数理解析研究所講究録
第693巻 1989年 181-198

量子球面 と big q-Jacobi 多項式

上智大・理工　野海 正俊 (Masatoshi NOUMI)
名大・理　三町 勝久 (Katsuhisa MIMACHI)

量子群（quantum group）とその表現論の枠組みによって、直交多項式系の q-analogue に幾何学的意味付けを与えることができる。その最初の例として、量子群 $SU_q(2)$ の球函数が little q-Jacobi 多項式を用いて表され、表現論からの帰結として little q-Jacobi 多項式の直交関係や種々の函数等式が導かれることが知られている（[K,M0,M1,V 等]）。この論説では、$SU_q(2)$ の作用するある新しい量子空間を考察し、Big q-Jacobi 多項式および q-Hahn 多項式がその量子空間の函数環の直交基底として捉えられることを示す。この量子空間は3次元量子球面の変形の全空間と見なせるものである。簡単のため、以下 q は実のパラメータで $0<|q|<1$ を満たすものとする。

§1. Jacobi 多項式の q-analogue と Jackson 積分

実区間 [0,1] の重み $x^\alpha(1-x)^\beta$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{N})$ に関する直交多項式系は Jacobi 多項式とよばれ、Gauss の超幾何級数を用いて表されることはよく知られている。明らかなことだが、任意の区間 [a,b] における重み $(x-a)^\alpha(b-x)^\beta$ に関する直交多項式系は、その Jacobi 多項式の1次変換による座標変換で得られることに注意しておこう。

この種の直交多項式系の q-analogue は、W. Hahn ([H,1949]) によって発見され、G.E. Andrews, R. Askey ([AA,1977]) によって詳

要な役割を果たす。区間 [0,c] での Jackson 積分は q べきの分点についての Riemann 和

$$\int_0^c f(x)d_qx = c(1-q)\sum_{k=0}^{\infty} f(cq^k)q^k \tag{1.1}$$

として定義される。一般の区間 [a,b] での Jackson 積分は x=0 を経由して

$$\int_a^b f(x)d_qx = \int_0^b f(x)d_qx - \int_0^a f(x)d_qx \tag{1.2}$$

で定義する。x=0 が分点の集積する場所なので、[0,c] 型の区間と一般の [a,b] 型の区間とでは、異なった様相を呈することが容易に想像されよう。

区間 [0,1] での Jackson 積分に関して、重み

$$x^{\alpha}(qx;q)_{\beta} \qquad (\alpha,\beta\in\mathbb{N}) \tag{1.3}$$

で得られる直交多項式系は <u>little q-Jacobi 多項式</u>と呼ばれている。ここで、階乗函数の q-analogue

$$(a;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k) \qquad (n\in\mathbb{N}) \tag{1.4}$$

の記号を用いた。この little q-Jacobi 多項式 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x;q)$ $(n\in\mathbb{N})$ は Heine の超幾何級数を用いて

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x;q) = {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} q^{-n},\ q^{\alpha+\beta+n+1} \\ q^{\alpha+1} \end{matrix} ; q\ ,\ qx\right) \tag{1.5}$$

と表され、$q\to1$ では通常の Jacobi 多項式に戻る。<u>Heine の超幾何級数</u>（または q-超幾何級数）${}_m\varphi_{m-1}$ とは

$${}_m\varphi_{m-1}\left(\begin{matrix} a_1,\dots,a_m \\ b_1,\dots,b_{m-1} \end{matrix};q,x\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1;q)_k\ \dots\ (a_m;q)_k}{(b_1;q)_k\dots(b_{m-1};q)_k(q;q)_k}x^k \tag{1.6}$$

で定義される対象で、超幾何級数 ${}_mF_{m-1}$ の q-analogue である。

これに対し、表題の big q-Jacobi 多項式は区間 [-d,c] での、重み

$$(1.7)\qquad (\frac{qx}{c};q)_\alpha(-\frac{qx}{d};q)_\beta \qquad (\alpha,\beta\in\mathbb{N})$$

に関する直交多項式系である。この big q-Jacobi 多項式は q-超幾何級数 ${}_3\varphi_2$ によって

$$(1.8)\qquad P_n^{(\alpha,\beta)}(x;c,d;q) = {}_3\varphi_2\left[\begin{matrix} q^{-n}, q^{\alpha+\beta+n+1}, q^{\alpha+1}x/c \\ q^{\alpha+1}, -q^{\alpha+1}d/c \end{matrix} ;q,q\right]$$

と表される。パラメータを $(c,d)\to(1,0)$ と特殊化すると

$$(1.9)\qquad P_n^{(\alpha,\beta)}(x;1,0;q) = \mathrm{Const.}\ P_n^{(\beta,\alpha)}(x;q)$$

の形で little q-Jacobi 多項式が回復されるが、big q-Jacobi 多項式は little q-Jacobi 多項式から座標変換で得られる類のものではなく、複雑さの度合いはかなり増大する。

この論説では、上で述べた big q-Jacobi 多項式がある量子空間の函数環の直交基底として自然に登場することを報告する。我々の考察する量子空間は、ある意味で $SU_q(2)$ 自身の変形として得られる3次元量子球面の族の全空間と見なすことができる。

P. Podles [P] は、量子群 $SU_q(2)$ の商空間として得られる2次元量子球面の量子等質空間としての変形を考察している。我々の議論の系として Podles の quantum sphere の函数環の直交分解が $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x;c,d;q)$ の形の big q-Jacobi 多項式によって実現されることもわかる。

§2. 3次元量子球面としての $SU_q(2)$

量子群 $SU_q(2)$ の定義、記号等ついては [M0,M1] に従うことにする。以下 $G=SU_q(2)$ とし、その函数環を $\mathcal{A}=A(G)=A(SU_q(2))$ で表そう。$\mathcal{A}$ は *-Hopf 代数であるが、以下の議論に必要な範囲で $\mathcal{A}$ の構造について復習しておく。$\mathcal{A}$ は、4個の生成元 x,u,v,y と基本関係

$$(2.1)\qquad \begin{cases} qxu = ux,\ qxv = vx,\ quy = yu,\ qvy = qyv \\ uv = vu,\ xy - q^{-1}uv = yx - quv = 1 \end{cases}$$

で定義される $\mathbb{C}$-代数であり、*-operation は

$$(2.2)\qquad x^* = y,\ u^* = -q^{-1}v,\ v^* = -qu,\ y^* = x$$

で定まるものである。ここで x,u,v,y はそれぞれ、2×2 行列の (1,1),(1,2),(2,1),(2,2) 成分の座標に対応する。象徴的に書けば

$$(2.3)\qquad \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} \text{"}\in\text{"}\ SU_q(2)$$

であって、これに対応して $\mathcal{A}$ の coproduct は条件

$$(2.4)\qquad \Delta\begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix}$$

で特徴付けられる ($\Delta(x)=x\otimes x+u\otimes v$ etc の略記法)。単に x,u,v,y から生成される $\mathbb{C}$-代数という意味で $\mathcal{A}=\mathbb{C}[x,u,v,y]$ と書くことにするが、この記号で可換な多項式環の意味で用いている訳ではないので注意されたい。

いま $SU_q(2)$ の実の座標 ξ_0,ξ_1,ξ_2,ξ_3 を

$$(2.5)\qquad \xi_0 = \frac{1}{2}(x+x^*),\ \xi_1 = \frac{1}{2i}(x-x^*),\ \xi_2 = \frac{1}{2}(u+u^*),\ \xi_3 = \frac{1}{2i}(u-u^*)$$

で定義しよう。互いに可換ではないが、(2.1) からこれらの座標が代数関係

$$(2.6)\qquad \xi_0^2 + \xi_1^2 + \frac{1}{2}(1+q^2)(\xi_2^2 + \xi_3^2) = 1$$

を満たすことがわかる。この意味で $SU_q(2)$ は量子空間としては3次元量子球面を表していると思える。(コホモロジー論的にも S^3 と同じように振る舞うことが、量子群の発見者の一人である S.L. Woronowicz により示されている。)

さて、この3次元量子球面を $SU_q(2)$ 上の量子等質空間として変形することを考えよう。$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ を複素パラメータで $\overline{\alpha}=\delta$, $\overline{\beta}=-q^{-1}\gamma$ を満たすものとし、$\mathcal{A}=\mathbb{C}[x,u,v,y]$ の元 X,U,V,Y を生成元の1次変換

$$(2.7)\qquad \begin{pmatrix} X & U \\ V & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

で定義する。$\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ ならば X,U,V,Y は、$\mathbb{C}$-代数としての $\mathcal{A}$ の新しい生成系を与える。この生成系について coproduct は

$$(2.8)\qquad \Delta\begin{pmatrix} X & U \\ V & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} X & U \\ V & Y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} X & U \\ V & Y \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

という表示をもち、右からの作用が"自己同型でねじられた"ような形になる。この操作は、q=1 では、$GL(2;\mathbb{C})$ の実の部分多様体 $SU(2)\times\mathbb{R}_{>0}$ を考えることに対応しており、その上の点 $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ の $SU(2)$-軌道の自然な座標が上の X,U,V,Y なのである。

$SU_q(2)$ の "Peter-Weyl 基底" を上のような変形に沿って変形したいというのが以下の話の動機である。ところが、この形でみると $\mathbb{C}$-代数 $\mathcal{A}$ の元としての X,U,V,Y の交換関係が複雑であり、議論が煩雑極まりないものになってしまう。そこで我々は、変形のパラメータまで取り込んだ形で新しい $\mathbb{C}$-代数 $\tilde{\mathcal{A}}$ を導入し(天下りではあるが)、なおかつそこから上のような $\mathcal{A}$ における生成系の取り替えの問題を見直せるように議論を展開する。

§3. 3次元量子球面の変形の構成

$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ を不定元として、可換な4変数多項式環 $\mathcal{C}=\mathbb{C}[\alpha,\beta,\gamma,\delta]$ を考える（$\mathcal{C}=A(\mathrm{Mat}(2;\mathbb{C}))$）。この可換代数には

$$(3.1)\qquad \alpha^*=\delta,\ \beta^*=-q^{-1}\gamma,\ \gamma^*=-q\beta,\ \delta^*=\alpha$$

で $*$-構造を与えておく。$\mathcal{C}$ の $\mathbb{C}$-代数としての自己同型 $\lambda:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ を

$$(3.2)\qquad \lambda\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & q\beta\\ q\gamma & \delta\end{pmatrix}$$

で定義し、この作用素 λ を $\mathcal{C}$ に添加して非可換な Laurent 多項式環 $\mathcal{C}[\lambda,\lambda^{-1}]$ を作る。つまり、$\mathcal{C}$ の元を左からの掛け算作用素と見なして、$\mathcal{C}$ と λ,λ^{-1} から生成される $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C})$ の部分代数を考える訳である。これは $\mathbb{C}$ 上の線型空間としては $\mathcal{C}[\lambda,\lambda^{-1}]=\mathcal{C}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[\lambda,\lambda^{-1}]$ であって $\mathcal{C}$ の元と λ の交換関係を

$$(3.3)\qquad \lambda.a.\lambda^{-1}=\lambda(a)\qquad (a\in\mathcal{C})$$

で定めたものにほかならない。$\lambda^*=\lambda^{-1}$ として、$\mathcal{C}[\lambda,\lambda^{-1}]$ には自然な $*$-代数の構造が入る。

そこで、$SU_q(2)$ の函数環 $\mathcal{A}=A(SU_q(2))$ を係数拡大して

$$(3.4)\qquad \mathcal{A}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{C}[\lambda,\lambda^{-1}]$$

を考える。代数としての構造は、$\mathcal{A}$ の元と $\mathcal{C}[\lambda,\lambda^{-1}]$ の元が互いに可換になるものとし、$*$-構造は、テンソル積の成分毎の $*$ で定める。（上と同様の意味で、この $\mathbb{C}$-代数は $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{C})$ の部分代数と見なせる。）このとき、元々の $SU_q(2)$ の函数環としての $\mathcal{A}$ の構造から、係数拡大により $\mathcal{A}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{C}[\lambda,\lambda^{-1}]$ の幾つかの operation が得られる：

(3.5) [coproduct]　$\Delta\otimes\mathrm{id} : \mathcal{A}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{C}[\lambda,\lambda^{-1}] \longrightarrow \mathcal{A}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{A}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{C}[\lambda,\lambda^{-1}]$,

(3.6) [counit]　$\varepsilon\otimes\mathrm{id} : \mathcal{A}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{C}[\lambda,\lambda^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}[\lambda,\lambda^{-1}]$,

(3.7) [Haar 測度]　$h\otimes\mathrm{id} : \mathcal{A}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{C}[\lambda,\lambda^{-1}] \longrightarrow \mathcal{C}[\lambda,\lambda^{-1}]$.

いずれも $\mathcal{C}[\lambda,\lambda^{-1}]$-線型な写像であり、$\Delta\otimes\mathrm{id}$, $\varepsilon\otimes\mathrm{id}$ は環の準同型である。以下では、記号の節約のため $\mathcal{A}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{C}[\lambda,\lambda^{-1}]$ の元を表すときはしばしば $\otimes$ 記号を省略する。これに伴って、上の３つの線型写像も単に Δ, ε, h と書き表す。

この $\mathbb{C}$-代数 $\mathcal{A}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{C}[\lambda,\lambda^{-1}]$ の部分代数として、３次元量子球面の変形をあらわす $\mathbb{C}$-代数 $\tilde{\mathcal{A}}$ を定義しよう。いま $\mathcal{A}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{C}[\lambda,\lambda^{-1}]$ の元 $\tilde{x},\tilde{u},\tilde{v},\tilde{y}$ を次のように定める：

$$(3.8)\qquad \begin{pmatrix} \tilde{x} & \tilde{u} \\ \tilde{v} & \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X\lambda^{-1} & \lambda U \\ V\lambda^{-1} & \lambda Y \end{pmatrix}.$$

但し、X,U,V,Y は (2.7) によってきまる $\mathcal{A}\otimes\mathcal{C} \subset \mathcal{A}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{C}[\lambda,\lambda^{-1}]$ の元を表す。そこで (3.8) の４個の元 $\tilde{x},\tilde{u},\tilde{v},\tilde{y}$ から生成される $\mathcal{A}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{C}[\lambda,\lambda^{-1}]$ の部分 $\mathbb{C}$-代数を $\tilde{\mathcal{A}}=\mathbb{C}[\tilde{x},\tilde{u},\tilde{v},\tilde{y}]$ と定義する。

<u>定理 1</u>. (1) $c=\alpha\delta$, $d=-q\beta\gamma \in \mathcal{C}$ とおくと、$c,d \in \tilde{\mathcal{A}}$ である。$\tilde{x},\tilde{u},\tilde{v},\tilde{y}$ および c,d の交換関係は次で与えられる：

$$(3.9)\qquad \left\{\begin{array}{l} \tilde{u}\tilde{x} = q\tilde{x}\tilde{u},\quad \tilde{v}\tilde{x} = q\tilde{x}\tilde{v}\quad \tilde{y}\tilde{u} = q\tilde{u}\tilde{y},\quad \tilde{y}\tilde{v} = q\tilde{v}\tilde{y}, \\ \tilde{v}\tilde{u} - \tilde{u}\tilde{v} = (q-q^{-1})d,\quad \tilde{x}\tilde{y} - q^{-1}\tilde{u}\tilde{v} = \tilde{y}\tilde{x} - q\tilde{v}\tilde{u} = c+d, \\ d\tilde{x} = q^2\tilde{x}d,\quad d\tilde{v} = q^2\tilde{v}d,\quad \tilde{u}d = q^2 d\tilde{u},\quad \tilde{y}d = q^2 d\tilde{y}. \end{array}\right.$$

更に、c は $\tilde{\mathcal{A}}$ の中心に属す。

(2) $\tilde{\mathcal{A}}$ は $\mathcal{A}\otimes\mathcal{C}[\lambda,\lambda^{-1}]$ の *-部分代数であり、その *-構造は次で与えられる：

$$(3.10)\qquad \tilde{x}^* = \tilde{y},\ \tilde{u}^* = -q^{-1}\tilde{v},\ \tilde{v}^* = -q\tilde{u},\ \tilde{y}^* = \tilde{x},\ c^* = c,\ d^* = d.$$

(3) coproduct (3.5) は $\mathbb{C}$-代数の準同型 $\Delta: \tilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{A}\otimes\tilde{\mathcal{A}}$ を誘導し、これにより $\tilde{\mathcal{A}}$ は左 $\mathcal{A}$-comodule となる。その coaction は次で与えられる：

$$(3.11)\qquad \Delta\begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{u} \\ \tilde{v} & \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & u \\ v & y \end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{u} \\ \tilde{v} & \tilde{y} \end{bmatrix},\quad \Delta(c)=1\otimes c,\quad \Delta(d)=1\otimes d.$$

(4) counit (3.6) は $\mathbb{C}$-代数の準同型 $\varepsilon: \tilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbb{C}[\lambda,\lambda^{-1}]$ を誘導する：

$$(3.12)\qquad \varepsilon\begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{u} \\ \tilde{v} & \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\lambda^{-1} & \lambda\beta \\ \gamma\lambda^{-1} & \lambda\delta \end{bmatrix},\quad \varepsilon(c)=\alpha\delta,\quad \varepsilon(d)=-q\beta\gamma.$$

抽象的に $\mathbb{C}$-代数 $\tilde{\mathcal{A}}$ を定義するのであれば、6 個の元 $\tilde{x},\tilde{u},\tilde{v},\tilde{y},c,d$ から生成され、基本関係 (3.9) で定まるものをとればよい。この 6 個の生成元のうち c,d の 2 つはパラメータとみて、この交換関係を $SU_q(2)$ の函数環 $\mathcal{A}$ の交換関係 (2.1) と比較して欲しい。$(c,d)=(1,0)$ と特殊化すれば、確かに $\tilde{\mathcal{A}}$ の基本関係が $\mathcal{A}$ のそれに落ちることが確認できる。

$\tilde{\mathcal{A}}$ を量子空間の函数環と考えて、$\tilde{\mathcal{A}}$ の定める量子空間を M と書こう：$\tilde{\mathcal{A}}=A(M)$. また、パラメータ空間の函数環を $\mathcal{R}=\mathbb{C}[c,d]$ とおく。$\mathcal{R}$ 自身は可換な 2 変数多項式環なので $\mathcal{R}=A(\mathbb{R}^2)$ と考えよい。このとき、包含写像 $\mathcal{R} \to \tilde{\mathcal{A}}$ は量子空間の射 $f: M \to \mathbb{R}^2$ と対応する訳である。この意味で $\tilde{\mathcal{A}}$ は $SU_q(2)$ つまり 3 次元量子球面の変形（量子的変形）を記述している。しかし、$\mathcal{R}$ が $\tilde{\mathcal{A}}$ の中心に含まれる訳ではないので、必ずしも <u>(c,d)-空間 $\mathbb{R}^2$ の任意に点に対してその上のファイバーが意味をもつ訳ではない</u>——ということに注意を喚起しておこう。*-構造を忘れて代数構造のみに注目していえば、$d=0$ とすれば $\tilde{\mathcal{A}}$ の特殊化として $Mat_q(2;\mathbb{C})$ の函数環が得られ、更に c（量子行列式）を任意の定数に特殊化することも可能である。しかし、$\tilde{\mathcal{A}}$ の中心に属さない d を 0 以外の定数に特殊化することは考えにくい。

念のため (2.6) に対応する3次元量子球面の方程式を書いておこう。

$$(3.13)\quad \xi_0 = \frac{1}{2}(\tilde{x}+\tilde{x}^*),\ \xi_1 = \frac{1}{2i}(\tilde{x}-\tilde{x}^*),\ \xi_2 = \frac{1}{2}(\tilde{u}+\tilde{u}^*), \xi_3 = \frac{1}{2i}(\tilde{u}-\tilde{u}^*)$$

と定義すれば、これらは c,d とともに $\tilde{\mathcal{A}}$ の実の生成系を与える($\xi_k^* = \xi_k$)。(3.9) は次の方程式を含んでいることが容易にわかる:

$$(3.14)\quad \xi_0^2 + \xi_1^2 + \frac{1}{2}(1+q^2)(\xi_2^2 + \xi_3^2) = c + \frac{(q+q^{-1})^2}{4} d.$$

重要なのは、定理1の (3) で見たように、$\tilde{\mathcal{A}}$ が左 $\mathcal{A}$-comodule の構造 $\Delta: \tilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{A}\otimes_{\mathbb{C}}\tilde{\mathcal{A}}$ をもち、しかもこの Δ が $\mathbb{C}$-代数の準同型となっていることである。これは $\tilde{\mathcal{A}}$ が $G=SU_q(2)$ に関する G-空間の函数環となっていることを意味する。しかもパラメータ c,d は G-不変だから、これが $SU_q(2)$ 自身の G-空間としての変形を表していることになる。

§4. 球函数の変形 $\varphi_{i,j}^{(\ell)}$

ここで、$SU_q(2)$ の函数環 $\mathcal{A}=\mathbb{C}[x,u,v,y]$ に対する Peter-Weyl の定理について少し復習しておこう。

$SU_q(2)$ の有限次元表現は、すべて完全可約かつユニタリ化可能であり、既約表現は spin $\ell\in\frac{1}{2}\mathbb{N}$ でパラメトライズされる ($\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$)。各 $\ell\in\frac{1}{2}\mathbb{N}$ に対する spin ℓ の既約表現は正則表現 $\mathcal{A}=A(SU_q(2))$ の部分表現として次のように実現される。$I_\ell=\{-\ell,-\ell+1, ...,\ell\}$ とおき、右 $\mathcal{A}$-comodule $V_\ell^R \subset \mathcal{A}$ を

$$(4.1)\quad V_\ell^R = \bigoplus_{j\in I_\ell} \mathbb{C}\eta_j^{(\ell)}\ ;\quad \eta_j^{(\ell)} = \begin{bmatrix} 2\ell \\ \ell+j \end{bmatrix}_{q^2}^{1/2} x^{\ell-j}u^{\ell+j}\quad (j\in I_\ell)$$

で定めると、これで既約な $2\ell+1$ 次元表現となる。ここで Gauss の2項係数の記号

$$(4.2) \qquad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}}$$

を用いた。この表現の行列要素を $w^{(\ell)}_{i.j}$ で表す $(i,j\in I_\ell)$ ：即ち

$$(4.3) \qquad \Delta(\eta^{(\ell)}_j) = \Sigma_{i\in I_\ell} \eta^{(\ell)}_i \otimes w^{(\ell)}_{i,j} \quad (j\in I_\ell)$$

で $w^{(\ell)}_{i,j}\in\mathcal{A}$ を定める。$(2\ell+1)\times(2\ell+1)$ の行列 $W^{(\ell)}$ を

$$(4.4) \qquad W^{(\ell)} = (w^{(\ell)}_{i,j})_{i,j\in I_\ell} \in \mathrm{Mat}(I_\ell;\mathcal{A})$$

と定義すれば、これが V^R_ℓ の表現行列である。

各 $\ell\in\frac{1}{2}\mathbb{N}$ に対し、$w^{(\ell)}_{i,j}$ $(i,j\in I_\ell)$ の張る $\mathcal{A}$ の $\mathbb{C}$-部分空間を W_ℓ と書けば $\mathcal{A}$ の両側 $\mathcal{A}$-comodule としての直和分解

$$(4.5) \qquad \mathcal{A} = \bigoplus_{\ell\in\frac{1}{2}\mathbb{N}} W_\ell, \quad W_\ell = \bigoplus_{i,j\in I_\ell} \mathbb{C}\, w^{(\ell)}_{i,j}$$

が得られる。しかも、全ての有限次元既約表現の行列要素 $w^{(\ell)}_{i,j}$ $(i,j\in I_\ell,\ \ell\in\frac{1}{2}\mathbb{N})$ を併せると、Haar 測度から定義される内積について $\mathcal{A}$ の直交基底が得られる —— というのが Peter-Weyl の定理の内容であった。（詳細は [M1] を参照のこと。）この $\mathcal{A}$ の直交基底 $w^{(\ell)}_{i,j}$ $(i,j\in I_\ell,\ \ell\in\frac{1}{2}\mathbb{N})$ を Peter-Weyl 基底と呼ぶことにしよう。

この $w^{(\ell)}_{i,j}$ が変数 $\zeta=uu^*=-q^{-1}uv$ についての little q-Jacobi 多項式で表されることが、[M0,M1] の主要な結果であった。$\mathcal{A}=A(SU_q(2))$ の Haar 測度 $h:\mathcal{A}\longrightarrow\mathbb{C}$ は、部分環 $\mathbb{C}[\zeta]$ の上では次の Jackson 積分で表される： 任意の $F=F(\zeta)\in\mathbb{C}[\zeta]$ に対し、

$$(4.6) \qquad h(F) = \int_0^1 F(\zeta)\, d_{q^2}\zeta .$$

このことが、$SU_q(2)$ の既約表現の行列要素が little q-Jacobi 多項式

で表されることの根拠である。これにより、行列要素の直交性から little q-Jacobi 多項式の直交関係式が従う訳である。

さて、前節で導入した $\mathbb{C}$-代数 $\tilde{\mathcal{A}}$ において、Peter-Weyl 基底 $w_{i,j}^{(\ell)}$ の変形を構成しよう。(4.1) に習って、$\tilde{\mathcal{A}}$ の元 $\tilde{\eta}_j^{(\ell)}$ $(j\in I_\ell, \ell\in\frac{1}{2}\mathbb{N})$ を

$$(4.7) \qquad \tilde{\eta}_j^{(\ell)} = \begin{bmatrix} 2\ell \\ \ell+j \end{bmatrix}_{q^2}^{1/2} \tilde{x}^{\ell-j}\tilde{u}^{\ell+j} \quad (j\in I_\ell)$$

と定義する。このとき、$\tilde{\mathcal{A}}$ の 左 $\mathcal{A}$-comodule の構造 Δ: $\tilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{A}\otimes_{\mathbb{C}}\tilde{\mathcal{A}}$ について

$$(4.8) \qquad \Delta(\tilde{\eta}_j^{(\ell)}) = \Sigma_{i\in I_\ell}\, \eta_i^{(\ell)}\otimes \varphi_{i,j}^{(\ell)} \quad (j\in I_\ell)$$

を満たす $\varphi_{i,j}^{(\ell)}\in\tilde{\mathcal{A}}$ $(i,j\in I_\ell)$ が一意に定まる。行列の形で見るときは

$$(4.9) \qquad \Phi^{(\ell)} = (\varphi_{i,j}^{(\ell)})_{i,j\in I_\ell} \in \mathrm{Mat}(I_\ell;\tilde{\mathcal{A}})$$

と書くことにする。

$\Phi^{(\ell)}$ 自身は comodule の表現行列となっている訳ではないが、$(c,d)=(1,0)$ と特殊化すれば、$W^{(\ell)}$ に一致する対象であり、いろいろな意味で $W^{(\ell)}$ に近い性質を保っていることがわかる。例えば、$\tilde{\mathcal{A}}$ の左 $\mathcal{A}$-comodule の構造に関して、等式

$$(4.10) \qquad \Delta(\varphi_{i,j}^{(\ell)}) = \Sigma_{k\in I_\ell}\, w_{i,k}^{(\ell)} \otimes \varphi_{k,j}^{(\ell)}$$

が成立する。これは、各 $j\in I_\ell$ について $\tilde{\mathcal{A}}$ の $\mathbb{C}$-部分空間

$$(4.11) \qquad \tilde{V}_{\ell;j}^{L} = \oplus_{i\in I_\ell} \mathbb{C}\, \varphi_{i,j}^{(\ell)}$$

が $(2\ell+1)$ 次元の既約な左 $\mathcal{A}$-comodule となることを意味する。

<u>定理 2</u>. $\tilde{\mathcal{A}}$ は左 $\mathcal{A}$-comodule として次の直和分解をもつ：

$$(4.12) \qquad \tilde{\mathcal{A}} = \oplus_{\ell\in\frac{1}{2}\mathbb{N}} \oplus_{j\in I_\ell} \tilde{V}^{L}_{\ell;j}\otimes\mathcal{R}.$$

特に、$\varphi^{(\ell)}_{i,j}$ $(i,j\in I_\ell,\ \ell\in\frac{1}{2}\mathbb{N})$ は $\tilde{\mathcal{A}}$ の自由 $\mathcal{R}$-基底を与える。

さて (3.7) で定めた Haar 測度 $h(=h\otimes id)$ の制限として得られる $\tilde{\mathcal{A}}$ 上の $\mathbb{C}[\lambda,\lambda^{-1}]$ 値の汎函数 $h : \tilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbb{C}[\lambda,\lambda^{-1}]$ は、$\mathcal{A}=A(SU_q(2))$ の左 coaction に関して不変なものになっている。これを用いて、$\tilde{\mathcal{A}}$ に $\mathbb{C}[\lambda,\lambda^{-1}]$ 値の２つの hermite 内積 $\langle\ ,\ \rangle_L$, $\langle\ ,\ \rangle_R$ を次のように定める： $a,b\in\tilde{\mathcal{A}}$ に対し

$$(4.13) \qquad \langle a,\ b\rangle_L = h(a^*b), \quad \langle a,\ b\rangle_R = h(ab^*).$$

このとき

<u>定理 3</u>. $\tilde{\mathcal{A}}$ の 左 $\mathcal{A}$-comodule としての分解 (4.11) は、$\langle\ ,\ \rangle_L$ および $\langle\ ,\ \rangle_R$ に関する直交分解を与える。さらに $\tilde{\mathcal{A}}$ の $\mathcal{R}$-基底 $\varphi^{(\ell)}_{i,j}$ $(\ell\in\frac{1}{2}\mathbb{N},\ i,j\in I_\ell)$ は、$\langle\ ,\ \rangle_L$, $\langle\ ,\ \rangle_R$ のいずれについても直交する。

[M1] の結果を用いると、行列 $\Phi^{(\ell)}= (\varphi^{(\ell)}_{i,j})_{i,j\in I_\ell}$ の unitarity に関して、積 $\Phi^{(\ell)*}\ \Phi^{(\ell)}$ が対角行列になることがわかる（ある意味で unitarizable ともいえる）。さらに、その対角行列の (i,i) 成分は

$$(4.14) \qquad \Pi_{-\ell-i\le k\le\ell-i,\,k\neq0}\ (c + q^{2k}d)$$

と計算される。これを用いると行列要素 $w^{(\ell)}_{i,j}$ の変形 $\varphi^{(\ell)}_{i,j}$ についても、左内積 $\langle\ ,\ \rangle_L$ に関する長さを具体的に決定することができ、答えは

$$(4.15)\quad \langle \varphi^{(\ell)}_{i,j},\ \varphi^{(\ell)}_{i,j}\rangle_L = q^{2(\ell+i)}\ \frac{1-q^2}{1-q^{2(2\ell+1)}} \times \Pi_{-\ell-i\le k\le \ell-i,k\neq 0}\ (c+q^{2k}d)$$

となる。

§5. $\varphi^{(\ell)}_{i,j}$ の q-超幾何級数による表示

$\mathcal{A}=A(SU_q(2))$ の既約表現の行列要素（球函数） $w^{(\ell)}_{i,j}$ は変数 $\zeta=uu^*=-q^{-1}uv$ の little q-Jacobi 多項式として表示された。その変形である $\varphi^{(\ell)}_{i,j}$ もまた q-超幾何級数による表示をもつが、そのときの変数は

$$(5.1)\qquad z := c-\tilde{x}\tilde{y} = -d-q^{-1}\tilde{u}\tilde{v}$$

である。

$SU_q(2)$-不変な汎函数 $h : \tilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbb{C}[\lambda,\lambda^{-1}]$ は、実質的には $\mathcal{R}[z]$ 上でのみ値をとり、その値域は結果として $\mathcal{R}=\mathbb{C}[c,d]$ に含まれることが示せる。その h の具体的な表示については、次のことがわかる。

<u>命題 4</u>. z の多項式 $F=F(z)\in\mathcal{R}[z]$ について、h の値は区間 $[-d,c]$ における Jackson 積分

$$(5.2)\qquad h(F) = \frac{1}{c+d}\int_{-d}^{c} F(z)d_{q^2}z$$

で与えられる。

この Jackson 積分で big q-Jacobi 多項式の舞台の準備が整った訳である。

<u>定理 5</u>. 自然数の組 (μ,ν,n) に対して、z の n 次多項式 $F^{(\mu,\nu)}_n(z;c,d;q)\in\mathcal{R}[z]$ を big q-Jacobi 多項式を用いて

$$(5.3)\quad F_n^{(\mu,\nu)}(z;c,d;q) = (-1)^n\, q^{-\frac{1}{2}n(2\mu+\nu+n+1)} \begin{bmatrix} \mu+n \\ \mu \end{bmatrix}_q^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \mu+\nu+n \\ \mu \end{bmatrix}_q^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\, c^n(-q^{\mu+1}d/c;q)_n\, P_n^{(\mu,\nu)}(z;c,d;q)$$

と定義する。このとき $\ell\in\frac{1}{2}\mathbb{N}$, $i,j\in I_\ell=\{-\ell,-\ell+1,...,\ell\}$ とすると (i,j) の大小関係に応じて $\varphi_{i,j}^{(\ell)}$ は次の形に表される：

(I) $i+j\le 0$, $j\le i$: $\quad\varphi_{i,j}^{(\ell)} = \tilde{x}^\mu\, F_n^{(\mu,\nu)}(z;c,d;q^2)\, \tilde{v}^\nu$,

(II) $i+j\le 0$, $i\le j$: $\quad\varphi_{i,j}^{(\ell)} = \tilde{x}^\mu\, \tilde{u}^\nu\, F_n^{(\mu,\nu)}(z;c,d;q^2)$,

(III) $i+j\ge 0$, $i\le j$: $\quad\varphi_{i,j}^{(\ell)} = \tilde{u}^\nu\, F_n^{(\mu,\nu)}(z;c,d;q^2)\, \tilde{y}^\mu$,

(IV) $i+j\ge 0$, $j\le i$: $\quad\varphi_{i,j}^{(\ell)} = F_n^{(\mu,\nu)}(z;c,d;q^2)\, \tilde{v}^\nu\, \tilde{y}^\mu$,

ここで、$\mu=|i+j|$, $\nu=|i-j|$, $n=\min\{\ell-i,\ell+i,\ell-j,\ell+j\}= \ell - \frac{1}{2}(\mu+\nu)$ である。

この表示と定理 3, (4.15) により、big q-Jacobi 多項式 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x;c,d;q)$ $(n\in\mathbb{N})$ が、区間 $[-d,c]$, 重み $(\frac{qx}{c};q)_\alpha(-\frac{qx}{d};q)_\beta$ で Jackson 積分に関する次の直交関係式をもつことが従う：$m\neq n$ ならば

$$(5.4)\quad \int_{-d}^{c} P_m^{(\alpha,\beta)}(x;c,d;q)\, P_n^{(\alpha,\beta)}(x;c,d;q)(\frac{qx}{c};q)_\alpha(-\frac{qx}{d};q)_\beta d_qx=0.$$

この種の重みは $\tilde{\mathcal{A}}$ における関係式

$$(5.5)\quad (\tilde{x}^m)^*\, \tilde{x}^m = \tilde{y}^m\, \tilde{x}^m = c^m\, (\frac{q^2z}{c};q^2)_m,$$
$$(\tilde{u}^m)^*\, \tilde{u}^m = (-1)^m q^{-m}\, \tilde{v}^m\, \tilde{u}^m = q^{-m(m+1)}d^m\, (-\frac{q^2z}{d};q^2)_m$$

から自然に決定される。

左 $\mathcal{A}$-comodule としての $\tilde{\mathcal{A}}$ の微分表現を考察すれば、それによって

big q-Jacobi 多項式の満たす２階の q-差分方程式や、昇降関係、Rodrigues の公式等に、表現論的解釈を与えることができる。例えば、big q-Jacobi 多項式 $u(x)=P_n^{(\alpha,\beta)}(x;c,d;q)$ の満たすべき q-差分方程式は、

$$
\begin{aligned}
(5.6)\quad & \big[(c-q^{\alpha+1}x)(d+q^{\beta+1})T_q-(1+q)cd-q\{c(1+q^{\beta})-d(1+q^{\alpha})\}x \\
& +q^{-n+1}(1+q^{\alpha+\beta+2n+1})x^2+q(c-x)(d+x)T_q^{-1}\big]u(x)=0
\end{aligned}
$$

で与えられる。ここで T_q は q-shift の作用素

$$
(5.7)\qquad (T_qf)(x) = f(qx)
$$

である。(5.6) は、量子包絡環 $U_q(su(2))$ の Casimir element についての、球函数の満たす固有方程式として導かれる。（このあたりの事情は、本質的に [M1] と同じである。）

この big q-Jacobi 多項式の表現論的解釈は、(c,d)=(1,0) の特殊化の操作（$\mathbb{C}$-代数の準同型 $\mathrm{id}\otimes\varepsilon : \tilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{A}$ でうつすこと）を行えば、little q-Jacobi 多項式についての [M1] の結果を再現することに注意しておこう。

実際には、$\varphi_{i,j}^{(\ell)}$ を q-超幾何級数で表すやり方は幾通りもあり、それぞれが違う意味をもつ。その一つとしてここでは q-Hahn 多項式による表示をとり上げよう。N を自然数とするとき、$0\le n\le N$ なる自然数 n に対して x を変数とする <u>q-Hahn 多項式</u> $Q_n(x;a,b;N;q)$ を

$$
(5.8)\qquad Q_n(x;a,b;N;q) = {}_3\varphi_2\left(\begin{matrix} q^{-n},abq^{n+1},x \\ aq,\quad q^{-N} \end{matrix};q,q\right)\quad (0\le n\le N)
$$

で定める。このとき

<u>定理 6</u>. $\varphi_{i,j}^{(\ell)}$ は q-Hahn 多項式を用いて次のように表される：

$$(5.9)\quad \varphi^{(\ell)}_{i,j} = q^{-2(\ell-j)} \begin{bmatrix} 2\ell \\ \ell+i \end{bmatrix}_{q^2}^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 2\ell \\ \ell+j \end{bmatrix}_{q^2}^{\frac{1}{2}} \times \tilde{u}^{\ell-i}\ \tilde{y}^{\ell+i}\ Q_{\ell-j}(q^{-2(\ell-i)};-\frac{z}{d},q^{-2}\frac{c}{z};2\ell;q^2)\ \tilde{v}^{\ell-j}\ \tilde{y}^{-\ell+j}.$$

(5.9) の表示では、定理 5 のような場合分けは不要である。但し、$\varphi=\psi\tilde{y}^{-m}$ の形で $\tilde{y}$ の負べきを許している。これは、$\varphi\tilde{y}^{m}=\psi$ を満たす唯一の φ という意味と了解されたい。

q-Hahn 多項式は次のような選点直交関係式をもつ：$0\le m,n\le N$ かつ $m\neq n$ ならば

$$(5.10)\quad \sum_{x=0}^{N} Q_m(q^{-x};a,b;N;q)Q_n(q^{-x};a,b;N;q)\frac{(aq;q)_x(bq;q)_{N-x}}{(q;q)_x(q;q)_{N-x}}(aq)^{-x} = 0.$$

q-Hahn 多項式のこの性質は、我々の立場では、行列 $\Phi^{(\ell)}=(\varphi^{(\ell)}_{i,j})_{i,j}$ について積 $\Phi^{(\ell)*}\,\Phi^{(\ell)}$ が対角行列（殆ど unitary ）となるという事実から導かれる。

$\mathbb{C}$-代数 $\tilde{\mathcal{A}}$ については、2つの $\mathbb{C}$-代数の準同型 $id\otimes\varepsilon$: $\tilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{A}$, $\varepsilon\otimes id$: $\tilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{C}[\lambda,\lambda^{-1}]$ （$\mathcal{C}=\mathbb{C}[\alpha,\beta,\gamma,\delta]$）による特殊化の操作が許されることに注目しよう。上のように構成された q-Hahn 多項式に対して前者の特殊化を施せば、$\mathcal{A}=A(SU_q(2))$ における議論で Koornwinder の提示した q-Krawtchouk 多項式が得られる。また、後者の特殊化を施せば、Stanton の q-Krawtchouk 多項式に新しい意味付けを与えることができる。この 2つの q-Krawtchouk 多項式が、ともに一つ上のクラスの直交多項式である q-Hahn 多項式の特殊化として得られることは q-超幾何級数による表示で見れば明らかなことではあるが、$SU_q(2)$ の球函数の量子的変形によって結び付けられていたという事実は、筆者らにとっては少なからぬ驚きであった。

最後に、Podles の quantum 2-sphere [P] との関係にふれておこ

う。$\tilde{\mathcal{A}}$ の直交分解 (4.12) において、"中央の列" だけを集めて

$$(5.11)\qquad \tilde{\mathcal{A}}_0 = \oplus_{\ell\in\mathbb{N}} \tilde{V}^{L}_{\ell;0}\otimes\mathcal{R}, \qquad \tilde{V}^{L}_{\ell;0} = \oplus_{i\in I_\ell}\mathbb{C}\varphi^{(\ell)}_{i,0}$$

とおくと、$\tilde{\mathcal{A}}_0$ は $\tilde{\mathcal{A}}$ の *-部分環であり、しかも左 $\mathcal{A}$-comodule となっていることがわかる。さらに $\tilde{\mathcal{A}}_0$ は $\mathcal{A}\otimes\mathcal{R}$ の部分環であり、$\mathcal{R}$ は $\tilde{\mathcal{A}}_0$ の中心に含まれている。この水準までくれば、パラメータ (c,d) は任意に特殊化することができる。

<u>命題 7</u>. $\xi=\tilde{x}\tilde{u}=XU$, $\eta=\tilde{v}\tilde{y}=VY$, $z=c-\tilde{x}\tilde{y}=c-XY$ とおくと、$\xi^* = -q^{-1}\eta$, $\eta^* = -q\xi$, $z^*=z$ である。更に、$\tilde{\mathcal{A}}_0$ は ξ,η,z から生成され、次の基本関係をもつ：

$$(5.12)\qquad \begin{cases} z\xi = q^2\xi z, \quad \eta z = q^2 z\eta \\ \xi\eta = -q^{-1}(c-z)(d+z), \ \eta\xi = -q^{-1}(c-q^2z)(d+q^2z) \end{cases}$$

これも (2.5),(2.6) と同様に実の座標に取り替えてみると、3次元アフィン空間に埋め込まれた、2次元球面の方程式を変形した代数関係を含んでいることがわかる。

この量子空間は、Podles の quantum 2-sphere と本質的に同じものである。定理 5 から、Podles の構成した2次元量子球面の函数環の直交基底が $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x;c,d;q)$ の形の big q-Jacobi 多項式を用いて表されることもわかる。

話の順序は逆で、実は最初に Podles の quantum 2-sphere についてのこの事実を見出した。そこで、$\alpha\neq\beta$ の場合も含めてすべての q-Jacobi 多項式 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x;c,d;q)$ が表れるような $SU_q(2)$ の直交基底を構成しようという試みの中で、3次元量子球面の変形を表す量子空間、つまり代数 $\tilde{\mathcal{A}}$ を発見した —— というのがこの話の経緯である。

【 文 献 】

[AA] G.E. Andrews and R. Askey: Enumeration of partitions. The role of Eulerian series and the q-orthogonal polynomials, Higher Combinatorics, edited by M. Aigner, p.3-26, Reidel, Dordrecht, Holland, 1977.

[H] W. Hahn: Über Orthogonalpolynome, die q-Differenzen-gleichungen genügen, Math. Nach., **2**, 1949, p.4-34.

[K] T.H. Koornwinder: The addition formula for little q-Legendre polynomials and the twisted SU(2) quantum group, Research Announcement, June 10, 1988.

[M0] T. Masuda, K. Mimachi, Y. Nakagami, M. Noumi and Kimio Ueno: Representations of quantum groups and a q-analogue of orthogonal polynomials, C. R. Acad. Sci. Paris, **307**, 1988, Série I, 559-564.

[M1] T. Masuda, K. Mimachi, Y. Nakagami, M. Noumi and Kimio Ueno: Representations of the quantum group $SU_q(2)$ and the little q-Jacobi polynomials, preprint.

[P] P. Podles: Quantum spheres, Lett. in Math. Phys., **14**, 1987, 193-202.

[V] L.L. Vaksman and Ja.S. Soibelman: Algebra of functions on quantum group SU(2), Funct. Anal. i-ego Pril., **22**, 1988, p.1-14.