

Krichever理論の高次元化について

京大教研 中屋敷 厚 (Atsushi Nakayashiki)

§ 0 序

Kricheverの理論は、Jacobi多様体のテータ関数が、KPヒエラルヒーの解を与えることを示している[3]。解の具体的な構成は、Baker-Akhiezer (BA) 関数を作ることにより成される。BA関数は、佐藤理論の枠組では、解を表す UGM の点に対応する \mathfrak{g} -加群の生成元である。佐藤理論は、この \mathfrak{g} -加群の変形方程式として KP-ヒエラルヒーをとらえる。これを踏まえ、BA関数を単独で考えるより、その生成する \mathfrak{g} -加群を考えることの方が自然であると思われる。このような考えは別に新しいものではなく、Manin[7]で、Krichever-Drinfeld bi-moduleと呼んでいるものがこの \mathfrak{g} -加群に一致する。しかし、それは \mathfrak{g} -加群として定式化されているわけではなく、 \mathfrak{g} -加群として定式化した方が、意味がはっきりして分かりやすい。又、BA関数はJacobi多様体の座標を、パラメータとして含んでいるが、それが global な意味を持つような幾何学的設定が欲しいと思っていた。これは、BA関数の生成する \mathfrak{g} -加群を、Jacobi多様体の上に、 \mathfrak{g} -加群の層

として構成できることが分かり解決した (BA-関数の生成する \mathcal{O} -加群は、この層の stalk になる)。

以上を踏まえて、Krichever理論を高次元化しようと言うのが我々の目標である。射影偏極多様体 (X, D) で、 D が subvariety であるものに対して、 X 上の層 $\mathcal{O}_X(*D)$ を Fourier 変換することにより、 $\text{Pic}^0(X)$ 上の層が出来るが、これには、 \mathcal{O} -加群の構造が入る (unique ではない)。この \mathcal{O} -加群の層を、 (X, D) の Baker-Akhiezer 加群と呼ぶ (実際は \mathcal{O} -加群の構造も指定しなければいけない)。 X が代数曲線の場合、適当な \mathcal{O} -加群の構造を選ぶことにより、BA-加群は、前半で述べた、Jacobi 多様体上の \mathcal{O} -加群の層に一致する。従って、 X が高次元の場合の BA-加群の理論が、Krichever理論の高次元化と言える。

BA 加群についてまずやるべきことは、 \mathcal{O} -加群としての構造の決定である。 X が代数曲線の場合、Jacobi 多様体の一般点では、BA 加群は、階数 1 の (\mathcal{O} 上の) 自由加群である。この事実により、代数曲線の場合は BA 関数を考えるだけですべての事が足りるのである。高次元の場合については、 (X, D) が主偏極アーベル多様体の場合について構造定理が確立された。又、この構造定理を使って、 X がアーベル多様体の超曲面および、codimension の高いある種の部分多様体

の場合の構造定理を証明することができる。アーベル多様体の場合の構造定理は、BA 加群は、 $\text{Pic}^0(X)$ の一般点では、(次元が 2 以上では階数 2 以上の) 自由加群になることを主張している。(上記他の場合も同様である。) これは、まさに 1 次元の場合の自然な拡張になっている。2 次元アーベル多様体の場合はさらに、KP 方程式の拡張に当たる方程式を導くことが出来、ある特殊解のまわりでの解空間の構造も多少分かった。

ここでは、BA 加群の定義、アーベル多様体の場合の構造定理、2 次元の方程式についての結果を述べる。詳しくは [4] および、その改訂版である [5] を見て下さい。

§1 Baker-Akhiezer 加群

(X, D) : 非特異射影偏極多様体 s.t. D は ample subvariety

$\mathcal{O}_X(nD)$: D にのみ高々 n 位の極をもつ X 上の有理型関数の層

$\mathcal{O}_X(*D) = \varinjlim_n \mathcal{O}_X(nD)$ $g = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}_X)$: X の不正則数

$\{\omega_j\}_{0 \leq j \leq g-1}, \{a_i, b_j\}_{0 \leq i, j \leq g-1} : H^0(X, \mathbb{C}^1)$ および $H_1(X, \mathbb{Z})$ (modulo torsion)

の基底で次をみたすもの: $\int a_i \omega_j = \delta_{ij}$, $\mathbb{C}^1 = \int b_i \omega_j$ とおく。

$\{\eta_j\}_{0 \leq j \leq g-1}$: 高々 D にのみ極を持つ第 2 種微分の基底 (modulo

$H^0(X, \mathbb{C}^1)$ で) で次をみたすもの: $\int a_i \eta_j = 0$, $\int b_i \eta_j = -2 \text{Im} \mathbb{C}^1_{ij}$ 。

$\text{Pic}^0(X) = \overline{H^0(X, \mathbb{C}^1)} / H^1(X, \mathbb{Z})$ (ここで上付 $\overline{\quad}$ は複素共役を表す)。

ここで、 $H^1(X, \mathbb{Z})$ の $\overline{H^0(X, \mathbb{Q}^1)}$ への埋め込みは次のようにする。
 $H^1(X, \mathbb{Z})$ の基底 $\{e_1, \dots, e_{2g}\}$ に対して $\{\beta_1, \dots, \beta_{2g}\}$ ($\beta_i \in H^0(X, \mathbb{Q}^1)$)
 で $2\pi i \int e_i[\Sigma] = \int_{\Sigma} (\beta_i - \bar{\beta}_i)$ (任意の integral cycle Σ に対して) を
 みたすものが unique に決まるが、この時

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \cong \bigoplus \mathbb{Z} \bar{\beta}_i \hookrightarrow \overline{H^0(X, \mathbb{Q}^1)} \quad (\text{以下 } \Gamma = \bigoplus \mathbb{Z} \bar{\beta}_i \text{ と書く。})$$

$\pi_X, \pi_{\text{Pic}^0(X)} : X \times \text{Pic}^0(X)$ から第1, 第2成分への射影

$P : X \times \text{Pic}^0(X)$ 上の Poincaré 直線束 (すなわち、各 $\alpha \in \text{Pic}^0(X)$
 に対し、 $P|_{X \times \{\alpha\}} \cong (\alpha$ の定める X 上の直線束) となるもの)。

Kodaira [2] により、 P は次の仕方で構成される。

\hat{X} と X の universal covering, G を基本群とする。

$$P \simeq \hat{X} \times \overline{H^0(X, \mathbb{Q}^1)} \times \mathbb{C} / G \times \Gamma$$

ただし、 $G \times \Gamma$ の $\hat{X} \times \overline{H^0(X, \mathbb{Q}^1)} \times \mathbb{C}$ への作用は次で定義する：

$$(\theta, \gamma) : (\hat{z}, \alpha, \zeta) \longmapsto (\theta \hat{z}, \alpha + \gamma, f(\theta, \gamma, \hat{z}, \alpha) \zeta)$$

$$f(\theta, \gamma, \hat{z}, \alpha) = \exp(-2^t \alpha \cdot \text{Im}^t \hat{\omega} \cdot \eta + \int_{C(\theta)} \gamma + \int_{\hat{z}} \pi_X^* \bar{\gamma})$$

$$\alpha = \sum_{i=0}^{g-1} \alpha_i \bar{\omega}_i \quad C(\theta) : \theta \text{ に対応した } P_X(\hat{z}) \text{ を基点とする } X$$

$$\text{の開曲線 (ここで } P_X : \hat{X} \rightarrow X \text{ 射影), } C(\theta) \sim \sum_{i=0}^{g-1} m_i a_i + \sum_{j=0}^{g-1} n_j b_j$$

(homologous), $\hat{z} : \hat{X}$ の固定された点。

以上を準備して、 $\text{Pic}^0(X)$ 上の $\mathcal{O}_{\text{Pic}^0(X)}$ 加群の層を、

$$\mathcal{L}(X, D) = \pi_{\text{Pic}^0(X)*} (\pi_X^* \mathcal{O}_X(*D) \otimes P)$$

で定義すると、次の命題が成り立つ。

(命題 1.0) 上の条件をみたす data $(\{f\}, \{w_i\}, \{a_i, b_i\}, \{r_j\})$ に対して $\mathcal{L}(X, D)$ は次のようにして定まる \mathcal{O} -加群の構造を持つ。
 $A_j(z) = \int_0^z r_j$, $V_j = \frac{\partial}{\partial z_j} - A_j$ とおく。 $P_{\text{Pic}^0(X)}: \overline{H^0(X, \mathbb{C})} \rightarrow \text{Pic}^0(X)$ を射影とする。 $\text{Pic}^0(X)$ の開集合 U 上の $\mathcal{L}(X, D)$ の任意の section ψ を、 $\hat{X} \times P_{\text{Pic}^0(X)}^{-1}(U)$ 上の有理型関数として表わしたとき、 $\frac{\partial}{\partial z_j}$ の作用を $V_j \psi$ で定義する。 $[V_i, V_j] = 0$ ($0 \leq i, j \leq 8$) であり、これは \mathcal{O} -加群の構造を定める。

(注意) $R = \exp(\sum_{j=0}^{q-1} C_j(z) \alpha_j)$, $C_j(z): \hat{X}$ 上の正則関数 として f を $R(gz, \alpha + \gamma) f R(z, \alpha)^{-1}$ に変えても、 ρ と同型な直線束を定義するが、この時 $V_j \rightarrow R V_j R^{-1}$ と変換し、 \mathcal{O} -加群の構造は変わらない。(ここで、 $R V_j R^{-1}$ が $\text{Pic}^0(X)$ 上 1 価 (ただし、 R を $\hat{X} \times \overline{H^0(X, \mathbb{C})}$ 上の正則 (nowhere vanishing) として) とすると上の形に限ることは容易に分かる。)

この命題は、上の ρ の具体的構成を使って、 $\mathcal{L}(X, D)$ の section が、 $\hat{X} \times \overline{H^0(X, \mathbb{C})}$ 上の関数としてみたとすべき ($G \times \Gamma$ の作用に対する) 変換性を調べることにより容易に証明される。

(定義) $\mathcal{L}(X, D)$ に \mathcal{O} -加群の構造を入れて考えたものを、Baker-Akhiezer (BA) 加群と呼ぶ。

§ 2 アーベル多様体の BA 加群と構造定理

アーベル多様体の BA 加群は、テータ関数を使って具体的に表すことが出来る。

(命題 2.0) (X, Θ) は主偏極アーベル多様体, $\Theta = (\theta(z)=0)$,

$\theta(z)$: Riemann のテータ関数 と表わされているとする。この時

i) 各 $c \in X \cong \text{Pic}^0(X)$ に対し

$$\mathcal{L}(X, \Theta)_c \cong V_c \exp\left(-\sum_{i=0}^{g-1} \alpha_i \zeta_i(z)\right) \quad \zeta_i = \frac{\partial}{\partial z_i} \log \theta(z)$$

$$V_c = \bigcup_{n \geq 0} V_c(n) \quad V_c(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g / n\mathbb{Z}^g} \mathcal{O} f_{n,a}(z + \frac{c+\lambda}{n}) \theta(z)^{-n}$$

$$\text{ここで, } f_{n,a}(z) = \theta\left[\begin{smallmatrix} a \\ 0 \end{smallmatrix}\right](nz, n\Omega), \quad \theta\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right](z, \Omega) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi i^t (mta) \Omega (mta) + 2\pi i^t (mta)(z+b))$$

$\mathcal{O} = \mathbb{C}\langle\langle x_0, \dots, x_{g-1} \rangle\rangle$ (g 変数収束巾級数環), $g = \dim X$ とする。

ii) $\frac{\partial}{\partial z_i}$ ($0 \leq i \leq g-1$) の作用は、右辺の元を (x_0, \dots, x_{g-1}) の関数とみて素直に微分することによって定まる。ここで、 (x_0, \dots, x_{g-1}) は $\text{Pic}^0(X)$ の universal covering の global な座標とする。

以下では、次のような記号を用いる。

$$\mathcal{D} = \mathcal{O}\left[\frac{\partial}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{g-1}}\right], \quad \mathcal{D}^{(n)} = \{P \in \mathcal{D} \mid \text{ord}(P) \leq n\}$$

$$\mathcal{L}(X, \Theta)_c(n) = V_c(n) \exp\left(-\sum_{i=0}^{g-1} \alpha_i \zeta_i\right) \quad (n \geq 0), \quad = 0 \quad (n < 0)$$

$$\text{gr } \mathcal{L}(X, \Theta)_c = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}(X, \Theta)_c(n) / \mathcal{L}(X, \Theta)_c(n-1).$$

アーベル多様体の場合の構造定理は次のようになる。

(構造定理) (X, \mathbb{A}) を g 次元主偏極アーベル多様体で、 \mathbb{A} が非特異のものとする。この時次のことが成り立つ。

$$i) \mathcal{F}(X, \mathbb{A})_c(n) = \mathcal{O}^{(1)} \mathcal{F}(X, \mathbb{A})_c(n-1) \begin{cases} n \geq g+2 & (c=0) \\ n \geq g+1 & (c \neq 0) \end{cases}$$

ii) $c \neq 0$ ならば、 $\text{gr} \mathcal{F}(X, \mathbb{A})_c$ は、階数 $g!$ の自由 $\text{gr} \mathcal{O}$ -加群であり、特に $\mathcal{F}(X, \mathbb{A})_c$ は、階数 $g!$ の自由 \mathcal{O} -加群である。

この定理は、次の命題に帰着させて証明する。

(命題 2.1) (X, \mathbb{A}) は上の定理と同じとする。このとき

$$i) V_c(n) = D_X^{(1)} V_c(n-1) \begin{cases} n \geq g+2 & (c=0) \\ n \geq g+1 & (c \neq 0) \end{cases}$$

ii) $c \neq 0$ ならば、 $\text{gr} V_c$ は、階数 $g!$ の自由 $\text{gr} D_X$ -加群である。

ここで、 $D_X = \mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_{g+1}}] = X$ 上微分作用素環の global section とする。

命題は、内容を微分形式の global section に対する命題に書き直し (アーベル多様体の cotangent bundle が自明であることを使う)、直線束のコホモロジーの消滅を使って証明する。

$c=0$ で freeness が破れているのは、証明上の観点から言えば、trivial bundle のみ、消滅の具合が悪いためである。

(注意) 定理の中で、 \mathbb{A} が非特異であることが条件となっ

いるが、Andreotti, Mayer [1]によつて、一般の主偏極アーベル多様体の Θ は非特異であることが証明されている。ただし Jacobi 多様体の Θ は一般に特異点を持ち、 $\dim \text{Sing} \Theta = g-3$ (hyper-elliptic), $= g-4$ (non-hyperelliptic) となることが証明されている。 $g=2$ の時 Θ はいつも非特異、 $g=3$ のときは、non-hyperelliptic Jacobi 多様体の Θ は非特異である。

§ 3 非線型微分方程式

2次元の方程式について調べる。以下

$$\hat{E} = \hat{O}[[\partial_0^2, \partial_0^2 \partial_1]][[\partial_0]] \quad \hat{O} = \mathbb{C}[[x_0, x_1]] \quad \mathcal{O} = \hat{O}[[\partial_0, \partial_1]]$$

又、添字集合 $I \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ に対して

$$E(I) = \{ \sum a_\alpha \partial^\alpha \in \hat{E} \mid \alpha \notin I \text{ なら } a_\alpha = 0 \}$$

と書くことにする。

$$J = \mathcal{O}W_0 \oplus \mathcal{O}W_1$$

$$W_0 = 1 + \sum_{\substack{j \geq 0, i+j \leq 0}} W_{ij} \partial_0^i \partial_1^j$$

$$W_1 = \partial_0^2 \partial_1^2 + \sum_{\substack{i+j \leq 1, j \geq 0 \\ i+j \neq 1 \text{ なら } j \geq 3}} W_{ij} \partial_0^i \partial_1^j$$

で

$$E^{(n)} = J^{(n)} \oplus E(J^{(n)})$$

$$J^{(n)} = J \cap E$$

$$J^{(n)} = \{ \alpha = (\alpha_0, \alpha_1) \mid |\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 \leq n, -2\alpha_0 + 1 \geq \alpha_1 \geq 0 \}$$

をみるものも考える。

この W_0, W_1 に対して方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W_l}{\partial t_{ij}} + W_l \partial_0^i \partial_1^j &= \sum_{R=0,1} B_{l,ij,R} W_R \quad j, l = 0, 1 \quad i \in \mathbb{Z}_{>0}, i+j \geq 2 \\ \exists B_{l,ij,R} \in \mathcal{A} \end{aligned} \right\} (1)$$

で与えられる。 \mathcal{J} が free ゆえ、 $B_{l,ij,R}$ は W_0, W_1 i, j により unique に決まる。1次元の場合とは異なり、上の形の方程式が成り立つためには、 W_{ij} たちは時間微分を含まない多くの微分関係式をみたさねばならぬ。これは、方程式が有限の開いた形になるための条件である。この条件をみたす W_l ($l=0,1$) がどのくらいあるかを決定することは重要であるが、 \mathcal{J} が多項生成の場合はむずかしくなるようで、2次元に限っても完全に分かっているとは言えぬ。単項生成の場合については大山氏の結果がある[6]。上の方程式について分かっていることは以下の2つである。

i)

i) 本論説中の、大山氏の扱っている $r=2$ の場合の発展方程式の解を2つ用意し U_0, U_1 とする。これを

$$U_i = 1 + \sum_{R \leq -1, j \geq 0} U_{i/R, j} \partial_0^R \partial_1^j \quad i=0,1$$

と展開した時、次の命題が成り立つ。

(命題 3.0) $\{U_{i/R, j}\}$ が以下の条件をみたすならば、 $\mathcal{J} = \mathcal{A}U_0 + \mathcal{A}U_1 \partial_0 \partial_1^2$ は直和であり、(1)の解になる。

(命題 3.1) 方程式系

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_{20}} - B_{20}, \frac{\partial}{\partial t_{11}} - B_{11} \right] = 0$$

の解は、(1)の形の解に属するある特殊解のまわりで、2変数の任意関数を含み、しかも高々2変数の任意関数しか含まない。

(注意) 1. 命題 3.1 の方程式系は、ヒエラルヒー (1) で、 $W_k (k=0,1)$ が、 t_{20}, t_{11} にしか依らない、とした方程式より弱い方程式である。何故なら、(1) で $W_k (k=0,1)$ が t_{20}, t_{11} にしか依らないとした方程式では、付加条件は、時間を全部入れたものと同じになるからである。

2. (1) で取り上げた解は、もともとの (大山氏が論じている) 方程式系の一般解が2変数の任意関数を含むことから、2変数の任意関数を含むことが分かる。命題 3.1 は、ある特殊解のまわりとは言え、(1)の形の解を、(1)の解として変形してもあまり変形しないことを示している。

命題 3.1 は、特殊解のまわりで方程式を線型化することにより証明する。

reference

- [1] A. Andreotti and A. Mayer : On period relations for Abelian integrals on algebraic curves. Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa 21, 189-238 (1967)
- [2] K. Kodaira: Characteristic linear systems of complete continuous systems. Amer. J. Math. 78, 716-744 (1956)
- [3] I.M. Krichever: Method of algebraic geometry of non-linear equations. Russian Math. Surveys. 32, no. 6, 185-214 (1977)
- [4] A. Nakayashiki : RIMS-preprint 650
- [5] A. Nakayashiki : in preparation
- [6] Y. Ohyaama : in this volume
- [7] Yu. I. Manin : Algebraic aspect of non-linear differential equations, Modern problems of mathematics, 11 (1978).