[i\frac{\partial}{\partial x}+L(\lambda),\ i\frac{\partial}{\partial t}+M(\lambda)\right]=0\quad\forall\lambda.$$

ここに，たとえば $L(\lambda)$ は 2×2 行列

$$L(\lambda)=\begin{pmatrix}\pi(x) & \frac{1}{4}(\lambda v^{+}(x)+\lambda^{-1}v^{-}(x))\\ \frac{1}{4}(\lambda v^{-}(x)+\lambda^{-1}v^{+}(x)) & -\pi(x)\end{pmatrix}$$

$$\pi=\varphi_t,\quad v^{\pm}=e^{\pm i\varphi/2}.$$

$M(\lambda)$ の具体形は省略する。

いま (2) の解の基本行列系で $x=x_0$ で I と正規化したものを $\Psi(x;x_0;\lambda)$ とする。（時刻 t は固定し，φ は given とする）散乱データ $a(\lambda), b(\lambda)$ を

$$\lim_{x_0\to-\infty,\,x\to+\infty}E(x;\lambda)^{-1}\Psi(x;x_0;\lambda)E(x_0;\lambda)=\begin{pmatrix}a(\lambda) & b(\lambda)\\ -\overline{b(\lambda)} & \overline{a(\lambda)}\end{pmatrix}$$

によって定義する。ここに $E(x;\lambda)$ は振動を除くための指数因子で，(2) で $\varphi\equiv\pi\equiv0$ ととったものの解。散乱データからポテンシャル φ,π を再構成することが逆問題であり，これは積分方程式に帰着される。(1) の場合に著しいのは，散乱データの時間依存性が極めて簡単になることである：

$$a(\lambda,t)=a(\lambda,0),\quad b(\lambda,t)=b(\lambda,0)e^{-\frac{i}{8}(\lambda+\lambda^{-1})t}. \qquad (3)$$

この事実により，(1) の初期値問題が逆散乱法で解かれることになる。

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\pi(x,0),\ \varphi(x,0)} \arrow[r, "順"] & \boxed{a(\lambda,0),\ b(\lambda,0)} \arrow[d, "(3)"] \\
\boxed{\pi(x,t),\ \varphi(x,t)} & \boxed{a(\lambda,t),\ b(\lambda,t)} \arrow[l, "逆"']
\end{tikzcd}$$

いま π と φ を正準共役と定めると、(1) は Hamilton 形式に書ける。

$$\{\pi(x),\ \varphi(y)\} = \delta(x-y)$$

$$O_t = \{H, O\}\ ,\qquad H = \int dx\left(\frac{1}{2}\pi(x)^2 + \frac{1}{2}\varphi_x(x)^2 + 1 - \cos\varphi\right).$$

このとき (3) の成立は、次の根拠に基づく：

(i) $\{a(\lambda),\ a(\mu)\} = 0$

$$\{a(\lambda),\ b(\mu)\} = \frac{1}{4}\frac{\lambda\mu}{\lambda^2-\mu^2}\,a(\lambda)\,b(\mu)$$

(ii)
$$\ln a(\lambda) = \frac{c_1}{\lambda} + \frac{c_2}{\lambda^2} + \cdots \qquad \lambda\to\infty$$
$$= c_0 + c_{-1}\lambda + c_{-2}\lambda^2 + \cdots \qquad \lambda\to 0$$

とおくとき $\quad H = \frac{i}{2}(c_{-1} - c_1).$

実際 (i), (ii) から $\{H, a(\lambda)\} = 0$, $\{H, b(\lambda)\} = -\frac{i}{8}(\lambda+\lambda^{-1})b(\lambda)$ が従うからである。

散乱データはポテンシャルから non-local な変換によって得られた量であるが、実は (i) は次のような local な量の間の関係式の帰結である：

$$\{L(x;\lambda) \underset{,}{\otimes} L(y;\mu)\} = [\,r(\lambda,\mu),\ L(x,\lambda)\otimes I + I\otimes L(x,\mu)\,]\,\frac{i}{2}\,\delta(x-y) \tag{4}$$

左辺は行列要素間の Poisson bracket を 4×4 行列に並べた物

$$\begin{pmatrix} \{L_{11}, L'_{11}\}, & \{L_{11}, L'_{12}\}, & \{L_{12}, L'_{11}\}, & \{L_{12}, L'_{12}\} \\ \{L_{11}, L'_{21}\}, & \{L_{11}, L'_{22}\}, & \{L_{12}, L'_{21}\}, & \{L_{12}, L'_{22}\} \\ & \cdots & & \end{pmatrix}$$

$$L = L(x;\lambda), \quad L' = L(y;\mu)$$

を意味する。$r(\lambda,\mu)$ は<u>数値</u>行列で

$$r(\lambda,\mu) = \frac{1}{2}\frac{\lambda^2+\mu^2}{\lambda^2-\mu^2}\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & -1 & & \\ \hline & & -1 & \\ & & & 1 \end{array}\right] + \frac{2\lambda\mu}{\lambda^2-\mu^2}\left[\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & & 1 & \\ \hline & 1 & & \\ & & & \end{array}\right] \qquad (5)$$

で与えられる。次の性質によって，Poisson bracket に対する Jacobi 律が保証される：

$$[r_{12}(\lambda,\mu), r_{13}(\lambda,\nu)] + [r_{12}(\lambda,\mu), r_{23}(\mu,\nu)] + [r_{13}(\lambda,\nu), r_{23}(\mu,\nu)] = 0. \qquad (6)$$

ここに $r_{ij} \in End(V^{\otimes 3})$ $(V=\mathbb{C}^2)$ は，第 i 成分と第 j 成分に r で，残りの成分に id. で働く行列を意味する。

2. 量子逆散乱法

Faddeev - Sklyanin - Takhtajan [FST] は，古典可積分系の量子化に逆散乱法の手法が適用できることを指摘し，量子逆散乱法を開発した。

通常の処方によって $\{,\} \to -\frac{1}{i\hbar}[,]$ とおきかえ，

φ, π を次の正準交換関係をみたす quantum field operators とする。

$$[\pi(x), \varphi(y)] = -i\hbar\,\delta(x-y)$$

発散の除去のために系を離散化して，格子間隔 ε の格子上におく。各 field も smear out して

$$\pi(x) \longrightarrow p_n = \int_{x_n}^{x_n+\varepsilon} \pi(y)\,dy$$

$$v^{\pm}(x) \longrightarrow v_n^{\pm} = \exp\left(\pm \frac{i}{2\varepsilon} \int_{x_n}^{x_n+\varepsilon} \varphi(y)\,dy\right)$$

$$[p_n, v_m^{\pm}] = \pm \frac{\hbar}{2} v_n^{\pm}\,\delta_{nm}$$

でおきかえる。更に L-operator の quantum analog として

$$L_n(\lambda) = e^{ip_nH/2}\Big(I + \frac{i\varepsilon}{4}(\lambda v_n^+ + \lambda^{-1} v_n^-)X^+ + \frac{i\varepsilon}{4}(\lambda v_n^- + \lambda^{-1} v_n^+)X^-\Big)e^{ip_nH/2} \qquad (7)$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad X^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad X^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

ととる。（$\varepsilon \to 0$ では形式的に

$$L_n(\lambda) = 1 + i\varepsilon L(\lambda) + \cdots$$

となるように選んである。）このとき，(4) の類似として次が成立つ。4×4 数値行列 $R(\lambda,\mu)$ があって

$$R(\lambda,\mu)\,L_n(\lambda)\otimes L_n(\mu) = L_n(\mu)\otimes L_n(\lambda)\,R(\lambda,\mu) \quad \mathrm{mod}\ \varepsilon^2. \qquad (9)$$

ここに

$$R(\lambda,\mu)=\left[\begin{array}{cc|cc} xq-x^{-1}q^{-1} & & & \\ & x-x^{-1} & q-q^{-1} & \\ \hline & q-q^{-1} & x-x^{-1} & \\ & & & xq-x^{-1}q^{-1} \end{array}\right]$$

$$=(\mathrm{scalar})\times\left(I+\frac{-i\hbar}{2}r(\lambda,\mu)+\cdots\right) \qquad \hbar\to 0. \tag{10}$$

$$x=\frac{\lambda}{\mu}, \quad q=e^{-i\hbar/2}.$$

(9) の consistency condition として，$R(\lambda,\mu)$ は次の Yang-Baxter 方程式を満たしている。

$$R_{12}(\lambda,\mu)R_{13}(\lambda,\nu)R_{23}(\mu,\nu)=R_{23}(\mu,\nu)R_{13}(\lambda,\nu)R_{12}(\lambda,\mu) \tag{11}$$

ここで $\hbar\to 0$ とすれば (10) により再び (6) が回復される。

基本行列 $\Phi(x;x_0;\lambda)$ の類似は

$$T(\lambda)=L_{n-1}(\lambda)L_{n-2}(\lambda)\cdots L_{n_0}(\lambda) \qquad (n\geqq n_0)$$

である。ここで $n\neq m$ ならば $L_n(\lambda)$ と $L_m(\mu)$ の行列要素はすべて可換であるので

$$T(\lambda)\otimes T(\mu)=\left(L_{n-1}(\lambda)\otimes L_{n-1}(\mu)\right)\cdots\left(L_{n_0}(\lambda)\otimes L_{n_0}(\mu)\right)$$

と変形が許され、従って性質 (9) は non-local な量 $T(\lambda)$ にも遺伝することがわかる：

$$R(\lambda,\mu)T(\lambda)\otimes T(\mu)=T(\mu)\otimes T(\lambda)R(\lambda,\mu) \quad \mathrm{mod}\ \varepsilon^2. \tag{12}$$

Poisson bracket の関係式が (4) から散乱データに遺伝するのもこれと同じ事情による。

Faddeevらは(12)を基礎にして、Hamiltonianの固有状態、励起エネルギー等の計算を実行してみせた。

3. r行列の「量子化」

r行列(5)は(8)の記法では $H\otimes H$ と $X^{\pm}\otimes X^{\mp}$ との一次結合で書かれ, $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ ($\mathfrak{g}=\mathbb{C}H\oplus\mathbb{C}X^{+}\oplus\mathbb{C}X^{-}=sl(2)$) の元になっている。classical Yang-Baxter 方程式(6)は $\mathfrak{g}$ の Lie 環の構造のみを用いて書かれているので, 2×2 行列としての表現には依存しない。これに対し $R(\lambda,\mu)$ の方は, $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes 2})$ ($V=\mathbb{C}^2$) の associative algebra としての構造に依存している。

一般に, Yang-Baxter 方程式の解 $R(\lambda,\mu)$ がパラメーター $\hbar$ を含み, $\hbar\to 0$ で(10)の展開を持つとき, $r(\lambda,\mu)$ を $R(\lambda,\mu)$ の classical limit, $R(\lambda,\mu)$ を $r(\lambda,\mu)$ の「量子化」という。(R自身が field operator というわけではないのでやや曖昧な用語であるが。) Kulish-Reshetikhin [KR] は, $\mathfrak{g}=sl(2)$ の一般の表現に属する $r(\lambda,\mu)$ を「量子化」する問題を考えて $U_q\mathfrak{g}$ に到達した。彼等の議論を(筆者の流儀で書きかえて)以下に紹介する。

いま $H, X^{\pm}$ をある algebra の元とし, 交換関係

$$[H, X^{\pm}] = \pm 2X^{\pm} \qquad (13)$$

のみを仮定する。このとき，(7)に対して基本的交換関係(9)が(mod ε^2で)成立つための条件を書き下してみると、次のようになる。便宜上 $R(\lambda,\mu)$のかわりに

$$\tilde{R}(\lambda,\mu) = \left(\left(\tfrac{\lambda}{\mu}\right)^{H} \otimes 1\right) R(\lambda,\mu) \left(\left(\tfrac{\lambda}{\mu}\right)^{-H} \otimes 1\right)$$

を用いる。ε^0, ε^1からそれぞれ条件は

$$\varepsilon^0: \quad [H\otimes 1 + 1\otimes H, \tilde{R}(\lambda,\mu)] = 0$$

$$\varepsilon^1: \quad \tilde{R}(\lambda,\mu)\Delta(X^{\pm}) = \Delta'(X^{\pm})\tilde{R}(\lambda,\mu)$$

$$\tilde{R}(\lambda,\mu)(\lambda^{\mp 2}X^{\pm}\otimes q^{H/2} + q^{-H/2}\otimes \mu^{\mp 2}X^{\pm})$$
$$= (\lambda^{\mp 2}X^{\pm}\otimes q^{-H/2} + q^{H/2}\otimes \mu^{\mp 2}X^{\pm})\tilde{R}(\lambda,\mu)$$

但し

$$\Delta(X^{\pm}) = X^{\pm}\otimes q^{-H/2} + q^{H/2}\otimes X^{\pm}$$

$$\Delta'(X^{\pm}) = X^{\pm}\otimes q^{H/2} + q^{-H/2}\otimes X^{\pm}.$$

この方程式が $\tilde{R}(\lambda,\mu)$ について consistent に解けるためには $X^{\pm}$の間に更に関係式が必要である。いま $\tilde{R}(\lambda,\mu)[\Delta(X^+),\Delta(X^-)] = [\Delta'(X^+),\Delta'(X^-)]\tilde{R}(\lambda,\mu)$ を計算してみると，左辺・右辺の交換子はそれぞれ $[X^+,X^-]\otimes q^{-H} + q^{H}\otimes[X^+,X^-]$, $[X^+,X^-]\otimes q^{H} + q^{-H}\otimes[X^+,X^-]$ となるので，

$$[X^+, X^-] = \frac{q^H - q^{-H}}{q - q^{-1}} \qquad (14)$$

とおけば矛盾しない。実際(13),(14)のみから $\tilde{R}$ の全ての方程式は consistent になっていることが示される[J2]。

定義（$\mathfrak{g}=sl(2)$）．$q\in\mathbb{C}$，$q\neq 0,\pm 1$ を固定する。次の生成元と関係式で定まる associative algebra $\ni 1$ を $U_q\mathfrak{g}$ とよぶ．

生成元：　$X^{\pm}$，$q^{\pm H/2}$

関係式：　$q^{H/2}q^{-H/2}=q^{-H/2}q^{H/2}=1$

$$q^{H/2}X^{\pm}q^{-H/2}=q^{\pm 1}X^{\pm}$$

$$[X^{+},X^{-}]=\frac{q^{H}-q^{-H}}{q-q^{-1}}.$$

次の operations によって $U_q\mathfrak{g}$ は Hopf 代数となる．

$$\Delta(X^{\pm})=X^{\pm}\otimes q^{-H/2}+q^{H/2}\otimes X^{\pm},\quad \Delta(q^{H/2})=q^{H/2}\otimes q^{H/2},$$

$$S(X^{\pm})=-q^{\mp 1}X^{\pm},\quad S(q^{H/2})=q^{-H/2},$$

$$\varepsilon(X^{\pm})=0,\qquad \varepsilon(q^{H/2})=1.$$

$q\to 1$ の極限でこれらの関係式は Lie 環 $sl(2)$ のそれに移行し，$U_q\mathfrak{g}$ は包絡環 $U\mathfrak{g}$ の deformation とみなせる．より一般に，symmetrizable な generalized Cartan matrix を持つ Kac-Moody Lie 環に対して $U_q\mathfrak{g}$ が定義される [D2],[J1].

4. 量子群 $U_q\mathfrak{g}$ とその表現

今後 $\mathfrak{g}$ は有限型又は affine 型 Kac-Moody Lie 環とする。

Drinfeld は，次の性質をもつ 'universal R matrix' $\mathcal{R}\in U_q\mathfrak{g}\hat{\otimes}U_q\mathfrak{g}$ の存在を示した [D1]：

$$\sigma\circ\Delta(a) = \mathcal{R}\,\Delta(a)\,\mathcal{R}^{-1} \qquad \forall a\in U_q\mathfrak{g}$$
$$(\Delta\otimes id)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} \qquad (15)$$
$$(id\otimes\Delta)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}\ .$$

ここで，σ は transposition： $\sigma(x\otimes y)=y\otimes x$，また $\mathcal{R}=\sum a_i\otimes b_i$ のとき $\mathcal{R}_{12}=\sum a_i\otimes b_i\otimes 1$，$\mathcal{R}_{13}=\sum a_i\otimes 1\otimes b_i$，$\mathcal{R}_{23}=\sum 1\otimes a_i\otimes b_i$，とおく。これらの式から Yang-Baxter equation

$$\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}$$

が従う。たとえば $\mathfrak{g}=sl(2)$ のとき

$$\mathcal{R} = q^{-\frac{1}{2}H\otimes H}\exp_q\{(q^{-1}-q)(q^{-H/2}X^+)\otimes(X^-q^{H/2})\}$$

$$\exp_q a = \sum_{n\geq 0}\frac{a^n}{[n]!}q^{-n(n-1)/2}, \qquad [n]! = \prod_{j=1}^{n}\frac{q^j-q^{-j}}{q-q^{-1}}.$$

(一般の $\mathfrak{g}$ についての $\mathcal{R}$ の表示は知られていない。)

いま $\rho: U_q\mathfrak{g}\to End_{\mathbb{C}}(V)$ を(環としての)有限次元表現とし，$R(\lambda,\mu)=(\rho\otimes\rho)(T_\lambda\otimes T_\mu)(\mathcal{R})$ とおけば，R は (11) の形の Yang-Baxter 方程式の行列解になる。ここに T_λ は，$T_\lambda X_i^{\pm}=\lambda^{\pm 1}X_i^{\pm}$ で定義される $U_q\mathfrak{g}$ の自己同型*)。前節の Sine-Gordon 模型に現われた R 行列は，$\mathfrak{g}=A_1^{(1)}$，$V=\mathbb{C}^2$ の場合になっている。

非例外型 affine Lie 環の 'vector 表現' に対応する場合，R 行列の具体形は [B]，[J2] を参照。

*) $X_i^{\pm}$ は $U\mathfrak{g}$ の Chevalley 生成元に相当する $U_q\mathfrak{g}$ の generators.

qの値が一般であれば，$U_q\mathfrak{g}$の表現論は$q=1$の場合と変わらないことがわかる。Lusztig [L1]（q不定元），Rosso [Ro]（$q\neq 1$の巾根）によれば，$\dim\mathfrak{g}<\infty$として，$\mathfrak{g}$の有限次元既約表現は全て$U_q\mathfrak{g}$にdeformでき，かつweightの重複度（従って指標公式）は$q=1$の時と同一である。

qが1の巾根になると，状況は有限群のmodular表現に類似してくる。Lusztig [L2]は$U_q\mathfrak{g}$を少しmodifyして，highest weight theoryを展開している。

$\mathfrak{g}$がADE型のaffine Lie環のとき，level 1の表現のvertex operatorによる構成があるが，Frenkel-Jing [FJ]はこれを$U_q\mathfrak{g}$に対し拡張した。

$\mathfrak{g}=sl(n)$，$\rho: U_q\mathfrak{g}\to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ $(V=\mathbb{C}^n)$をそのvector表現（のq-version）とする。このときuniversal $\mathcal{R}$ matrixの像は次のように与えられる：

$$\sigma\cdot(\rho\otimes\rho)(\mathcal{R})=(\text{scalar})\times T$$

$$T = q\sum E_{ii}\otimes E_{ii}+\sum_{i\neq j}E_{ij}\otimes E_{ji}+(q-q^{-1})\sum_{i<j}E_{ii}\otimes E_{jj}$$

ただし$\sigma\in\mathrm{End}(V^{\otimes 2})$，$\sigma(x\otimes y)=y\otimes x$，$E_{ij}$はmatrix unit。いま$V^{\otimes N}$ $(N\geqslant 2)$を考え，

$$T_i = 1\otimes\cdots\otimes \overset{i,i+1}{T}\otimes\cdots\otimes 1 \qquad i=1,\cdots,N-1$$

とおく。$\mathcal{R}$の性質(15)より，T_iたちは$U_q\mathfrak{g}$のmulti-diagonal action と可換であり，更に次をみたす：

$$(T_i - q)(T_i + q^{-1}) = 0$$

$$T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}$$

$$T_i T_j = T_j T_i \qquad |i-j| > 1.$$

これらの式は，T_i によって A 型の岩堀 Hecke 環 $H_N(q)$ の表現 $\pi : H_N(q) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes N})$ が存在することを示す。q が一般ならば，この action と $U_q\mathfrak{g}$ のそれはたがいに他を centralize している [J3]：

$$\mathrm{End}_{\Delta^{(N)}(U_q\mathfrak{g})}(V^{\otimes N}) = \pi(H_N(q))$$

$$\mathrm{End}_{\pi(H_N(q))}(V^{\otimes N}) = \Delta^{(N)}(U_q\mathfrak{g})$$

$\Delta^{(N)}$ は comultiplication の(N-1) fold iteration. $H_N(q)$ は対称群の群環 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_N$ の q-version であり，上の事実は Weyl の相互律の q-version に他ならない。

$\mathfrak{g}$ が $o(N)$, $sp(N)$ の場合にも同様の事実が成立つ。Hecke 環にあたるのは Birmann-Wenzl-村上 algebra [BW], [M] になる。これらのことは link 不変量の構成に応用をもっている。

文献

[D1] V.G. Drinfeld, Quantum groups, Proc. ICM, Berkeley, 1986.

[D2] ——, Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation, Soviet Math. Dokl. 32 (1985) 254-258.

[W] S. Woronowicz, Twisted SU(2) group. An example of a non-commutative differential calculus, Publ. RIMS 23 (1987) 117-181; Compact matrix pseudogroups, Commun. Math. Phys. 111 (1987) 613-665.

[J1] M. Jimbo, A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation, Lett. Math. Phys. 10 (1985) 63-69.

[J2] ——, Quantum R matrix for the generalized Toda system, Commun. Math. Phys. 102 (1986) 537-547.

[J3] ——, A q-analogue of $U(\mathfrak{gl}(N+1))$, Hecke algebra and the Yang-Baxter equation, Lett. Math. Phys. 11 (1986) 247-252.

[FST] L.D. Faddeev, E.K. Sklyanin and L.A. Takhtajan, The quantum inverse problem I, Theoret. Math. Phys. 40 (1979) 194-220.

[KR] P.P. Kulish and N.Yu. Reshetikhin, The quantum linear problem ~~for~~ the sine-Gordon equation and higher representations, Zapiski nauch. semin. LOMI 101 (1980) 112; J. Soviet Math. 23 (1983) 2435.

[B] V. V. Bazhanov, Trigonometric solutions of triangle equations and classical Lie algebras, Phys. Lett. 159B (1985) 321-324.

[L1] G. Lusztig, Quantum deformation of certain simple modules over enveloping algebras, Adv. Math. 70 (1988) 237-249.

[L2] ——, Modular representations and quantum groups, preprint 1988.

[Ro] M. Rosso, Finite dimensional representations of the quantum analog of the enveloping algebra of a complex simple Lie algebra, Commun. Math. Phys. 117 (1988) 581-593.

[FJ] I. B. Frenkel and N. Jing, Vertex representations of quantum affine algebras, preprint 1988.

[BW] J. Birman and H. Wenzl, Link polynomials and a new algebra, preprint 1986.

[M] J. Murakami, The Kauffman polynomial of links and representation theory, Osaka J. Math. 24 (1987) 745-758.